

高等代数题解

下 册

北京化工学院

数学教研组

目 录

第六章	线性空间	(1)
	补充题	(21)
第七章	线性变换	(25)
	补充题	(55)
第八章	λ -矩阵	(62)
第九章	欧几里得空间	(63)
	补充题	(105)
第十章	代数基本概念介绍	(112)
	补充题	(125)

第六章 线性空间

1. 设 $M \subset N$, 证明 $M \cap N = M, M \cup N = N$

证: $\because M \cap N \subset M$, 又据已知条件 $M \subset N$, $\therefore M$ 中一切元素 $m \in M \cap N$
即 $M \subset M \cap N \therefore M \cap N = M$

$\because N \subset M \cup N$, 又据已知 $M \subset N$, $\therefore$ 属于 M 或属于 N 的全体元素都在 N 中, 即 $M \cup N \subset N$, $\therefore M \cup N = N$

2. 证明: $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$

$$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$$

证: 设 $a \in M \cap (N \cup L)$, $a \in M$ 及 $a \in N \cup L$, 而 $a \in N \cup L$ 则 $a \in N$ 或 $a \in L$,
若 $a \in N$ 则 $a \in M \cap N$; 若 $a \in L$ 则 $a \in M \cap L$, 总之 $a \in (M \cap N) \cup (M \cap L)$

$$\therefore M \cap (N \cup L) \subset (M \cap N) \cup (M \cap L)$$

反之: $N \subset N \cup L$, $\therefore M \cap N \subset M \cap (N \cup L)$, 同理 $M \cap L \subset M \cap (N \cup L)$

$$\therefore (M \cap N) \cup (M \cap L) \subset M \cap (N \cup L) \therefore M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$$

设 $a \in M \cup (N \cap L)$, $a \in M$ 或 $a \in N \cap L$, 若 $a \in M$ 则 $a \in M \cup N$ 及 $a \in M \cup L$,
若 $a \in N \cap L$, 则 $a \in M \cup N$, 及 $a \in M \cup L$, 总之 $M \cup (N \cap L) \subset (M \cup N) \cap (M \cup L)$

反之, 设 $a \in (M \cup N) \cap (M \cup L)$ 则 $a \in M \cup N$ 及 $a \in M \cup L$, 若 $a \in M$ 则
 $a \in M \cup (N \cap L)$, 若 $a \in N$, 则 $a \in N$ 及 $a \in L$, 则 $a \in N \cap L$, $\therefore a \in M \cup (N \cap L)$

$$\therefore (M \cup N) \cap (M \cup L) \subset M \cup (N \cap L) \therefore M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$$

3. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间:

1) 次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式全体, 对于多项式的加法和数量乘法;

解: 设 f, g 是次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式,

$\because \partial f + \partial g \leq \max(\partial f, \partial g)$ 对于加法 $f+g$ 当上式取小于号时, 则

不在次数等于 n ($n \geq 1$) 的实系数多项式的全体中, $\therefore$ 不能构成实数域上的线性空间。例如, $f = x^{n+1}, g = -x^{n+1}, f+g=0, 0(f+g) = 0 < n$

2) 设 A 是一个 $n \times n$ 实数矩阵, A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体, 对于矩阵的加法和数量乘法。

解: 设 A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体为 V , 则

$f(A) + g(A) = h(A) \in V, kf(A) = g(A) \in V$, 而 A 的实系数多项式的运算满足下面八条规则:

$$\textcircled{1} \quad f(A) + g(A) = g(A) + f(A)$$

$$\textcircled{2} \quad (f(A) + g(A)) + h(A) = f(A) + (g(A) + h(A))$$

$\textcircled{3}$ 在 V 中有一个 A 的零多项式 $0(A) = 0_{n \times n}$ 对于 V 中任一元素 $f(A)$, 都有 $f(A) + 0(A) = f(A)$

$\textcircled{4}$ 对于 V 中任一元素 $f(A)$, 均有 V 中一元素 $g(A) = -f(A)$, 使得 $f(A) + g(A) = f(A) - f(A) = 0$

$$\textcircled{5} \quad 1 \cdot f(A) = f(A)$$

$$\textcircled{6} \quad k(lf(A)) = (kl)f(A)$$

$$\textcircled{7} \quad (k+l)f(A) = kf(A) + lf(A)$$

$$\textcircled{8} \quad k(f(A) + g(A)) = kf(A) + kg(A)$$

其中, k, l 表示实数中的任意数, $f(A), g(A), h(A)$ 表示 V 中的任意元素。因此构成实数域上的线性空间。

3) 全体实对称 (反对称, 上三角) 矩阵, 对于矩阵的加法和数量乘法。

解: 设全体实对称矩阵为 V 。对矩阵加法和数量乘法是封闭的:

$\textcircled{1}$ 对加法封闭: 若 $A' = A, B' = B$, 则 $(A+B)' = A' + B' = A+B$
 $\therefore A+B \in V$

$\textcircled{2}$ 对数量乘法封闭: 若 $A' = A$, 则 $(kA)' = kA' = kA \therefore kA \in V$

又，零矩阵 O 和对称阵的负阵也都是对称的。其余各条均自然成立。因此构成实数域上的线性空间。同样地，全体反对称阵，全体上三角阵也构成线性空间。

4) 平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法。

解：因为存在着平面上不平行某一向量的两个向量相加所得到的和向量可能平行这一向量。因此对加法不封闭。所以不能构成线性空间。

5) 全体实数的二元数列，对于下面定义的运算：

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2);$$

$$k \circ (a_1, b_1) = (ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2)$$

解：据定义，可看出对加法和数量乘法是封闭的。而且据所给定义，满足下列八条规则：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \\ &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1 + a_2 a_1) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad ((a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)) \oplus (a_3, b_3) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \oplus (a_3, b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + (a_1 + a_2) a_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3 + a_2 a_3 + a_1(a_2 + a_3)) \\ &= (a_1, b_1) \oplus (a_2 + a_3, b_2 + b_3 + a_2 a_3) \\ &= (a_1, b_1) \oplus ((a_2, b_2) \oplus (a_3, b_3)) \end{aligned}$$

③ 在实数的二元数列 V 中，有一个二元数列 $(0, 0)$ 对于 V 中任一元素 (a, b) 都有 $(a, b) \oplus (0, 0) = (a + 0, b + 0 + a \cdot 0) = (a, b)$

④ 由 $(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) = (0, 0)$ 得:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 & a_2 = -a_1 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 = 0 & \therefore b_2 = a_1^2 - b_1 \end{cases} \therefore \text{对 } V \text{ 中任意一个元素 } (a, b)$$

都有 V 中元素 $(-a, a^2 - b)$ 使得:

$$(a, b) \oplus (-a, a^2 - b) = (a - a, b + a^2 - b - a^2) = (0, 0)$$

$$\textcircled{5} \quad 1 \circ (a_1, b_1) = (1 \cdot a_1, 1 \cdot b_1 + \frac{1 \cdot (1-1)}{2} a_1^2) = (a_1, b_1)$$

$$\textcircled{6} \quad k \circ (\ell \circ (a_1, b_1)) = k \circ (\ell a_1, \ell b_1 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} a_1^2)$$

$$= (k \ell a_1, k(\ell b_1 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} a_1^2) + \frac{k(k-1)}{2} \ell^2 a_1^2)$$

$$= (k \ell a_1, k \ell b_1 + \frac{k \ell (\ell-1)}{2} a_1^2 + \frac{k \ell (k \ell - \ell)}{2} a_1^2)$$

$$= (k \ell a_1, k \ell b_1 + \frac{k \ell (k \ell - 1)}{2} a_1^2) = (k \ell) \cdot (a_1, b_1)$$

$$\textcircled{7} \quad (k + \ell) \circ (a_1, b_1) = ((k + \ell) a_1, (k + \ell) b_1 + \frac{(k + \ell)(k + \ell - 1)}{2} a_1^2)$$

$$= (k a_1 + \ell a_1, k b_1 + \ell b_1 + \frac{(k + \ell)^2 - (k + \ell)}{2} a_1^2)$$

$$= (k a_1 + \ell a_1, k b_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2 + \ell b_1 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} a_1^2 + k \ell a_1^2)$$

$$= (k a_1, k b_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2) \oplus (\ell a_1, \ell b_1 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} a_1^2)$$

$$= k \circ (a_1, b_1) \oplus \ell \circ (a_1, b_1)$$

$$\textcircled{8} \quad k \circ ((a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)) = k \circ (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2)$$

$$= (k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{k(k-1)}{2} (a_1 + a_2)^2)$$

$$= (k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2) + k a_1 a_2 + \frac{k^2(a_1 + a_2)^2}{2} - \frac{k(a_1^2 + a_2^2)}{2} - k a_1 a_2)$$

$$= (k(a_1+a_2), k(b_1+b_2) + \frac{k^2 a_1^2 - ka_1 + k^2 a_2^2 - ka_2 + 2k^2 a_1 a_2}{2})$$

$$= (k(a_1+a_2), kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2 + kb_2 + \frac{k(k-1)}{2} a_2^2 + k^2 a_1 a_2)$$

$$= (ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2) \oplus (ka_2, kb_2 + \frac{k(k-1)}{2} a_2^2)$$

$$= k \circ (a_1, b_1) \oplus k \circ (a_2, b_2)$$

因此，构成线性空间。

6) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：

$$k \circ \alpha = 0$$

解：因 $k \circ \alpha = 0$ ，则 $1 \circ \alpha = 0$ ，不满足第⑤条 $1 \circ \alpha = \alpha$ 。故不能构成线性空间。

7) 集合与加法同 6)，数量乘法定义为 $k \circ \alpha = \alpha$

解：由 $k \circ \alpha = \alpha$ ，则 $(k+l) \circ \alpha = \alpha$ 而 $k \circ \alpha + l \circ \alpha = \alpha + \alpha$ 。故不满足第⑦条。因此不能构成线性空间。

8) 全体正实数 R^+ ，加法与数量乘法定义为： $a \oplus b = ab$ ，

$$k \circ \alpha = a^k$$

解：据定义可看出对加法和数量乘法是封闭的，而正实数 R^+ 据所给定义的运算满足下面八条规则：

$$\textcircled{1} \quad a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$$

$$\textcircled{2} \quad (a \oplus b) \oplus c = ab \oplus c = abc = a \oplus bc = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\textcircled{3} \quad a \oplus 1 = a \cdot 1 = a \quad (\text{即存在零向量为 } 1)$$

$$\textcircled{4} \quad a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (\text{即任意元素 } a \text{ 有负元素为 } \frac{1}{a})$$

$$\textcircled{5} \quad 1 \circ a = a^1 = a$$

$$⑥ \quad k_0(l_0a) = k_0a \stackrel{l}{=} a \stackrel{l}{=} a \stackrel{k}{=} a \stackrel{k}{=} (kl)_0a$$

$$⑦ \quad (k+l)_0a = a \stackrel{k+l}{=} a \stackrel{k}{=} a \stackrel{l}{=} a \stackrel{k}{=} a \oplus a \stackrel{l}{=} k_0a \oplus l_0a$$

$$⑧ \quad k_0(a \oplus b) = k_0ab = (ab)^k = a^k b^k = a^k \oplus b^k = k_0a \oplus k_0b$$

因此，能构成线性空间。

4. 在线性空间中证明 1) $k0=0$, 2) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$

证：1) $k0+k\alpha=k(0+\alpha)=k\alpha$ 。两端同加 $-k\alpha$, 则得 $k0=0$ 。

2) $k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta)$ 。因此，要证明结论只要证明 $k(-\beta)=-k\beta$ 。

$k(-\beta)+k\beta=k(-\beta+\beta)=k0=0$ (由 1)) 。这表明 $k(-\beta)$ 是 $k\beta$ 的负元素，即 $k(-\beta)=-k\beta$ 。

5. 证明：在实函数空间中 $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 是线性相关的。

证： $\because \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ ，据线性相关定义，如果向量组中一向量可以经其余向量线性表出，则它们相关。因此 $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 在实函数空间中线性相关。

6. 如果 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 是线性空间 $P(x)$ 中三个互素的多项式，但其中任意

证：用反证法。设它们线性相关。那么，不妨设 f_3 可经 f_1 与 f_2 线性表出。即 $f_3(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 。由题设， f_1, f_2 不互素，则 $(f_1, f_2) = d(x)$ ，而 $\partial d(x) \geq 1$ 。由上式 $d(x) | f_3(x)$ ，从而 $d(x)$ 成为 f_1, f_2, f_3 的公因式。这与 f_1, f_2, f_3 互素矛盾。

7. 在 P^4 中，求向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标，设：

$$1) \quad \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1),$$

$$\varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1),$$

$$\xi = (1, 2, 1, 1)$$

解：设 $\xi = k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + k_3 \varepsilon_3 + k_4 \varepsilon_4$ 代入得：

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 2 \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 1 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 1 \end{cases} \quad \text{可写成矩阵的形式}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore k_4 = -\frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_1 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \xi \text{ 在基 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \text{ 下的坐标为: } \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

$$2) \varepsilon_1 = (1, 1, 0, 1), \varepsilon_2 = (2, 1, 3, 1), \varepsilon_3 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon_4 = (0, 1, -1, -1) \quad \xi = (0, 0, 0, 1)$$

$$\text{解：设 } \xi = k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + k_3 \varepsilon_3 + k_4 \varepsilon_4 \text{ 代入得：} \begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_2 - k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 - k_4 = 1 \end{cases}$$

写成矩阵形式有：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore k_4=0, k_3=-1, k_2=0, k_1=0$$

$\therefore \xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为: $(1, 0, -1, 0)$

8. 求下列线性空间的维数与一组基:

1) 数域 P 上的空间 $P^{n \times n}$;

2) $P^{n \times n}$ 中全体对称 (反对称, 上三角) 矩阵作成的数域

P 上的空间;

3) 第 3 题 8) 中的空间。

4) 实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间, 其

中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } 1) \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots \xi_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是 n^2 个线性无关的向量, $P^{n \times n}$ 的任一向量都可由上述向量线性

表出, $\therefore P^{n \times n}$ 的维数 $= n^2$, 上述 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n^2}$ 是此线性空间的一组基。

$$2) \text{ 对称矩阵: } E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad E_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

这组向量 $E_{ij} (i \leq j, i, j=1, 2, \dots, n)$ 是线性无关的, 而且每一对称矩阵是它们的线性组合。它们是一组基。维数 $= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

$$F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$$

$$\text{反对称矩阵 } J_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdots J_{n-1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = -a_{ji}$ 主对角线上为零, 即 $J_{ij} (i < j, i, j=1, 2, \dots, n)$ 是线性无关的, 而且每个反对称矩阵是它们的线性组合, 所以它们是一组基。

$$\text{维数} = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{上三角矩阵: } Q_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdots Q_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

它们是线性无关的, 而且每一个上三角矩阵都可由它们线性表出, $\therefore$ 它们是一组基, 维数 $= \frac{n(n+1)}{2}$ 。

3) $\therefore$ 任一正实数都可被一不为 1 的正实数的方幂 (这个方幂的

指数是一个实数)表示出来。对这个空间来说,就是任一正实数可被一不为1的正实数的倍数表示出来。故是一维的。

$$4) \text{ 实数域上, 由矩阵 } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

4) 注意到 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 是1的三次单位根, 即 $\omega^3=1$ 。因此

$A^3=E$ 。从而任 A^k 只能是 E , 或 A 或 A^2 。因此, A 的任意的多项式 $f(A)$ 必可由 E, A, A^2 线性表出。

现在, 进一步证明 E, A, A^2 是这空间中的线性无关组。设

$$k_0 E + k_1 A + k_2 A^2 = 0$$

$$\text{由此得: } \begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 = 0 \\ k_0 + \omega k_1 + \omega^2 k_2 = 0 \\ k_0 + \omega^2 k_1 + \omega k_2 = 0 \end{cases} \text{ 其系数行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = (1-\omega)^2 \neq 0$$

故只有零解 $k_0=k_1=k_2=0$, 这即表明 E, A, A^2 线性无关。而一切

$f(A)$ 又都可由它线性表出。故 E, A, A^2 是此空间的一组基。从而此空间是三维的。

2. 在 P^4 中, 求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 ξ 在所指基下的座标。设

$$1) \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \begin{cases} \eta_1 = (2, 1, -1, 1) \\ \eta_2 = (0, 5, 1, 0) \\ \eta_3 = (5, 3, 2, 1) \\ \eta_4 = (6, 6, 1, 3) \end{cases} \begin{cases} \xi = (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases} \text{ 在 } \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \text{ 下} \\ \text{的座标}$$

解: 过渡矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1' = \frac{4}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 - \frac{11}{9}x_4 \\ x_2' = \frac{1}{27}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{23}{27}x_4 \\ x_3' = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_4' = -\frac{7}{27}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{27}x_4 \end{cases}$$

ξ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的座标为: x_1', x_2', x_3', x_4'

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0) \\ \varepsilon_2 = (1, -1, 1, 1) \\ \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1) \\ \varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1) \end{cases} \begin{cases} \eta_1 = (2, 1, 0, 1) \\ \eta_2 = (0, 1, 2, 2) \\ \eta_3 = (-2, 1, 1, 2) \\ \eta_4 = (1, 3, 1, 2) \end{cases} \xi = (1, 0, 0, 0) \text{ 在 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \text{ 下的座标}$

$$\text{解: } A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

过渡矩阵: $A_\eta = A_\varepsilon^{-1} A_\xi \quad \eta = A_\varepsilon^{-1} A_\xi \eta$

$$A = A_\varepsilon^{-1} A_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A_\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的座标为: $(\frac{3}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-2}{13}, \frac{-3}{13})$

$$8) \begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1) \\ \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1) \\ \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1) \end{cases} \begin{cases} \eta_1 = (1, 1, 0, 1) \\ \eta_2 = (2, 1, 3, 1) \\ \eta_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \eta_4 = (0, 1, -1, -1) \end{cases}$$

$\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标。

解：

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{4} A_\varepsilon$$

过渡矩阵：

$$A = A_\varepsilon^{-1} A_\eta = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 17 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_\eta^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A_\eta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1/4 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix} \quad \therefore \xi \text{ 在基 } \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \text{ 下的坐标为：} \\ (-2, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2})$$

10. 继第9题1)，求一非零向量 ξ ，它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标。

解：设 $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ ， $\xi = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 + x_4 \varepsilon_4 = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 + x_4 \eta_4$

$$\therefore x_1(\eta_1 - \varepsilon_1) + x_2(\eta_2 - \varepsilon_2) + x_3(\eta_3 - \varepsilon_3) + x_4(\eta_4 - \varepsilon_4) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & x_1 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ & x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $x_1 = -x_4, x_2 = -x_4, x_3 = -x_4 \therefore \xi$ 在两组基上的座标为:

$$(-1, -1, -1, 1)$$

11、证明：实数域作为它自身上的线性空间与第3题8)中的空间同构。

证：实数域作为它自身上的线性空间显然是一维的。第8题3)中已证明了第3题8)中的空间是一维的，那么，根据定理12，它们是同构的。

12、设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1 \subset V_2$ ，证明：如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1 = V_2$ 。

证：设 $\dim V_1 = \dim V_2 = S$ ，在 V_1 中取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_S$ ，因为 $V_1 \subset V_2$ ，故 $\varepsilon_i \in V_2 (i=1, 2, \dots, S)$ 又因 V_2 也是 S 维的，故 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_S$ 也是 V_2 的一组基，即 V_1, V_2 有一共同的基组，因而必然 $V_1 = V_2$ 。

13、设 $A \in P^{n \times n}$ ，1) 证明：全体与 A 可交换的矩阵组成 $P^{n \times n}$ 的子空间，记作 $G(A)$ 。

2) 当 $A=E$ 时，求 $G(A)$

3) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 时, 求 $C(A)$ 的维数和一组基。

解: 1) 设 B_1, B_2 , 是与 A 可交换的任意两个矩阵, 则

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1 + B_2)A \quad \text{即 } B_1 + B_2 \in C(A)$$

$$\text{又设 } k \in P, (kB_1)A = kAB_1 = A(kB_1) \quad \text{即 } kB_1 \in C(A)$$

因此 $C(A)$ 是 $P^{n \times n}$ 的一个子空间。

2) 因 $A = E$, 故与 A 可交换的即是与 E 可交换的。但任意 $n \times n$ 矩阵都与 E 可交换。故 $C(A) = P^{n \times n}$ 。

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix}$ 那么, 与 A 可交换的矩阵恰是全体对角矩阵

(根据第4章第5题)。因此 $C(A)$ 为 n 维。它有如下的一组基:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

14. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 $P^{3 \times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子

空间的维数和一组基。

解: 设 $P^{3 \times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子空间中任一矩阵 B 。

$$B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x_{11} + 3x_{13} & x_{12} + x_{13} & 2x_{13} \\ x_{21} + 3x_{23} & x_{22} + x_{23} & 2x_{23} \\ x_{31} + 3x_{33} & x_{32} + x_{33} & 2x_{33} \end{pmatrix} \quad \text{由 } AB=BA \text{ 得:}$$

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} + 3x_{13} & \therefore x_{13} = 0, \quad x_{23} = 0 \\ x_{12} = x_{12} + x_{13} & x_{31} = -3x_{11} - x_{21} + 3x_{33} \\ x_{21} = x_{21} + 3x_{23} & x_{32} = -3x_{12} - x_{22} + x_{33} \\ x_{22} = x_{22} + x_{23} & \therefore \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} = x_{31} + 3x_{33} & \\ 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} = x_{32} + x_{33} & B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ -3x_{11} - x_{21} + 3x_{33} & -3x_{12} - x_{22} + x_{33} & x_{33} \end{pmatrix} \\ 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} = 2x_{33} & \end{cases}$$

因此，该子空间是 5 维的。它的一组基是：

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15、如果 $C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma = 0$ ，且 $C_1C_3 \neq 0$ ，证明：

$$L(\alpha, \beta) = L(\beta, \gamma)$$