大學叢書

微分幾何學

蘇步青 著

新華書店出版

微分幾何學

大學讀書

微分幾何學

蘇步青 著

新華書店 出版

書號：0633

微分幾何學

著者：	蘇步青
出版者：	新華書店
印行者：	新華書店
印刷者：	京華印書局 （北京南新華街）

1--5,000〔京〕　一九五〇年八月初版

序

本書係集著者民國二十年至三十六年在國立浙江大學所授之講義而成，其間曾竄改增補五六次之多，記號務求簡易，行文務求淺近. 參考英、美、德、法、意、日、諸國幾何學者名著不下十册，所收習題較難者加以星號，並附原著者姓名及年份，俾讀者可獲查考之徑路.

微分幾何學一門佔數學之一重要地位. 尤以近年相對論電機學等方面需要絕對微分學殊殷，該學之運算與夫空間概念之推廣殆有不可分離之勢. 故本書內特添一節(§25)，作爲導引. 玆當國內高等數學參考書缺乏之際，本書如能有助於教學研究，亦著者之榮也. 自愧學識謭陋，雖經十六年間之删補，而錯誤之處仍應不免，尙祈海內學者教而正之.

吳俊傳、金福臨、楊忠道三學士協助本書校對，且楊君爲繪插圖，對於三君特申謝意.

民國三十六年六月蘇步青誌於杭州浙大.

目　　次

緒　　論

第一章　曲線論

第二章　曲面論

緒　論

依 F. Klein (1872)之定義,可用幾何學變換羣而作幾何學分類. 詳言之，已知一幾何學變換羣 G 時，在此羣下研究圖形不變性質，稱為關於 G 之幾何學.

幾何學之研究對象當為圖形. 然依所論之圖形性質,可分作二種論之. 第一種乃關於圖形所具之有限性質. 例如,决定一直線與一圓錐曲線之交點問題屬於此種,以所求之交點係依曲線與直線整個所決定故也. 第二種乃關於圖形之微小性質. 例如，在一曲線之一點引曲線之切線問題. 此切線僅係依曲線在切點之第一階近傍所決定,而與曲線其他部分之更改毫無關係. 此種研究應屬於微分幾何學.

因微分幾何學為研究圖形在其原素近傍之性質時所發展之一科，故必須應用函數及其微分，於是亦應用積分. 此卽古來 Euler (1744), Monge (1807), Lagrange (1813), Cauchy (1826)等應用微積分於曲線、曲面研究之濫觴,亦為微分幾何學之發端. 然斯學之具系統方式,端賴 C. F. Gauss (1826)之努力. 十九世紀幾何學大家如 Ossian Bonnet, Sophus Lie, E. Beltrami, E. Cesàro, J. Weingarten, G. Darboux 等對於微分幾何學皆有相當貢獻. 委細參看 Knoblauch 著 Grundlagen der Differentialgeometrie (Leipzig, 1913).

然從 Klein 之分類法觀之，此古典分科當屬於運動羣，故有運動幾何學或初等微分幾何學之稱. 倘以別一基本羣替換之，則當可獲得別種微分幾何學. 此乃二十世紀以來之一新發展. 例如，G.Fubini (1916) 之射影微分幾何學、W. Blaschke (1916) 之遠交微分幾何學、G. Thomsen 及 W. Blaschke (1923) 之保角微分幾何學等皆係遵沿 Klein 之遠大計畫所生成.

綜上所述，所論基本羣雖有不同，然圖形所在之空間爲普通空間，或更推廣之 n 元歐氏空間. 至 1854 年 B. Riemann 出而擴充歐氏空間爲更普遍空間，即現代通稱爲黎曼流幾何學者是也. 繼之，G. Ricci-Curbastro (1900) 有絕對微分學之發見. A. Einstein (1916) 首先應用於相對論，翌年(1917)遂有 T. Levi-Civita 之平行概念，微分幾何學至此，竟獲長足之發展. J. A. Schouten (1924) 最初發見數十年來 Klein 分類法之缺點，而有所改善. 現代所行之聯絡論乃黎曼流幾何學之更推廣. 委細參考 D. J. Struik 著 Theory of linear connections (1934).

由是觀之，初等微分幾何學乃一陳舊分科，自不待言，然其爲現代微分幾何學之基礎無可容疑. 其間所用於研究之工具大部分爲微積分學，但吾人須知研究目標爲幾何學而非解析學，故務必省略無謂演算而重視幾何學意義.

尤堪注意者，近年來實函數論異常發達，將此方面思想應用於微分幾何學，冀其改進而至於推廣，大有其人，殊未容忽視之舉也.

第一章　曲線論

§1.　撓曲線之解析表示

設 x,y,z 爲一點之直交座標．對於座標軸之正方向有下列規定，卽當吾人頭朝 z 軸正向且面向 x 軸正向時，y 軸正向在右邊（參照圖 1）．

若一點 P 之座標 x,y,z 皆爲同一參數 t 之函數，卽

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad (1)$$

則因 t 之變動，點 P 所畫之軌跡稱爲一空間曲線或撓曲線．其逆，已知一撓曲線時，可表示其上任何一點之座標爲形式(1)之方程式．因之，(1)稱爲此曲線之解析表示．以後假設三函數 $x(t),y(t),z(t)$ 之第一、第二、第三階導數存在而爲 t 之連續函數．簡言之，所論之曲線屬於級 C'''．

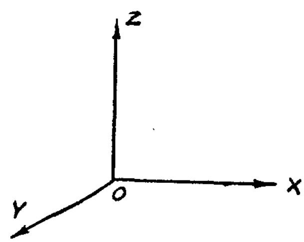

圖 1.

例 1.　設一直角三角形紙片之一銳角爲 θ．今將此紙捲於一圓柱上使角 θ 之一邊合於圓柱之一法截圓，求其他一邊所捲成之曲線．

以圓柱軸爲 z 軸且取 x,y 二軸如圖 2，則易知所求曲線之解析表示

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=at\tan\theta,$$

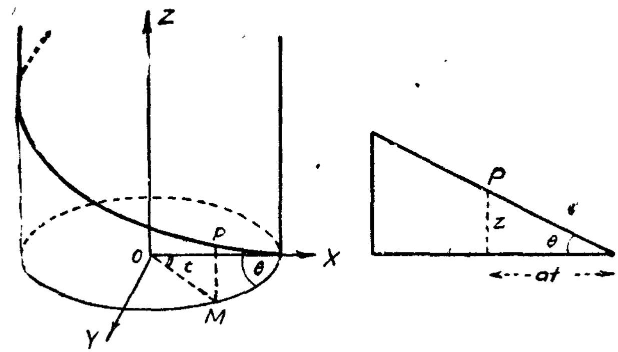

圖 2.

式中 a 乃圓柱之半徑. 此曲線稱爲螺線.

例 2. 設一曲線(1)在一定平面上, 證明其充要條件乃

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

但 $'$, $''$, $'''$ 表示一階二階三階導數.

證明. 設曲線(1)在一平面上, 則

$$ax + by + cz + d = 0,$$

式中 a, b, c, d 皆常數且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. 關於 t 微分之,

$$\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0, \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0, \\ ax''' + by''' + cz''' &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

而 a, b, c 中至少有一不等於 0 者, 故知方程式(2)成立之必要性.

其逆, 若(2)成立, 則必有三函數 a, b, c 使(3)成立. 今微分(3)之

第一及第二方程式且依次化簡之,

$$a'x'+b'y'+c'z'=0,$$

$$a'x''+b'y''+c'z''=0,$$

於是知 a',b',c' 必與行列式(2)關於第三列之三餘因子成比例,又從(3)亦知 a,b,c 有同一性質,故

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

今以 $\varphi'(t)$ 示其公值,且積分之,

$$a=a_0e^{\varphi},\quad b=b_0e^{\varphi},\quad c=c_0e^{\varphi},$$

但 a_0,b_0,c_0 皆爲常數. 代入(3)之第一方程式,删其非零因子 e^{φ} 且積分之,即知曲線(1)爲一平曲線.

1. **切線**　從一曲線(1)上取二點,設其參數值爲 t 及 $t+\Delta t$,則二點連線之方向餘弦必與三數

$$x(t+\Delta t)-x(t),\quad y(t+\Delta t)-y(t),\quad z(t+\Delta t)-z(t)$$

成比例. 然依平均值定理,

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta t\cdot x'(t+\theta_1\Delta t),$$

$$y(t+\Delta t)-y(t)=\Delta t\cdot y'(t+\theta_2\Delta t),$$

$$z(t+\Delta t)-z(z)=\Delta t\cdot z'(t+\theta_3\Delta t),$$

但 $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$,故方向餘弦之比又等於

$$x'(t+\theta_1\Delta t):y'(t+\theta_2\Delta t):z'(t+\theta_3\Delta t),$$

於是連線之方程式爲

$$\frac{\xi-x(t)}{x'(t+\theta_1\Delta t)}=\frac{\eta-y(t)}{y'(t+\theta_2\Delta t)}=\frac{\zeta-z(t)}{z'(t+\theta_3\Delta t)}.$$

當 $\Delta t \to 0$ 時，若此直線有一極限位置，則其方程式如次，

$$\frac{\xi - x(t)}{x'(t)} = \frac{\eta - y(t)}{y'(t)} = \frac{\zeta - z(t)}{z'(t)}, \tag{4}$$

式中 ξ, η, ζ 表示直線上一動點之座標. 如是所獲之直線稱爲曲線在點 (t) 之**切線**.

倘在點 (t) 三導數 x', y', z' 皆取零值，則在此點之切線無定. 此種點稱爲曲線之奇異點，須由討論範圍除外之.

2. **曲線弧** 已知一曲線 C 之解析表示或方程式爲(1)時，須知此表示非僅因所參考之座標系統不同而更改，且與參數之選擇亦有關聯之處. 換言之，變更座標系統時，點之直交座標當受直交變換，即

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \\ z^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c, \end{aligned} \tag{5}$$

式中 $a_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$; a, b, c 皆爲常數且

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3} a_{ki}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3); \\ &\sum_{k=1}^{3} a_{ki}\, a_{kj} = 0 \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{6}$$

此時方程式(1)當化爲

$$x^* = x^*(t), \quad y^* = y^*(t), \quad z^* = z^*(t). \tag{1*}$$

又對於一定座標系統更可變更參數 t 爲 τ，即

$$t=f(\tau),\tag{7}$$

於是 x,y,z 皆爲 τ 之函數.故對於同一曲線,其表示方法則有無數.

然則應如何表示一撓曲線使與直交座標系統及參數之變換皆無關係.凡對於(5)不改之圖形性質稱爲**不變性質**,而對於(7)不改者稱爲**本有性質**.是則吾人所求於一撓曲線研究者乃不變而本有性質而已.

茲爲決定曲線之一本有參數起見,取曲線 C 上之二點 (t) 及 $(t+\Delta t)$,且設其間距離爲 Δs,則

$$(\Delta s)^2=(\Delta t)^2\{x'^2(t+\theta_1\Delta t)+y'^2(t+\theta_2\Delta t)+z'^2(t+\theta_3\Delta t)\}.$$

於是當 $\Delta t\to 0$ 時,$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 之極限值當爲

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}.\tag{8}$$

因之,曲線在其二點 (t_0) 及 (t) 間之弧長 s 等於

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.\tag{9}$$

對於參數變換(7)弧長 s 並不受影響,以

$$\sqrt{S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{S\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}\,d\tau\tag{10}$$

故也.式中記號 S 表示所含一項及更改 x 爲 y,z 時所得之二項之和,即

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

其餘依此類推.例如