大学物理实验

朱献松 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学物理实验

朱献松　　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是以天津科技大学多年使用的物理实验讲义为基础修订和改编的物理实验教材。全书共分五章:第一章阐述了测量误差及数据处理基础知识;第二、三、四、五章收入了27个实验选项,包含力学和热学、电磁学、光学、近代物理四个方面的内容,其中一些是综合性、应用性和设计性的实验。在不少实验选项中还安排了相应的设计课题,以供学生思考。

本书可作为高等工科类专业的物理实验教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/朱献松主编.—天津:天津大学出版社,2007.2

ISBN 978-7-5618-2396-5

Ⅰ.大... Ⅱ.朱... Ⅲ.物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020345 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址	www.tjup.com
短信网址	发送“天大”至916088
印　　刷	迁安万隆印刷有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	8.75
字　　数	219千
版　　次	2007年2月第1版
印　　次	2007年2月第1次
印　　数	1-4 000
定　　价	15.00元

前　言

本书是根据教育部颁发的《非物理类理工学科大学物理实验课程教学基本要求》，以天津科技大学多年使用的物理实验讲义为基础修订和改编的物理实验教材。

为了反映近年来国内在物理实验教学改革和物理实验仪器开发方面所取得的成果，充分发挥物理实验课在学生素质培养中所起的作用，在这次修订和改编中，删除了5个已不开设的实验项目，新增加了电表改装与校正、用霍尔元件测磁场、光偏振现象的研究、超声声速及空气绝热系数的测量、悬丝耦合弯曲共振法测定金属材料杨氏模量和传感器实验等6个选项。其中既有加强基本训练的普通物理实验，也有近代物理和综合性、应用性实验；电表改装与校正是作为简单设计性实验编入的。对于一些新添实验的阐述，在博采众家之长的同时，还融入了我们研讨的成果。对于保留的部分实验选项，从内容到数据处理也作了必要的修改和补充。

书中编入的27个实验选项都是天津科技大学正在或即将开设的。教学中可按教学时数和教学要求选做其中部分实验。

本次修订和改编是在天津科技大学理学院领导下，由物理教研室组织进行的。全书主体内容由朱献松修订和改编。在修订和改编中，参加研讨的教师还有马雪花、安力群、王宏志、蒋新元、孔林涛和郭慧梅。教研室和实验室的大部分教师和技术人员参加了绘图和电子版的制作。秦月婷承担了本书大部分的校对及部分图表的修改任务。

作为本书编写基础的原实验讲义凝聚了几代教师和实验技术人员的心血。无论是现在的修订和改编，还是以后的调整、更新和扩充，都不应忘记他们的功绩。

编写教材是一件严肃认真的工作。为了教材的科学性，在编写过程中，我们翻阅了大量的参考资料，最终更多的是借鉴了丁慎训、张连芳主编的《物理实验教程》，王惠棣等编的《物理实验》，张兆奎等主编的《大学物理实验》和钟鼎主编的《大学物理实验》中的科学论述，吸取了其中的精华。为此，我们要感谢这些书的作者，并向他们致以崇高的敬意。

修订和改编是一项艰苦又复杂的任务，缺点和错误在所难免，编者敬请使用本教材的教师、同学和读者提出宝贵意见。

编者

2007年1月

目　录

绪　论

物理学本质上是一门实验科学。物理实验是科学实验的先驱，体现了大多数科学实验的共性，在实验思想、实验方法以及实验手段等方面是各学科科学实验的基础。

物理实验课是高等理工科院校对学生进行科学实验基本训练的必修基础课程，是本科生接受系统实验方法和实验技能训练的开端。

物理实验课覆盖面广，具有丰富的实验思想、方法、手段，同时能提供综合性很强的基本实验技能训练，是培养学生科学实验能力、提高科学素质的重要基础。它在培养学生严谨的治学态度、活跃的创新意识、理论联系实际和适应科技发展的综合应用能力等方面具有其他实践类课程不可替代的作用。

物理实验课的任务：

(1)培养学生的基本科学实验技能，提高学生的科学实验基本素质，使学生初步掌握实验科学的思想和方法。培养学生的科学思维和创新意识，使学生掌握实验研究的基本方法，提高学生的分析能力和创新能力。

(2)提高学生的科学素养，培养学生理论联系实际和实事求是的科学作风，认真严谨的科学态度，积极主动的探索精神，遵守纪律、团结协作、爱护公共财产的优良品德。

(3)通过对物理实验现象的观测和分析，学会运用理论指导实验，分析和解决实验中存在的问题，从理论和实际的结合上加深对理论的理解。

(4)物理实验课的任务还包括使学生掌握基本物理量的测量方法和实验操作的技能；正确记录和处理数据，分析实验结果和撰写实验报告；自行设计和完成某些不太复杂的实验任务等等。

(5)物理实验课要培养学生勇于探索、坚韧不拔的钻研精神，以及遵守纪律、团结协作、爱护公物的优良品德。

教学内容基本要求：

(1)掌握测量误差的基本知识，具有正确处理实验数据的基本能力。掌握测量误差与不确定度的基本概念，能逐步学会用不确定度对直接测量和间接测量的结果进行评估；掌握处理实验数据的一些常用方法，包括列表法、作图法和最小二乘法等。随着计算机及其应用技术的普及，还应掌握用计算机通用软件处理实验数据的基本方法。

(2)掌握基本物理量的测量方法。例如：长度、质量、时间、热量、温度、湿度、压强、压力、电流、电压、电阻、磁感应强度、光强度、折射率、电子电荷、普朗克常量等常用物理量及物性参数的测量，注意加强数字化测量技术和计算技术在物理实验教学中的应用。

(3)掌握常用的物理实验方法，并逐步学会使用。例如：比较法、转换法、放大法、模拟法、补偿法、平衡法和干涉、衍射法，以及在近代科学研究和工程技术中广泛应用的其他方法。

(4)掌握实验室常用仪器的性能，并能够正确使用。例如：长度测量仪器、计时仪器、测温仪器、变阻器、电表、交/直流电桥、通用示波器、低频信号发生器、分光仪、光谱仪、常用电源和光源等常用仪器。

(5)掌握常用的实验操作技术。例如:零位调整、水平/铅直调整、光路的共轴调整、消视差调整、逐次逼近调整、根据给定的电路图正确接线、简单的电路故障检查与排除,以及在近代科学研究与工程技术中广泛应用的仪器的正确调节。

(6)适当介绍物理实验史料和物理实验在现代科学技术中的应用知识。

能力培养基本要求:

(1)独立实验的能力——能够通过阅读实验教材,查询有关资料和思考问题,掌握实验原理及方法,做好实验前的准备;正确使用仪器及辅助设备,独立完成实验内容,撰写合格的实验报告;培养学生独立实验的能力,逐步形成自主实验的基本能力。

(2)分析与研究的能力——能够融合实验原理、设计思想、实验方法及相关的理论知识,对实验结果进行分析、判断、归纳与综合。掌握通过实验进行物理现象和物理规律研究的基本方法,具有初步的分析与研究的能力。

(3)理论联系实际的能力——能够在实验中发现问题、分析问题并学习解决问题的科学方法,逐步提高学生综合运用所学知识和技能解决实际问题的能力。

(4)创新能力——能够完成符合规范要求的设计性、综合性内容的实验,进行初步的具有研究性或创意性内容的实验,激发学生的学习主动性,逐步培养学生的创新能力。

物理实验课的主要教学环节:

为达到物理实验课的目的,学生应重视物理实验教学的三个重要环节。

(1)实验预习。课前要仔细阅读实验教材或有关的资料,基本弄懂实验所用的原理和方法,并学会从中整理出主要实验条件、实验关键及实验注意事项,根据实验任务画好记录数据的表格。有些实验还要求学生课前自拟实验方案,自己设计线路图,自拟数据表格等。因此,课前预习的好坏是实验中能否取得主动的关键。

(2)实验操作。学生进入实验室后应遵守实验室规则,按照一个科学工作者那样要求自己。井井有条地布置仪器,安全操作仪器,注意细心观察实验现象,认真钻研和探索实验中的问题。不要期望实验工作会一帆风顺,在遇到问题时,应看做是学习的良机,冷静地分析和处理问题。仪器发生故障时,也要在老师指导下学习排除故障的方法。要将重点放在实验能力的培养上,而不是测出几个数据就以为完成了任务。

(3)实验总结。实验后对实验数据及时进行处理。如果原始记录删改较多,应加以整理,对重要的数据要重新列表。数据处理过程包括计算、作图、误差分析等。计算要有计算式(或计算举例),代入的数据都要有根据,便于别人看懂,也便于自己检查。作图要按作图规则进行,图线要规范、美观。数据处理后应给出实验结果。最后要求撰写出一份简洁、明了、工整、有见解的实验报告。

第一章　测量误差及数据处理的基础知识

1.1　测量的误差

1.1.1　误差的分类

物理实验是以测量为基础的。研究物理现象、了解物质特性、验证物理原理都要进行测量。测量分直接测量和间接测量。“直接测量”指无需对被测的量与其他实测的量进行函数关系的辅助计算而直接测出被测量的量。例如用米尺测物体的长度，用天平和砝码测物体的质量，用电流计测线路中的电流，都是直接测量。“间接测量”指利用直接测量的量与被测的量之间已知的函数关系，从而得到该被测量的量。例如测物体密度时，先测出该物体的体积和质量，再用公式算出物体的密度。在物理实验中进行的测量，有许多是间接测量。

实践证明，测量结果都存在误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。因为任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等都不能做到绝对严密，这些就使测量不可避免地伴随有误差产生。因此分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响，并对测量结果中未能消除的误差作出估计，是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。为此必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估计方法等有关知识。

测量误差就是测量结果与被测量的真值(或约定真值)之间的差值，测量误差的大小反映了测量结果的准确程度。测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示。

$$\text{绝对误差} = \text{测量结果} - \text{被测量的真值}$$

$$\text{相对误差 } E = \frac{\text{测量的绝对误差}}{\text{被测量的真值}}\text{(用百分数表示)}$$

被测量的真值是一个理想概念，一般说来实验者对真值是不知道的，在实际测量中常用被测量的实际值或已修正过的算术平均值来代替真值，称为约定真值。

测量中的误差主要分为两种类型，即系统误差和随机误差。它们的性质不同，需分别处理。

1.1.2　系统误差

系统误差是指在多次测量同一被测量的过程中，保持恒定或以可预知方式变化的测量误差的分量。例如实验装置和实验方法没有(或不可能)完全满足理论上的要求，有的仪器没有达到应有的准确程度，环境因素(温度、湿度等)没有控制到预计的情况等。只要这些因素与正确的要求有所偏离，那么在测量结果中就会出现其绝对值和符号均为恒定的或以可预知方式变化的误差分量。因素不变，系统误差也就不变。

例如用停表测量运动物体通过某段路程所需的时间，若停表走得较快，那么即使测量多次，测得的时间总会偏大，而且总是偏大一个固定的量，这就是仪器不准确造成的。又如用落

球法测重力加速度时，由于空气阻力的影响，得到的结果总是偏小，这就是测量方法不完善造成的。

对实验中的系统误差应如何处理呢？可以通过校准仪器，改进实验装置和实验方法，或对测量结果进行理论上的修正加以消除或尽可能减小。发现和减小实验中的系统误差通常是一项困难任务，需要对整个实验所依据的原理、方法、测量步骤及所用仪器等可能引起误差的各种因素一一进行分析。一个实验结果是否正确，往往就在于系统误差是否已被发现和尽可能消除，因此对系统误差不能轻易放过。

1.1.3 随机误差

随机误差是指在多次测量同一被测量的过程中绝对值和符号以不可预知的方式变化着的测量误差的分量。这种误差是实验中各种因素的微小变动性引起的。例如实验装置和测量机构在各次调整操作上的变动性，测量仪器指示数值的变动性，以及观测者本人在判断和估计读数上的变动性等等，这些因素的共同影响就使测量值围绕着测量的平均值发生有涨落的变化，该变化量就是各次测量的随机误差。就某一测量值来说随机误差的出现是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的。常见的一种情况是：正方向误差和负方向误差出现的次数大体相等，数值较小的误差出现的次数较多，数值很大的误差在没有错误的情况下通常不出现。这一规律在测量次数越多时表现得越明显，它就是一种最典型的分布规律——正态分布规律。

1.1.3.1 随机误差的正态分布规律

大量的测量误差服从正态分布（或称高斯分布）规律。标准化的正态分布曲线如图1.1.1所示。图中 x 代表某一物理量的实验测量值，$p(x)$为测量值的概率密度，且

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

其中 $\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum x}{n},\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{n}}$

从曲线可以看出被测量值在 $x=\mu$ 处的概率密度最大，曲线峰值处的横坐标相应于测量次数 $n\to\infty$ 时被测量的平均值 μ。横坐标上任一点到 μ 值的距离 $(x-\mu)$ 即为与测量值 x 相应的随机误差分量。随机误差小的概率大，随机误差大的概率小。σ 为曲线上拐点处的横坐标与 μ 值之差，它是表征测量值分散性的重要参数，称为正态分布的标准偏差。这条曲线是概率密度分布曲线，当曲线和 x 轴之间的总面积定为1时，其中介于横坐标上任何两点间的某一部分面积可以用来表示随机误差在相应范围内的概率。如图中阴影部分的面积就是随机误差在 $\pm\sigma$ 范围内的概率（又称置信概率），即测量值落在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 的区间中的概率，由定积分计算得其值为 $p=68.3\%$。如将区间扩大到 -2σ 到 $+2\sigma$，则 x 落在 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 区间中的概率就提高到 95.4%；x 落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 区间中的概率为 99.7%。

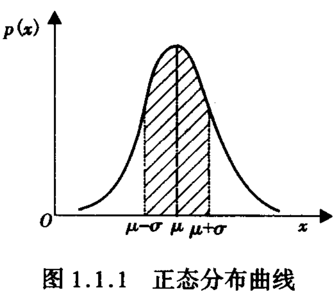

图 1.1.1 正态分布曲线

从分布曲线可以看出：①在多次测量时，正负随机误差常可以大致相抵消，因而用多次测

量的算术平均值表示测量结果可以减小随机误差的影响;②测量值的分散程度直接体现随机误差的大小,测量值越分散,测量的随机误差就越大。因此,必须对测量的随机误差作出估计才能表示出测量的精密度。

1.1.3.2 随机误差的处理

1.最小二乘法原理与测量平均值

对测量中的随机误差如何处理呢?对随机误差作估计的方法有多种,科学实验中常用标准偏差来估计测量的随机误差。实验中不可能作无限多次测量,测量次数只能是有限的,因此,应研究这种情况下的随机误差估计方法。

设对某一物理量在测量条件相同的情况下进行 n 次无明显系统误差的独立测量,测得 n 个测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。当无系统误差分量存在时,应该用有限次测量值的平均值作为真值的最佳估计值,这是由最小二乘法原理推导出来的。

根据最小二乘法原理,一列等精度测量的最佳估计值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设真值的最佳估计值为 x_0,则差值平方和可写为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2$$

若要使它最小,则它对 x_0 的导数应为0,即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) = 0$$

由上式可得

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)说明当系统误差已被消除时,测量值的平均值可以作为被测量的真值。测量次数越多,两个值接近的程度越好(当 $n \to \infty$ 时,平均值趋近真值)。因此,可以用平均值表示测量结果。以后为了简洁,常略去求和号上的求和范围,例如上式中的分子可写为 $\sum x_i$。

2.标准偏差

每一次测量值 x_i 与平均值之差称为残差,即

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, i = 1,2,\cdots,n$$

显然,这些残差有正有负,有大有小。常用“方均根”法对它们进行统计,得到的结果就是单次测量的标准偏差,以 S_x 表示为了

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.1.2}$$

这个公式又称为贝塞尔公式。可以用这一标准偏差表示测量的随机误差,它可以表示这一列测量值的精密度。标准偏差小就表示测量值很密集,即测量的精密度高;标准偏差大就表示测量值很分散,即测量的精密度低。现在很多计算器上都有这种统计计算功能,实验者可直接用计算器求得 S_x 等数值。

可以证明平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 是一列测量中单次测量的标准偏差 S_x 的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$,即

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1.1.3}$$

1.1.4 直接测量结果的表示和总不确定度的估计

1.1.4.1 总不确定度

完整的测量结果应给出被测量的量值 x_0,同时还要标出测量的总不确定度 Δ,写成 $x_0 \pm \Delta$ 的形式,这表示被测量的真值在$(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$的范围之外的可能性(或概率)很小。不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度,是表征被测量的真值所处的量值范围的评定。

直接测量时被测量的量值 x_0 一般取多次测量的平均值 $\bar{x}$;若实验中有时只能测一次或只需测一次,就取该次测量值 x。最后表示被测量的直接测量结果 x_0 时,通常还必须将已定系统误差分量(即绝对值和符号都确定的已估算出的误差分量)从平均值 $\bar{x}$ 或一次测量值x 中减去,以求得 x_0,即就已定系统误差分量对测量值进行修正。如螺旋测微计的零点修正,伏安法测电阻中电表内阻影响的修正等。

根据国际标准化组织等 7 个国际组织联合发布的《测量不确定度表示指南 ISO 1993(E)》的精神,普通物理实验的测量结果表示中,总不确定度 Δ 从估计方法上也可分为两类分量:A 类指多次重复测量用统计方法计算出的分量Δ_A,B 类指用其他方法估计出的分量Δ_B,它们可用“方、和、根”法合成(下文中的不确定度及其分量一般都是指总不确定度及其分量),即有

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \tag{1.1.4}$$

1.1.4.2 总不确定度的 A 类分量Δ_A

在实际测量中,一般只能进行有限次测量,这时测量误差不完全服从正态分布规律,而是服从 t 分布(又称学生分布)规律。这种情况下,对测量误差的估计,就要在贝塞尔公式(1.1.2)的基础上再乘以一个因子。在相同条件下对同一被测量作 n 次测量,若只计算总不确定度 Δ 的A 类分量Δ_A,那么它等于测量值的标准偏差 S_x 乘以一因子$t_p(n-1)/\sqrt{n}$,即

$$\Delta_A = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} S_x \tag{1.1.5}$$

式中 $t_p(n-1)$是与测量次数 n、置信概率 p 有关的量。概率 p 及测量次数n 确定后,$t_p(n-1)$也就确定了。$t_p(n-1)$的值可以从专门的数据表中查得。当 $p=0.95$ 时,$t_p(n-1)/\sqrt{n}$的部分数据可以从表 1.1.1 中查得。

表 1.1.1 $p=0.95$ 时 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$的部分数据

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_p(n-1)/\sqrt{n}$	8.98	2.48	1.59	1.24	1.05	0.93	0.84	0.77	0.72

普通物理实验中测量次数 n 一般不大于 10。从该表可以看出,当 $5<n\leqslant 10$ 时,因子 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$ 近似取为 1,误差并不很大。这时式(1.1.5)可简化为

$$\Delta_A = S_x \tag{1.1.6}$$

有关的计算还表明,在$5<n\leqslant 10$时,作 $\Delta_A = S_x$ 近似,置信概率近似为0.95 或更大。即当$5<n\leqslant 10$时,取 $\Delta_A = S_x$ 已可使被测量的真值落在$\bar{x} \pm S_x$ 范围内的概率接近或大于 0.95。所

以可以这样简化：直接把 S_x 的值当作测量结果的总不确定度的 A 类分量 Δ_A。当然，测量次数 n 不在上述范围或要求误差估计比较精确时，要从有关数据表中查出相应的因子 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$ 的值。

1.1.4.3 总不确定度的 B 类分量 Δ_B

在普通物理实验中常遇到仪器的误差或误差限值，它是参照国家标准规定的计量仪表、器具的准确度等级或允许误差范围，由生产厂家给出或由实验室结合具体测量方法和条件简化的约定，用 $\Delta_{仪}$ 表示。仪器的误差 $\Delta_{仪}$ 在普通物理实验教学中是一种简化表示，通常取 $\Delta_{仪}$ 等于仪表、器具的示值误差限或基本误差限。许多计量仪表、器具的误差产生原因及具体误差分量的计算分析，大多超出了本课程的要求范围。用普通物理实验室中多数仪表、器具对同一被测量在相同条件下作多次直接测量时，测量的随机误差分量一般比其基本误差限或示值误差限小不少；另一些仪表、器具在实际使用中很难保证在相同条件下或规定的正常条件下进行测量，其测量误差除基本误差或示值误差外还包含变差等其他分量。因此约定，在普通物理实验中大多数情况下把 $\Delta_{仪}$ 简化地直接作总不确定度中用非统计方法估计的 B 类分量 Δ_B，即 $\Delta_B = \Delta_{仪}$。

1.1.4.4 总不确定度的合成

由式(1.1.4)、(1.1.5)和式(1.1.6)可得

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_{仪}^2} = \sqrt{\left(\frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}}S_x\right)^2 + \Delta_{仪}^2} \tag{1.1.7}$$

当测量次数 n 符合 $5 < n \leqslant 10$ 条件时，上式可简化为

$$\Delta = \sqrt{S_x^2 + \Delta_{仪}^2} \tag{1.1.8}$$

式(1.1.8)是今后实验中估算不确定度经常要用的公式，希望能够记住。

如果因为 $S_x < \frac{1}{3}\Delta_{仪}$，或因估计出的 Δ_A 对实验最后结果的影响甚小，或因条件受限制而进行一次测量，则 Δ 可简单地用仪器的误差 $\Delta_{仪}$ 来表示。这时式(1.1.4)中用统计方法计算的 A 类分量 Δ_A 虽然存在，但不能用式(1.1.2)算出。当实验中只要求测量一次时，Δ 取 $\Delta_{仪}$ 的值并不说明只测一次比测多次时 Δ 值变小，只说明 $\Delta_{仪}$ 和用 $\sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_{仪}^2}$ 估算出的结果相差不大，或者说明整个实验中对该被测量 Δ 的估算要求能够放宽或必须放宽。测量次数 n 增加时，用式(1.1.8)估算出的 Δ 虽然一般变化不大，但真值落在 $x_0 \pm \Delta$ 范围内的概率却更接近 100%。这说明 n 增加时真值所处的量值范围实际上更小了，因而测量结果更准确了。

1.1.5 间接测量的结果和不确定度的合成

在很多实验中，我们进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量结果根据一定的数学式计算出来的。这样一来，直接测量结果的不确定度就必然影响到间接测量结果，这种影响的大小也可以由相应的数学式计算出来。

设间接测量所用的数学式(或称测量式)可以表为如下的函数形式：

$$\varphi = F(x, y, z, \cdots)$$

式中的 φ 是间接测量结果，$x, y, z, \cdots$ 是直接测量结果，它们是互相独立的量。设 $x, y, z, \cdots$ 的

不确定度分别为 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \cdots$，它们必然影响间接测量结果，使 φ 值也有相应的不确定度 Δ_φ。由于不确定度都是微小的量，相当于数学中的"增量"，因此间接测量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同。不同之处是：①要用不确定度 Δ_x 等替代微分 dx 等；②要考虑到不确定度合成的统计性质，一般是用"方、和、根"的方式进行合成。于是，在普通物理实验中用以下两式来简化地计算不确定度

$$\Delta_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\Delta_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\Delta_y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\Delta_z)^2 + \cdots} \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2 (\Delta_x)^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2 (\Delta_y)^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2 (\Delta_z)^2 + \cdots} \tag{1.1.10}$$

式(1.1.9)适用于 φ 是和差形式的函数，式(1.1.10)适用于 φ 是积商形式的函数。

在科学实验中一般都采用"方、和、根"合成来估计间接测量结果的不确定度。

例 1.1.1 已知金属环的外径 $D_2 = (3.600 \pm 0.004)\,\text{cm}$，内径 $D_1 = (2.880 \pm 0.004)\,\text{cm}$，高度 $h = (2.575 \pm 0.004)\,\text{cm}$，求环的体积 V 及其不确定度 Δ_V。

解：环体积

$$V = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2)h = \frac{\pi}{4} \times (3.600^2 - 2.880^2) \times 2.575 = 9.436\ \text{cm}^3$$

环体积的对数及其偏导数为

$$\ln V = \ln \frac{\pi}{4} + \ln(D_2^2 - D_1^2) + \ln h$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D_2} = \frac{2D_2}{D_2^2 - D_1^2}, \frac{\partial \ln V}{\partial D_1} = -\frac{2D_1}{D_2^2 - D_1^2}, \frac{\partial \ln V}{\partial h} = \frac{1}{h}$$

代入"方、和、根"合成公式(1.1.10)，则有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta_V}{V}\right)^2 &= \left(\frac{2D_2\Delta_{D_2}}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2 + \left(\frac{2D_1\Delta_{D_1}}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2 \times 3.600 \times 0.004}{3.600^2 - 2.880^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2.880 \times 0.004}{3.600^2 - 2.880^2}\right)^2 + \left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2 \\ &= (38.1 + 24.4 + 2.4) \times 10^{-6} = 64.9 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_V}{V} = (64.9 \times 10^{-6})^{1/2} = 0.008\,1 = 0.81\%$$

$$\Delta_V = V\frac{\Delta_V}{V} = 9.436 \times 0.008\,1 \approx 0.08\ \text{cm}^3$$

因此环体积 $V = (9.44 \pm 0.08)\,\text{cm}^3$

1.2 数据处理

1.2.1 有效数字及其表示

在实验中所测得的被测量都是含有误差的数值，对这些数值的尾数不能任意取舍，应反映出测量值的准确度。所以在记录数据、计算以及书写测量结果时，究竟应写出几位数字有严格的要求，要根据测量误差或实验结果的不确定度来定。例如用 300 mm 长的毫米分度钢尺（仪

器误差为 0.5 mm)测量某物体的长度,正确的读法是除了确切地读出钢尺上有刻线的位数之外,还应估计一位,即读到 0.1 mm。比如,测出某物的长度是 15.2 mm,这表明 15 是确切数字,而最后的 2 是估计数字。值得注意的是在读取整刻度值时初学者往往只读出了整数值,而忘记读估计的那位“0”。比如,用钢尺测得的物体长度正好是 15 mm 整,应该记录为 15.0 mm,不应写成 15 mm。又如根据长度和直径的测量值用计算器算出的圆柱体体积 $V = 6\ 158.320\ 1\ \mathrm{mm}^3$,$\Delta_V = \pm 4\ \mathrm{mm}^3$。由不确定度为 4 mm^3 可以看出,第四位数字 8 已经是不精确的,它后面的四位数字 320 1 没有意义。因而圆柱体体积的间接测量值应写作 $V = (6\ 158 \pm 4)\mathrm{mm}^3$。6 158 这四位数字前面的三位是准确数字,后面一位是存疑数字。准确数字和存疑数字的全体称为有效数字。前述的 15.2 mm 为三位有效数字,6 158 mm^3 为四位有效数字。

有效数字位数的多少直接反映实验测量的准确度。有效数字位数越多,测量的准确度就越高。例如,用不同精度的量具测量同一物体的厚度 d 时,相对误差也不同。

(1)用钢尺测量,$d = 6.2$ mm,仪器误差 0.5 mm,相对误差 $E = \frac{0.5}{6.2} = 8.1\%$。

(2)用 50 分度游标卡尺测量,$d = 6.36$ mm,仪器误差 0.02 mm,相对误差 $E = \frac{0.02}{6.36} = 0.31\%$。

(3)用螺旋测微计测量,$d = 6.347$ mm,仪器误差 0.004 mm,相对误差 $E = \frac{0.004}{6.347} = 0.063\%$。

由此可见,有效数字多一位,相对误差 E 差不多要小一个数量级。因此取几位有效数字是件严肃的事,不能任意取舍。

写有效数字时应注意以下要点:

(1)有效数字的位数与小数点位置无关,单位的 SI 词头改变时,有效数字的位数不应发生变化。例如,重力加速度 980 $\mathrm{cm/s^2}$,以“$\mathrm{m/s^2}$”表示时记为 9.80 $\mathrm{m/s^2}$,与记为 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ 是不同的。前者有三位有效数字,而后者只有两位。若写为 0.009 80 $\mathrm{km/s^2}$,则数值前面小数点定位所用的“0”不是有效数字,应从非“0”的第一个数算起,仍为三位有效数字。

(2)为表示方便,特别是对较大或较小的数值,常用 $\times 10^{\pm n}$ 的形式(n 为一正整数)书写,这样可避免有效数字写错,也便于识别和记忆,这种表示方法叫科学记数法。用这种方法记数值时,通常在小数点前只写一位数字,例如地球的平均半径 6 371 km 可写作 6.371×10^6 m,表明有四位有效数字。

(3)表示测量值最后结果的有效数字尾数与不确定度的尾数一般要取齐。普通物理实验中不确定度一般取一位至两位就可以了,当不确定度的第一位数比较小时经常取两位。相对误差一般取两位。在计算过程中,对中间运算结果适当多保留几位,以免因过多截取带来附加误差。对 π、$\sqrt{2}$等值应直接按计算器上的按键取用。

(4)如果在实验中没有进行不确定度的估算,最后结果的有效数字位数的取法如下:一般来说,在连乘除的情况下它跟参与运算的各量中有效数字位数最少的大致相同;在代数和的情况中,则按参与加减的各量的末位数中数量级最大的那一位为结果的末位。作为一种粗略判断方法,最后结果的有效数字位数应和原始测量数据中位数最少者相同或相近。

1.2.2 用作图法处理实验数据

某些实验的观测对象是互相关联的两个(或两个以上)物理量之间的变化关系,实验的任

务就是寻求这些物理量互相依存的变化规律。例如,研究单摆周期和摆长的关系,研究金属电阻随温度变化的关系,研究气体压强随温度变化的关系等等。这一类实验中的观测方法是控制某一个量(例如温度)使之依次取不同的值,然后观测另一个量所取的对应值,从而得出一列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和另一列对应的 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 值。如果将这两组数据记录在合适的表格内,便可一目了然,这叫列表法。更形象地处理这类实验数据常用作图法,它能直观地揭示出物理量之间的规律,粗略显示对应的函数关系。

为了使图线能清楚地、定量地反映出物理现象的变化规律,并能准确地从图线上确定物理量值或求出有关常数,所作的图应符合准确度要求,因此必须用坐标纸作图。

作图规则如下。

(1)选择合适的坐标分度值。坐标分度值的选取应符合测量值的准确度,即应能反映测量值的有效数字位数。一般以 1 或 2 mm 对应于测量仪表的最小分度值或对应于测量值的次末位数,即倒数第二位数。对应比例的选择应便于读数,不宜选成 1:1.5 或 1:3,坐标范围应恰好包括全部测量值,并略有富余。最小坐标值不必都从零开始,以便作出的图线大体上能充满全图,布局美观、合理。

(2)标明坐标轴。以自变量(即实验中可以准确控制的量,如温度、时间)为横坐标,以因变量为纵坐标。用粗实线在坐标纸上描出坐标轴,在轴上注明物理量名称、符号、单位,并按顺序标出标尺整分格上的量值。这些量值一般应是一系列正整数(如 1,2,3,4,…,或 0,2,4,6,…,或 0,5,10,…)及其 10^n(n 为正负整数)倍,而不要标注实验点的测量数据。

(3)标实验点。实验点可用"+"、"⊙"等符号标出。

(4)连成图线。因为每一个实验点的误差情况不一定相同,因之不应强求曲线通过每一个实验点而连成折线(仪表的校正曲线不在此例),应该按实验点的总趋势连成光滑的曲线,要做到图线两侧的所有实验点与图线的距离都最为接近且分布大体均匀。曲线正穿过实验点时,可以在点处断开。

(5)写明图线特征。有必要时,可利用图上的空白位置注明实验条件和从图线上得出的某些参数,如截距、斜率、极大极小值、拐点和渐近线等。

(6)写图名。在图纸下方或空白位置写出图线的名称以及某些必要的说明,要使图线尽可能全面反映实验的情况。最后写上实验者姓名、实验日期,将图纸与实验报告订在一起。

1.2.3 实验数据的直线拟合

作图法虽然在数据处理中是一个很便利的方法,但是在图线的绘制上往往会引入附加误差,尤其在根据图线确定常数时,这种误差有时很明显。为了克服这一缺点,在数理统计中研究了直线拟合问题(或称一元线性回归问题),常用一种以最小二乘法为基础的实验数据处理方法。由于某些曲线的函数可以通过数学变换改为直线,例如对函数 $y=ae^{-bx}$ 取对数得 $\ln y=\ln a-bx$,这样 $\ln y$ 与 x 的函数关系就变成直线型了。这一方法也适用于某些曲线型的规律。

下面就数据处理问题中的最小二乘法原理作一简单介绍。

设某一实验中可控制的物理量取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 值时,对应的物理量依次取 $y_1,y_2\cdots,y_n$ 值。假定对 x_i 值的观测误差很小,而主要误差都出现在 y_i 的观测上,如果从 (x_i,y_i) 中任取两组实验数据就得出一条直线,那么这条直线的误差有可能很大。直线拟合的任务就是用数学

分析的方法从这些观测到的数据中求出一个误差最小的最佳经验式 $y=a+bx$。按这一最佳经验公式作出的图线虽不一定能通过每一个实验点,但是它以最接近这些实验点的方式平滑地穿过它们。很明显,对应于每一个 x_i 值,观测值 y_i 和最佳经验式的 y 值之间存在一偏差 δy_i,即

$$\delta y_i = y_i - y = y_i - (a + bx_i)(i = 1,2,\cdots,n)$$

最小二乘法的原理就是:如果各观测值 y_i 的误差互相独立且服从同一正态分布,当 y_i 的偏差的平方和为最小时,得到最佳经验式。根据这一原理可求出常数 a 和 b。

设以 S 表示 δy_i 的平方和,它应满足

$$S = \sum(\delta y_i)^2 = \sum[y_i - (a + bx_i)]^2 = \min$$

上式中的各 y_i 和 x_i 是测量值,都是已知量,而 a 和 b 是待求的,因此 S 实际上是 a 和 b 的函数。令 S 对 a 和 b 的偏导数为零,即可解出满足上式的 a、b 值。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum(y_i - a - bx_i) = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum(y_i - a - bx_i)x_i = 0,$$

即 $$\sum y_i - na - b\sum x_i = 0, \sum x_iy_i - a\sum x_i - b\sum x_i^2 = 0$$

其解为

$$a = \frac{\sum x_iy_i\sum x_i - \sum y_i\sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2}, b = \frac{\sum x_i\sum y_i - n\sum x_iy_i}{(\sum x_i)^2 - n\sum x_i^2}$$

将得出的 a 和 b 代入直线方程,即得到最佳的经验公式 $y=a+bx$。

上面介绍的用最小二乘法求经验公式中的常数 a 和 b 的方法,是一种直线拟合法。它在科学实验中的运用很广泛,特别是有了计算器后,计算工作量大大减少,计算精度也能保证,现在用计算机运算速度更快,因此它是很有用又很方便的方法。用这种方法计算的常数值 a 和 b 是"最佳的",但并不是没有误差,它们的误差估算比较复杂。一般地说,一列测量值的 δy_i 大(即实验点对直线的偏离大),那么由这列数据求出 a、b 值的误差也大,由此定出的经验公式的可靠程度就低;如果一列测量的 δy_i 小(即实验点对直线的偏离小),那么由这列数据求出的 a、b 值的误差就小,由此定出的经验公式的可靠程度就高。

下面介绍实验数据的直线拟合问题中的相关系数。相关系数的定义为

$$r = \frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum(\Delta y_i)^2}} \tag{1.2.1}$$

式中 $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$,$\Delta y_i = y_i - \bar{y}$;它是从函数 $\varphi = x \pm y$ 的形式导出的(推导从略)。

当 x 和 y 为互相独立的变量时,Δx_i 和 Δy_i 的取值和符号彼此无关(即无相关性),因此

$$\sum \Delta x_i \Delta y_i = 0$$

即

$$r = 0$$

在直线拟合中,x 和 y 并不互相独立,它们有线性关系,这时 Δx_i 和 Δy_i 的取值和符号不再无关而是有关(即有相关性)。例如设函数形式为 $x \mp y = 0$,即 $y = \pm x$,那么 Δx 和 Δy 之间就会有如 $\Delta y = \pm \Delta x$ 的关系,将这一关系代入式(1.2.1),可得