

全国中小学教师继续教育

教材

逻辑与小学数学教学

教育部师范教育司组织评审

金成梁 编著

LOGIC YU XIAOXUE
SHUXUE JIAOXUE

北京师范大学出版社



中小学教师继续教育教材

逻辑与小学数学教学

金成梁 编著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

逻辑与小学数学教学/金成梁编著. —北京:北京师范大学出版社, 2001. 9
中小学教师继续教育教材
ISBN 7-303-05726-9

I. 逻… II. 金… III. 数学课-教学研究-小学-师资培训-教材 IV. G623.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 19200 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

出版人:常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:8.625 字数:215 千字

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

印数:1~5 000 册 定价:11.00 元

前 言

全面推进素质教育，是当前我国现代化建设的一项紧迫任务，是我国教育事业的一场深刻变革，是教育思想和人才培养模式的重大进步。实施“中小学教师继续教育工程”，提高教师素质，是全面推进素质教育的根本保证。

开展中小学教师继续教育，课程教材建设是关键，当务之急是设计一系列适合中小学各学科教师继续教育急需的示范性课程，编写一批继续教育教材。在教材编写方面，我司采取了以下几种做法：

(1) 组织专家对全国各省（区市）推荐的中小学教师继续教育教材进行评审，筛选出了 200 余种可供教师学习使用的优秀教材和学习参考书；

(2) 组织专门的编写队伍，编写了 61 种教材，包括中小学思想政治、教育法规、教育理论、教育技术等公共必修课教材；中小学语文、数学，中学英语、物理、化学、生物，小学社会、自然等学科专业课教材。上述教材，已经在 1999 年底以《全国中小学教师继续教育 1999 年推荐用书目录》（教师司 [1999] 60 号）的形式向全国推荐。

(3) 向全国 40 余家出版社进行招标，组织有并专家对出版社投标的教材编写大纲进行认真的评审和筛选，

初步确定了200余种中小学教师继续教育教材。这批教材，目前正在编写过程中，将于2001年上半年陆续出版。我们将陆续向全国教师进修院校、教师培训基地和中小学教师推荐，供开设中小学教师继续教育相关课程时选用。

在选择、设计和编写中小学教师继续教育教材过程中，我们遵循了以下原则：

1. 从教师可持续发展和终身学习的战略高度，在课程体系，加强了反映现代教育思想、现代科学技术发展和应用的课程。

2. 将教育理论和教师教育实践经验密切结合，用现代教育理论和方法、优秀课堂教学范例，从理论和实践两个方面，总结教学经验，帮助教师提高实施素质教育的能力和水平。

3. 强调教材内容的科学性、先进性、针对性和实效性，并兼顾几方面的高度统一。从教师的实际需要出发，提高培训质量。

4. 注意反映基础教育课程改革的新思想和新要求，以使教师尽快适应改革的需要。

中小学教师继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各地在使用教材的过程中，有什么问题和意见，请及时告诉我们，以便改进工作，不断加强和完善中小学教师继续教育教材体系建设。

教育部师范教育司

2000年11月1日

目 录

第一章 引论	(1)
§ 1.1 数学与逻辑	(1)
§ 1.2 逻辑学的对象和性质	(4)
§ 1.3 逻辑学的产生和发展	(7)
§ 1.4 学习逻辑学的意义和方法	(10)
习题一	(13)
第二章 概念	(17)
§ 2.1 属性和概念	(17)
§ 2.2 概念和语词	(20)
§ 2.3 概念的外延与内涵	(23)
§ 2.4 概念的种类	(24)
§ 2.5 概念间的关系	(29)
§ 2.6 概念的定义	(36)
§ 2.7 概念的划分	(41)
习题二	(46)
第三章 简单判断	(56)
§ 3.1 判断概述	(56)
§ 3.2 性质判断的结构和种类	(59)
§ 3.3 概念的外延关系和性质判断	(61)

§ 3.4 关系判断的结构和关系的逻辑特征	
.....	(66)
习题三	(70)
第四章 复合判断	(73)
§ 4.1 复合判断及其永真性的检验	(73)
§ 4.2 原命题、逆命题、否命题和逆否命题	
.....	(78)
§ 4.3 充分条件、必要条件和充要条件	... (85)
习题四	(90)
第五章 简单判断的演绎推理	(99)
§ 5.1 推理概述	(99)
§ 5.2 直接推理	(101)
§ 5.3 三段论	(107)
§ 5.4 关系推理	(116)
习题五	(119)
第六章 复合判断的演绎推理	(124)
§ 6.1 联言推理	(124)
§ 6.2 选言推理	(127)
§ 6.3 假言推理	(132)
§ 6.4 纯假言推理	(135)
§ 6.5 假言选言推理	(139)
习题六	(146)
第七章 归纳推理和类比推理	(154)
§ 7.1 归纳推理	(154)
§ 7.2 类比推理	(159)

§ 7.3 应用举例	(161)
习题七	(166)
第八章 逻辑思维的基本规律	(169)
§ 8.1 逻辑思维基本规律概述	(169)
§ 8.2 同一律	(169)
§ 8.3 矛盾律	(171)
§ 8.4 排中律	(172)
习题八	(175)
第九章 证明与反驳	(178)
§ 9.1 证明概述	(178)
§ 9.2 直接证明	(181)
§ 9.3 间接证明	(184)
§ 9.4 证明的规则	(187)
§ 9.5 反驳	(189)
习题九	(192)
第十章 数理逻辑初步	(200)
§ 10.1 数理逻辑概述	(200)
§ 10.2 命题逻辑的初步讨论	(207)
§ 10.3 命题逻辑的演算系统	(221)
§ 10.4 谓词逻辑简介	(232)
习题十	(240)
习题答案	(242)
逻辑名词索引	(259)

第一章 引 论

§ 1.1 数学与逻辑

自从古希腊学者亚里士多德（公元前 384—前 322）创立逻辑学之后，它就和数学结下了不解之缘。二千多年来，逻辑学被广泛地用于发展数学。欧几里得（公元前 360—前 283）的《几何原本》就是从数学理论的逻辑关联性方面进行研究的著名的古典范例。逻辑严密性被认为是数学的三大特点之一。如果说其他自然科学家为了证明自己的论断，往往要借助于实验，那么数学家为了证明自己提出的猜想，则需经过严格的逻辑证明。

数学是逻辑知识用得特别多的一门科学，是最能促进学生逻辑思维发展的学科。在数学教学中，为了妥善地处理教材，体现教材内在的逻辑性，敏锐地觉察并及时纠正学生的逻辑错误，教师必须掌握逻辑学的基础知识。

例如，我们熟悉下面的推理，并且认定它们都是正确的：

$$\begin{array}{cc}
 a > b & a \geq b \\
 b > c & b \geq c \\
 \hline
 \text{所以 } a > c & \text{所以 } a \geq c
 \end{array}$$

可是，为什么推理

$$a \neq b$$

$$b \neq c$$

$$\text{所以 } a \neq c$$

就不对呢？（参看本书第 68 页）

又如，等量代换公理是众所周知的。因此，推理

$$a = b$$

$$a > b$$

$$b = c$$

$$b = c$$

$$\text{所以 } a = c$$

$$\text{所以 } a > c$$

都是正确的。但是，为什么下面的推理

$$300 \div 70 = 30 \div 7$$

$$30 \div 7 = 4 \cdots 2$$

$$\text{所以 } 300 \div 70 = 4 \cdots 2$$

却由正确的前提推出了错误的结论？为什么在 $300 \div 70 = 30 \div 7$ 中，“ $30 \div 7$ ”不能用“ $4 \cdots 2$ ”来代替？（参看本书第 90 页）正确的为什么正确呢？错误的错在哪里？要回答这些问题，不但需要相关的数学知识，还要有系统的逻辑知识。没有系统的逻辑基础知识，虽然一般情况下也还能做到正确思考，但不能保证不犯逻辑错误。有时，虽然感觉到学生犯了逻辑错误，但说不清楚错的原因。这样，也就无法引导学生认识错误，切实改正错误。

再看两个例子，关于推理

平行四边形的对角线互相平分

四边形 $ABCD$ 是平行四边形

所以 四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分

的正确性，我们是坚信不移的。而对于下面的推理

数学题是做不完的

这道题是数学题

所以 这道题是做不完的

我们又该怎样看待呢？问题究竟出在哪里？

下面是小学数学课堂教学中的一个真实的片断。“分数的意义”教学后，师生讨论了这样一道题：

教师：假设图 1-1 的三角形平面部分表示单位“1”，那么其中画了阴影线的部分能不能用“ $\frac{1}{3}$ ”表示？

学生：不能。

教师：为什么？

学生：因为不是平均分。

对此，教师表示认可。问题在于：“图形没有平均分成 3 份”能否成为“图中画阴影线的一部分不能用 $\frac{1}{3}$ 表示”的充足理由。如果阴影线画在中间的

一部分内，我们也能断定这一部分不能用 $\frac{1}{3}$ 表示吗？（图 1-2）

当我们指出小学生在这里犯了逻辑错误时，不少小学老师感到意外。并提出课堂上究竟应当如何处理的问题。（参看本书第 83 页）

“数学是思维的体操”。为了在数学教学中卓有成效地培养学生的思维能力，尤其是逻辑思维能力，一个首要的条件是不断提高教师的逻辑修养。

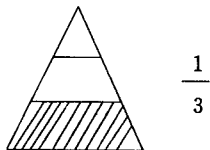


图 1-1

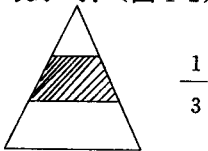


图 1-2

复习思考题

1. 数学和逻辑结下的“不解之缘”表现在哪些方面？
2. 为什么在数学教学中特别强调培养学生的思维能力，首先是逻辑思维能力？

§ 1.2 逻辑学的对象和性质

一、思维和思维科学

1. 逻辑学的研究对象是人类的思维。因此，逻辑学是一门思维科学。

“思维”是人脑的一种功能，是人脑对客观事物的本质和规律性的间接的、概括的反映。

人的认识过程可以分为感性认识与理性认识两个阶段。客观事物通过人的感官在人脑中产生的感觉、知觉和表象都属于感性认识阶段。感性材料经过人脑的加工提炼、改造制作，就会出现质的飞跃，由感性认识上升为理性认识，产生概念、判断和推理。思维就是人脑产生概念、判断、推理的理性认识活动。

由于感性认识反映的是具体事物某些方面的表面现象，因而具有直观性、片面性和表面性等特点。感性认识经过人脑的分析、综合、抽象、概括后，从个别事物中概括出一般的东西，从直接感知的性质中引申出内在的本质，从各种具体的关系中概括出规律性的联系，从而使思维，即理性认识，具有概括性和间接性的特征。

2. 思维科学除逻辑学外，还有哲学认识论、神经生理学、语言学、控制论、信息论和心理学等学科。

近代哲学的一个基本问题是思维与存在的关系问题：

在思维与存在中，何者是第一性的？

思维能否正确反映现实世界？

辩证唯物主义认识论科学地阐明了思维与存在的关系。认为：

存在是第一性的，思维是第二性的；

现实世界是可以认识的。

辩证唯物主义认识论是各门思维学科研究思维的哲学基础和指导思想。

3. 神经生理学研究思维的生理机制，探索大脑活动的规律和本质，揭示人类思维产生的物质基础。

4. 语言学研究语言同思维的关系，以及它们的相互依存性和差异。如词和概念、句和判断、句的连结和推理以及语法结构和思维规律的关系和区别。研究如何通过丰富儿童的语言来发展他们的思维，如何通过发展思维来充实他们的语言。事实上，思维是通过语言表达出来的。思维只有在语言的基础上才能产生和存在。没有语言就无法理解思维的内容。

5. 信息论是研究信息的计量、传输、接收、变换和存贮的一门学科。通常的语言、文字、图象、图表、计算机代码以及广播电视信号等都是信息。一些科学家还把信息论用于生物学、神经生理学和语言学，运用信息论的原理去设计和制造各种智能处理设备。

6. 控制论是研究各种系统的控制和调节的一般规律的学科。控制论的基本概念是信息和反馈。它的一个分支“智能控制论”（又称“人工智能”）研究如何建立神经系统的模型，以模拟人的记忆、学习和思维。研究如何识别图形和声音、理解短文、翻译文献、开医疗处方等。人工智能的技术进一步揭示了思维活动的机制和原理。

7. 心理学是研究人的心理、行为及其规律的学科。思维是一种心理现象，心理学从心理现象的角度来研究思维过程，研究思

维发生、发展的规律。从而帮助我们制定培养思维能力的具体措施。

思维是智力的核心。科学的发展史也是一部思维的发展史。通过思维，人们认识了客观世界的真实情况和发展规律，也逐步认识了人类的思维本身，从而导致思维科学的产生。将思维科学的成果用于计算机技术而制成的人工智能机，将把人类从繁重的脑力劳动中解放出来，使之转而用于创造性的工作。

二、逻辑学的研究对象

逻辑学又称“形式逻辑”或“普通逻辑”，是研究思维形式及其规律的科学。逻辑学的产生，意味着人们把自己的思维变成了研究的对象。

思维有内容和形式两方面。人们的思维活动，尽管具体内容多种多样，但基本的思维形式只有三种：概念、判断和推理。它们是从内容不同的具体思维中抽象出来的一般形式，反映其组成要素之间的联系的方式。逻辑学研究这些思维形式以及逻辑思维的基本规律——同一律、矛盾律和排中律，从而为人们提供认识和论证的工具，帮助人们准确地表达思想和正确地认识客观世界。

三、逻辑学的学科性质

“逻辑”一词是音译的产物，译自希腊文。词的原意主要是指思想、理性、规律性等。古希腊学者用它表示“研究推理、论证的学问”。以前，我国曾将这门学科的名称意译为“论理学”、“理则学”、“名学”、“辨学”等。但它们对意义的表示都有失偏颇，因此，后来一直采用音译“逻辑”。

逻辑学是一门工具性学科。它为人们认识事物、表达和论证思想提供了必要的逻辑工具。

逻辑是认识事物的工具。运用逻辑推理，可以根据已有的知

识获得新的知识。恩格斯曾经说过：“甚至形式逻辑也首先是探寻新结果的方法，由已知进到未知的方法……”（《反杜林论》，人民出版社1970年12月版第132页）科学史上许多重大的发现，都是首先通过推理得出的，然后才在实践中得到证实。

例如，1845年，法国天文学家勒威耶（公元1811—1877）和英国天文学家亚当斯（公元1819—1892）根据我们这个太阳系中已知的几颗行星运行情况的“反常”，推测在它们的外面可能还有一颗更远的行星。并且推算出那一颗当时还不知道的行星的位置。第二年，德国柏林天文台终于在推算的位置找到了这颗行星。这就是被人们戏称为“笔尖上发现的天体”——海王星。海王星的发现，不仅显示了数学和天文学的威力，也显示了逻辑学的巨大威力。

逻辑学不仅是认识的工具，也是论证的工具和表达思想的工具。学习和掌握逻辑知识，有助于我们在想问题、说话和写作时，遵守应当遵守的规则，做到概念明确、判断恰当、推理合乎逻辑、论证有说服力。从而使思想内容清楚、明确、有条理、结构严谨、前后一贯和论证有据，使思维活动循着正确的道路前进。

复习思考题

1. 什么是逻辑学？
2. 怎样认识逻辑学的学科性质？

§ 1.3 逻辑学的产生和发展

一、逻辑学的产生

逻辑学是一门源远流长的古老学科。早在二千多年前，古代学者就已经根据人类的实践和思维经验，研究了思维的形式及其

规律，形成了各自的逻辑学说。

我国春秋时代，墨子（约公元前 480—前 420）和他的后继者，对概念、判断、推理作了系统研究，并制定了推理的基本原则。他们为探讨论辩的方法与技巧而创立的“名辩之学”，就是中国古代的逻辑学。

公元前 5 世纪前后，印度学者在研究和总结论辩的方术的过程中，产生了被称之为“因明”的古代印度的逻辑学。“因明”的“明”是指学问，“因”是指原因、根据、理由。“因明”是指探求原因、理由的学问，也就是关于说理、论辩的学问。唐代高僧玄奘（约公元 600—664）到印度取经时，因明传入我国。

古代希腊是西方逻辑学的发祥地。公元前 5~4 世纪，哲学家德漠克里特（约公元前 460—前 370）、苏格拉底（约公元前 469—前 399）、柏拉图（约公元前 427—前 347）等人开始研究逻辑问题。亚里士多德（公元前 384—前 322）总结了前人的逻辑研究成果，并且从当时的数学（特别是几何学）研究中所达到的高水平的逻辑思维中吸取营养，对概念、判断和推理的种类和形式进行了系统地研究。制定了三段论的基本规则，提出并讨论了形式逻辑的基本规律，奠定了演绎逻辑的基础，建立了逻辑史上的第一个形式逻辑体系。亚里士多德被认为是逻辑学的创始人。他的逻辑著作《工具论》，是古代最为完备的一部逻辑著作。

二、逻辑学的发展

16~17 世纪，随着资本主义生产方式的发展，英国唯物主义者、经验科学的奠基人培根（公元 1561—1626）从实验科学的研究中总结出判定现象间的因果关系的归纳学说，建立了归纳逻辑的基础。我国著名数学家华罗庚（公元 1910—1985）说过：近代科学的突飞猛进有两大基础。“一个基础是从尽可能少的假定出发，凭逻辑推理，解释尽可能多的问题。”这是指演绎逻辑。“另

一个基础是作系统的科学实验，也能找出客观的因果联系。”这里指的是归纳逻辑。

17~18 世纪，德国哲学家和数学家莱布尼兹（公元 1646—1716）在研究数学证明时，第一次尝试把字母演算的思想推广到逻辑中去，成为数理逻辑的创始人。19 世纪以来，英国的布尔（公元 1815—1864）、德·摩根（公元 1806—1876）、德国的弗雷格（公元 1848—1925）和英国的罗素（公元 1872—1970）等人为数理逻辑的建立和完善作出了有决定意义的贡献。数理逻辑的建立，是逻辑学发展史上又一个重要的里程碑。

在一定的意义上，可以说数理逻辑是传统的形式逻辑的进一步发展。但它代表一种新的倾向，要求系统地使用符号和公式语言，以及将逻辑思维转换为计算过程。因而能解决许多原来无法解决的问题。

在 20 世纪，数理逻辑得到了迅速的发展和多方面的应用。它的研究对象已经远远超出了古典的形式逻辑的范围，深入到数学、语言学、控制论和哲学等领域。它的研究不仅涉及许多原来无法解决的逻辑问题和数学问题，而且涉及计算机科学和人工智能、自动控制和机器翻译等问题，为它们提供了强有力的思维技术和理论武器。数理逻辑已经成为一门内容十分丰富的学科，在理论上和实践上日益显示出它的重要性。

复习思考题

1. 逻辑学在几个文明古国中是怎样产生的？
2. 逻辑学的发展大致经历了哪几个阶段？