研究生教育书系
信息与电子学科

应用泛函分析（第二版）

Applied Functional Analysis

(Second Edition)

薛小平
孙立民　编著
武立中

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

研究生教育书系
信息与电子学科

应用泛函分析

(第二版)

Applied Functional Analysis

(Sceond Fdition)

薛小平　孙立民　武立中　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是为高等理工科院校非数学类专业的高年级大学生、研究生和博士生编写的应用泛函分析教材,全书共分六章。前四章系统地介绍了度量空间、赋范线性空间和内积空间的基本概念和基础理论;后两章简要介绍了非线性分析、广义函数和Sobolev空间的基本理论。

本书除作为研究生教材外,还可供需要泛函分析知识的科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/薛小平等编著 .—2版 .—北京:电子工业出版社,2006.9
(研究生教育书系)
ISBN 7-121-03178-7

Ⅰ.应 ... Ⅱ.薛 ... Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.0177

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第109395号

责任编辑:陈晓莉　　特约编辑:李双庆
印　　刷:北京市通州大中印刷厂
装　　订:三河市万和装订厂
出版发行:电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本:787×960　1/16　印张:14.5　字数:322千字
印　　次:2006年9月第1次印刷
印　　数:5 000册　　定价:22.00元

前　言

为适应高层次科技人才培养的需要，许多理工科（非数学类）专业对数学教学提出了更高的要求。由于泛函分析在现代数学中占有重要的地位及其广泛的应用背景，使它成为继微积分后的一门重要基础理论课。泛函分析是综合地运用几何、代数及分析学的方法和观点来分析处理问题而形成的数学理论，内容极其丰富，体系系统严谨，观点也尤为深刻，现已成为探讨和解决现代科学技术众多问题的必备手段。因此，国内外许多大学纷纷把泛函分析列为理工科高年级大学生、硕士生和博士生的必修课。

从 1996 年开始，作者在哈尔滨工业大学先后三次为硕士生和博士生编写应用泛函分析的教材，在校内曾试用多次。2002 年作为正式教材在哈尔滨工业大学出版社出版，在校内试用 5 次，其他院校也曾以该书为教材。此次再版是综合了各方面的意见和需求，在 2002 年版的基础上做了更大的改进，增加了大量的新内容，供不同层次的读者选用。

教师在选用本书时，可考虑适当删减书中部分内容。本书前四章适合于高年级大学生和硕士研究生，后两章适合于博士研究生。

在本书的编写过程中始终得到哈尔滨工业大学数学系泛函分析研究组吴从炘、李容录、张传义、付永强四位教授的指导及帮助，还得到了电子工业出版社陈晓莉编审的大力支持和帮助，也得到了有关专家和同学的热情鼓励和支持。作者借此机会，向他们表示衷心感谢！同时，对三位博士生王长忠、赵志涛、朱良宽为本书的打印和校稿所付出的辛勤劳动表示感谢。

写出一本高质量、有鲜明特色的教材是一个相当困难的工作。虽然我们历经数年艰苦的努力，但限于学识和经验，书中难免存在疏漏和不足，恳请专家同行和同学们批评指正。

作　者

2006 年 8 月 10 日

常 用 符 号 表

$\varnothing$	空集
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}^n$	欧氏空间
$\mathbf{C}^n$	酉空间
$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\lvert\cdot\rvert$	绝对值
$\lVert\cdot\rVert$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积
$\mathring{A}$或 A^0	内部
A'	导集
$\overline{A}$	闭包
$co(A)$	凸包
$A-B$ 或 $A\setminus B$	差集
$\bigcup$	并
$\bigcap$	交
A^c 或 A^C	补集

目　　录

第1章　预备知识

泛函分析是现代数学的重要分支之一，它起源于经典数学和物理学中的一些变分问题，是分析数学的高度发展。其内容主要涉及无穷维空间及其上定义的算子和泛函的基本理论，并且综合地运用了代数、几何与分析等经典学科中的观点和方法。为了学好泛函分析，了解实数空间及其上函数的有关理论是十分必要的。

1.1　集合的一般知识

1.1.1　集合及其运算

1. 集合的概念

集合是现代数学的一个基本概念。一般地说，把具有某种公共特性的或满足一定条件的对象全体叫做集合，简称集。其中每个对象叫该集合的元素。本书基本上用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素。

集合的特点：集合具有任意性、确定性和互异性。即任意一些对象都可构成集合，集合中的每一个元素必须是确定的，集合中的每个元素都是不同的。

集合的表示方法：列举法，解析法，区间法。列举法是把集合元素一一列举出来，用花括号括上，如集合$\{1,2,3\}$；解析法是把集合中的元素的公共属性描述出来，用花括号括上，如集合$\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, x \in \mathbf{R}\}$表示所有大于等于1且小于等于2的实数集全体；区间法适用于实数集合分段表示的子集，如$[1,2]$表示大于等于1且小于等于2的实数集。$(1,2)$表示大于1且小于2的实数全体。

设A是集合，a是A中的元素，记为$a \in A$，而记号$b \notin A$表示b不是A中的元素；不包含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$；给定A，B两个集合，如果A中的每个元素都属于B，则说A是B的子集，记为$A \subset B$或$B \supset A$；规定$\varnothing$集是任意集合的子集；若$A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B相等，记为$A = B$；若$A \subset B$，$A \neq B$，则称A为B的真子集。

2. 集合的运算

集合的并与交：设A，B是两个集合，由集合A与集合B的全体元素构成的集叫A与B的并，记为$A \cup B$，即$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$；所有同时属于集

合 A 与B 的元素构成的集叫A 与B 的交,记做 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$;设$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是一集簇,其中 I 是指标集,则它们的并与交定义为:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \exists\, \alpha \in I,\text{有 } x \in A_\alpha\};$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \forall\, \alpha \in I,\text{有 } x \in A_\alpha\}。$$

差集与余集:设 A 与B 是两个集,由集 A 中不属于集B 的那些元素组成的集叫A 与B 的差集,记为 $A - B$;特别当 $B \subset A$ 时,常称差集 $A - B$ 为B 关于A 的余集或补集,记为 $C_A B$,如果我们仅考察某固定集 A 的某一些子集时,则常记为 $A - B$ 或B^C。

由定义易证集的运算满足如下运算规律:

(1) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(4) 分配律 $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha)$,

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup A_\alpha);$$

(5) De. Morgan 律

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^C$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$$

证明:我们只证$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$,其余留给读者自证。

设 $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C$,则 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$,可知,必存在某个 $\alpha_0 \in I$,有 $x \notin A_{\alpha_0}$,故 $x \in A_{\alpha_0}^C$ 从而 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A_{\alpha_0})^C$,这就证明了$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$;反之,设 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$,则存在某一个 $\alpha_0 \in I$,使 $x \in (A_{\alpha_0})^C$,即 $x \notin A_{\alpha_0}$,有 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$,这说明 $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C$,所以$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C \supset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$。由所得两个结果,知$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^C$。

集合的运算体现了"对偶"原理,也就是说,当一个集的关于 $\cup$, $\cap$ 关系式成立,则将式中 $\cup$ 和 $\cap$ 分别换成 $\cap$ 和 $\cup$,所得的关系式也成立。而且 De. Morgan 律也给我们提供了讨论集合有关性质时,可利用其补集的有关性质讨论的方法,这很重要。

直积:设 A, B 是给定的非空集合,所有有序元素组$(a, b)(a \in A, b \in B)$ 为元素组成的集合称为 A 与B 的直积,记为 $A \times B$,即 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$。

例如平面点集 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 就是实数集 $\mathbf{R}$ 与它自身的直积。

类似地,有限个非空集$\{A_k \mid k = 1, 2, \cdots, n\}$,它们的直积定义为

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in A_k, k = 1,2,\cdots,n\}$$

直积是集的重要运算之一。

上限集与下限集：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集，由属于上述集列中无限多个集的那些元素的全体所组成的集称为这一集列的上极限或上限集，记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 存在无穷多个 A_n, 使\ x \in A_n\}$$

不难证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 对任意的自然数 N, 存在\ n > N, 使\ x \in A_n\}$。

同样，属于上述集列中每个集的元素全体所组成的集(除有限个外)，称为这一集列的下限集或下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。它可以表示为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 当\ n\ 充分大后都有\ x \in A_n\}$$

由上限集，下限集的定义易知，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。关于上限集、下限集还有如下结论：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m \right)$；

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m \right)$。

证明：我们利用 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 对任意的 N > 0, 存在\ n > N, 使\ x_n \in A\}$ 来证明(1)式。记

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n, B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right)$$

设 $x \in A$，则对任意取定的 n，总有 $m > n$，使 $x \in A_m$，即对任意 n，总有 $x \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，故 $x \in B$。反之，设 $x \in B$，则对任意的 $N > 0$，总有 $x \in \bigcup\limits_{m=N+1}^{\infty} A_m$，即总存在 $m(m > N)$，有 $x \in A_m$，所以 $x \in A$，因此 $A = B$。(2)式同样可以证明。

例 1.1　设 A_n 是如下一列点集：

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \qquad m = 0,1,2,\cdots$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \qquad m = 1,2,\cdots$$

求 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 与 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。

解：因为 $\forall n \in \mathbf{N}$，$\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m = [0,2)$，$\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m = [0,1]$，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) = [0,2), \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right) = [0,1]$$

如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称集列$\{A_n\}$收敛,将这一集称为$\{A_n\}$的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。如果集列$A_n = \left[0,1+\frac{1}{n}\right]$,$(n = 1,2,\cdots)$,则收敛于极限集$[0,1]$。如果集列$\{A_n\}$满足$A_n \subset A_{n+1}(A_n \supset A_{n+1})$,$n = 1,2,\cdots$,则称$\{A_n\}$为增加(减少)集列。增加与减少的集列统称为单调集列。易证单调集列是收敛的。如果$\{A_n\}$增加,则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$;如果$\{A_n\}$减少,则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,请读者自证。

1.1.2 映射

映射是函数概念的推广,是研究集合与集合之间的对应关系,它是现代数学中最基本的概念之一。

映射与逆映射:设A,B是两个非空集合,如果按照某一对应法则T,对每一个$x \in A$,在B中有惟一确定的元素y与之对应,则称T是定义在A上且取值于B内的一个映射,记为$T:A \to B$,并将x与y之间的关系记为$y = T(x)$。此时A称为T的定义域,而称$T(A) = \{T(x) \mid x \in A\}$为$T$的值域(或像)。若$T(A) = B$,则称$T$是满射,即$T$为$A$到$B$上的映射。如果对每一个$y \in T(A)$,存在惟一$x \in A$,有$T(x) = y$,则说$T$是$A$上的一个单射,或说$T$是$A$到$T(A)$上的一一映射。此时$T$的逆映射$T^{-1}:T(A) \to A$存在,且$T^{-1}(y) = x(\forall y \in T(A)$。若$A$,$B$为数集,映射$T:A \to B$称为函数。

显然,任何一个严格单调的函数,都可以看成它的定义域到其值域的一一映射。如函数$y = \arctan x$是$\mathbf{R}$到$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的单调函数,是一一映射。函数虽然是一一映射,但不一定都是单调的,如$[0,1]$上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

不是$[0,1]$到$[0,1]$上的单调函数,但是一一映射。不过我们已有结论:连续函数是一一映射的充要条件是这个函数是严格单调的。

恒等映射:若映射$I_A:A \to A$满足条件$I_A(x) = x$,$(\forall x \in A)$,则称I_A为A上的恒等映射(或单位映射),在不致引起混淆的情况下,可简记I_A为I。

复合映射:设$T:A \to B$,$S:B \to C$是两个映射,则称映射$S \circ T:A \to C$且$S \circ T(x) = S(T(x))(x \in A)$为$T$与$S$的复合映射,记为$S \circ T$。

映射的性质:设$T:X \to Y$为一映射,A、B、$A_\alpha(\alpha \in I)$都是X的子集,则

(1) 若$A \subset B$,有$T(A) \subset T(B)$;

(2) $T(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}T(A_\alpha)$;

(3) $T(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}T(A_\alpha)$。

证明留给读者。

关系的有关概念

自然界各对象间的相关性是科学研究的重要内容，抽象为数学问题就是考察集合间元素的彼此联系，其中重要的基本概念之一就是关系(这里只介绍二元关系)。

关系：设 A,B 是两个集合，所谓 A 与 B 的一个关系 R 是直积 $A\times B$ 的一个子集，即 $R\subset A\times B$，此时用 xRy 表示 $(x,y)\in R$，并说在 R 的意义下，x 与 y 的意义相关；而集 $\{x\in A\mid \exists\, y\in B,使(x,y)\in R\}$ 与集 $\{y\in B\mid \exists\, x\in A,使(x,y)\in R\}$ 分别称为 R 的定义域与值域。

例如，映射：$T:A\to B$ 就确定了集合 A 与 B 之间的一个关系，即

$$\{(x,T(x))\mid x\in A\}\subset A\times B$$

等价关系：设 A 为给定的一个子集，若关系 $R\subset A\times A$，满足如下条件：

(1) 自反性　任意 $x\in A$，有 $(x,x)\in R$；

(2) 对称性　若 $(x,y)\in R$，则 $(y,x)\in R$；

(3) 传递性　若 $(x,y)\in R,(y,z)\in R$，则 $(x,z)\in R$；

则称 R 为 A 上的一个等价关系，此时若 $(x,y)\in R$，记为 $x\sim y$。

二元关系有各种不同的类型，其中等价关系占有很重要的地位。

例 1.2　(1) 设 A 表示一个学校在校学生之集，R 是 A 中的一个二元关系，此时我们规定：

$\forall a,b\in A,(a,b)\in R\Leftrightarrow a$ 与 b 住同一宿舍，则 R 是 A 中的一个等价关系。

(2) 整数集 $\mathbf{Z}$ 中的同余关系 $Z_n=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{Z},n/a-b,n 是非零整数\}$ 是一个等价关系。这里“m/n”表示 m 能被 n 整除，如 2/6，3/6 等。

1.1.3　可列集

自 19 世纪 70 年代以来，由德国数学家 Cantor 所开创的无穷集合理论，已成为现代数学的基础，根据两个集合所包含元素的多少程度来决定其区别，他的基本方法就是利用对等的概念。以后常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集。它们都是常用的无限集。

集合分为两类：有限集和无限集。空集与只含有有限个元素的集合称为有限集，其余的称为无限集。对于一个集合来说，其中元素的多少是最基本的问题之一，

如何比较两个集合元素的多少呢?在有限集的情况下,我们可以不必一一数出两个集中的元素的个数,而采用在两集之间建立"一一对应"的方法。例如,要比较某教室里学生数与座位数谁多谁少,如果每个学生都有一个座位,而且每个座位上都有一个学生,那么,我们根本用不着一个一个地去数学生与座位,便可断定学生数和座位数是相同的;若每个学生都坐一个座位后,还有空座位多出来,则可断定座位数比学生数多;若每个座位上都坐一个学生后,还有学生没有座位,则可断定座位数比学生数少。我们可以用这样的方法,研究比较无限集元素的多少,并对无限集"个数"进行分类,先引进对等概念。

【定义 1.1】 设 A,B 是两个集合,如果存在从 A 到 B 的一一映射 T,即 T 既是单射,也是满射,则称 A 与 B 对等,记为 $A \sim B$。规定空集 $\varnothing$ 与自身对等,即 $\varnothing \sim \varnothing$。

显然,两个有限集相互对等的充要条件是它们的元素个数相同。

对等关系"$\sim$",由定义知具有三个基本性质:

(1) 自反性 $A \sim A$;

(2) 对称性 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;

(3) 传递性 若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$。

例 1.3 证明{正整数全体} $\sim$ {正偶数全体}。

这里只需令 $T(x) = 2x$,(x 是正整数) 即可。

例 1.4 证明 $(0,1) \sim \mathbf{R}$。

证明: 只需对每个 $x \in (0,1)$,令 $\varphi(x) = \tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$,则 φ 是 $(0,1)$ 到 $\mathbf{R}$ 上的一一映射,所以 $(0,1) \sim \mathbf{R}$。

例 1.3,例 1.4 表明无限集可以和它的一个真子集一一对应,这对于有限集来说是不可能的。

【定理 1.1】 无限集必与它的某真子集对等。

证明: 设 A 为一个无限集,取出一个元素 $a_1 \in A$,因为 A 为无限集,则 $A - \{a_1\} \neq \varnothing$;同理,又从 $A - \{a_1\}$ 中取出元素 a_2,依此方法,可选取一列互异元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,记余集 $B = A - \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,则 $C = B \cup \{a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ 为 A 的真子集。定义映射 $T: A \to C$ 为 $T(a) = a$ 当 $a \in B$,且 $T(a_k) = a_{k+1}(k = 1,2,\cdots)$,则明显看出,$T$ 为 A 到 C 上的一一映射,故 $A \sim C$。

【定义 1.2】 凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为可列集(或可数集)。

由定义可知,若 A 是可列集,则 A 中全体元素可表成无穷序列的形式

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

如整数集 $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots\}$ 及三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x,$

$\cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 都是可列集。为得到更多稍微复杂的可列集的实例，先考察集合的某些性质。

【定理 1.2】 任意无限集必含有可列子集。

证明： 设 M 是一无限集，取 $x_1 \in M$，由于 M 是无限集，所以 $M - \{x_1\}$ 也是无限集，取 $x_2 \in M - \{x_1\}$，显然，$x_2 \in M$ 且 $x_1 \neq x_2$，依此办法，从 M 中可取出 n 个这样的互异元素 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$M - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是无限集，取 $x_{n+1} \in M - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，显然，$x_{n+1} \in M$ 且和 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都互不相同，这样由数学归纳法，得到 M 的一个无限子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，它显然是一个可列集。

类似可证明，可列集的子集若不是有限集，则一定为可列集。

【定理 1.3】 有限集或可列个可列集的并仍是可列集；可列个有限集的并(若为无限集)，也是可列集。

证明： 不失一般性，可假定可列集列 $\{A_n | n \in \mathbf{N}\}$ 的情形来证明，并可假定每个 A_n 是可列集且 $A_n \cap A_m = \varnothing (n \neq m)$，于是有

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\} \\
\qquad\quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\} \\
\qquad\quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\} \\
\qquad\quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
A_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \cdots\} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

我们依对角线原则(箭头所示)可把 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中全部元素排成列如下形式

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \cdots$$

故它是可列集。

由此我们可以得到一个有趣的例子：有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集。

事实上，因每个有理数 r 都可写成既约分数 p/q，其中 p 与 q 皆为整数，且规定 $q \in \mathbf{N}$。对每个固定的 $q \in \mathbf{N}$，$A_q = \{p/q : p \in \mathbf{Z}\}$ 是一可列集。明显 $\mathbf{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$ 为可列个可列集的并，故 $\mathbf{Q}$ 可列。

【定理 1.4】 设有一组可列集 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，则直积 $\prod_{k=1}^{n} A_k$ 也是可列集。

证明:只须证明 $r = 2$ 情形,一般情形可由归纳法获得。设 $A_1 = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$,$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$,则 $A_1 \times A_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{(x_k, y_m): m \in \mathbf{N}\}$,为可列集之并,故可列。

例 1.5 有理系数多项式全体为可列集。

事实上,容易知道零次有理系数多项式即为有理数,因而其全体是有理数集 $\mathbf{Q}$,故可列。对每个固定的 $n \in \mathbf{N}$,我们证明全体次数 $\leqslant n$ 的有理系数多项式的集合可列。任取次数 $\leqslant n$ 有理系数多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = P_n(x)$$

则其与直积集 $\prod_{k=1}^{n+1}\mathbf{Q}_k$ 中元素 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 一一对应,其中 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$,$(k = 1, 2, \cdots, n+1)$,故推得次数 $\leqslant n$ 有理系数全体可列。从而有理系数多项式全体

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n : a_k \in \mathbf{Q}, k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

是可列集。

但也存在不可列无限集。

【定理 1.5】 点集 $(0,1) = \{x \in \mathbf{R}: 0 < x < 1\}$ 是不可列的无限集。

证明:用反证法,我们证明 $(0,1)$ 不可列。假设 $(0,1)$ 可列,则其中全体实数可排成一列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$。将每个 x_k 用十进制无限小数表示,则有

$$x_1 = 0.t_{11}t_{12}t_{13}t_{14}\cdots$$

$$x_2 = 0.t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}\cdots$$

$$x_3 = 0.t_{31}t_{32}t_{33}t_{34}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中所有的 t_{ij} 都是从 $0,1,2,\cdots,9$ 中取值,并且对每个 i,数列 $\{t_{ij}: j = 1, 2, \cdots\}$ 应有无限个不为 0,即小数 0.320 00⋯ 应改写为 0.319 9⋯。

作十进制小数 $x = 0.b_1b_2b_3\cdots$,当 $t_{ii} = 1$ 时,令 $b_i = 2$;而若 $t_{ii} \neq 1$,则令 $b_i = 1$。明显 $x \in (0,1)$,但因对每个 n,$b_n \neq t_{nn}$,故 $x \neq x_n$,这与假设矛盾。

【定义 1.3】 设 A, B 是两个集,则:

(1) 若 A 与 B 对等,则说 A 与 B 有相同的势(或基数),记 A 的势为 $\overline{\overline{A}}$,B 的势为 $\overline{\overline{B}}$,则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

(2) 若 A 与 B 的某子集对等,则说 A 的势不大于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A}}$),又若 B 不与 A 的任一子集对等,则说 A 的势小于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$)。

注：

(1) 势是集合元素个数的一般化，当 A 为有限集时，$\overline{\overline{A}}$ 就是 A 中元素的个数。

(2) 对有限集而言，其真子集的势一定小于它本身的势。

(3) 集 $(0,1)$ 的势称为连续点集的势，并且明显 $\overline{\overline{(0,1)}}$ 大于可列集的势。由例 1.4 知 $\overline{\overline{(0,1)}}=\overline{\overline{\mathbf{R}}}$。

【定理 1.6】　设 A 为有限集或可列集，B 是任一无限集，则 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$。

证明：因 B 是无限集，由定理 1.2 知，存在可列子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}=C\subset B$，不失一般性，设 $A\cap B=\varnothing$，由于 $A\cup C$ 仍是可列集，故 $A\cup C\sim C$，再注意 $B-C\sim B-C$，可推得 $A\cup B=(A\cup C)\cup(B-C)\sim C\cup(B-C)=B$。即 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$。

由公式 $y=a+(b-a)x$ 可建立点集 $[0,1]$ 与点集 $[a,b]$ 之间的一一对应，故 $\overline{\overline{[a,b]}}=\overline{\overline{[0,1]}}=\overline{\overline{(0,1)}}=\overline{\overline{\mathbf{R}}}$。设无理数全体为 A，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{(A\cup\mathbf{Q})}}=\overline{\overline{\mathbf{R}}}$。

故无理数集的势为连续点集的势。据此，我们可得到这样的认识：无理数要比有理数多得多。

习题　1.1

1. 证明：(1) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$；

　(2) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$；

　(3) $(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)-B=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$。

2. 对任何集 A,B,C，证明以下关系式成立

$$A\cap(B-C)=A\cap B-C。$$

3. 设 $A_n=\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right]$，$n=1,2,\cdots$。求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。

4. 设映射 $T:A\to B$，试证明：

(1) 若 $A_1\subset A$，则 $T^{-1}(T(A_1))\supset A_1$，若 $B_1\subset B$，则 $T(T^{-1}(B_1))\supset B_1$，并举例说明等号不一定成立。

(2) 若 $A_1\subset A$，证明 $T(A-A_1)\supset T(A)-T(A_1)$，并举例说明等号不一定成立。

5. 设 A 为平面上所有直线之集，R 是 $A\times A$ 中满足下列条件的子集：

$$R=\{(l_1,l_2)\mid l_1,l_2\in A,l_1/\!/l_2\text{ 或 }l_1=l_2\}$$

试证 R 是 A 的一个等价关系。

6. 设 A 为可列集，B 是由 A 的全体有限子集构成的集合，证明：B 是可列集。

7. 证明可列集 A 关于任意映射 T 的像至多为可列集。

8. 证明以有理数为中心且以有理数为半径的区间全体是可列集。

9. 建立闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)的一一对应。

10. 建立闭区间$[a,b]$与 **R** 的一一对应。

1.2 实数集的基本结构

众所周知,由于实数与直线建立了一一对应关系,使得实数和几何图形有机地结合起来,实数成为十分有意义的一类数集。我们在中学就已经知道实数包括有理数和无理数,然而并不清楚无理数与有理数的本质区别是什么。从历史上看,人们在公元前古希腊时期业已发现了不可公度线段,指出了"无理数"的存在,但有关实数的基本理论却直到19世纪末,为奠定微积分基础的需要才完整地建立起来。

1.2.1 建立实数的原则及实数的序关系

实数是在有理数基础上扩充出的完备数集,有理数全体组成的集合又构成一个阿基米德(Archimedes)有序域,有理数扩充到实数后,**R** 首先要仍然构成阿基米德有序域,这很重要。

【定义 1.4】 数域 F 构成阿基米德有序域,是指 F 满足如下三个条件:

(1)F 是域,即在 F 中定义了加法"+"与乘法"·"两个运算,使 F 中任意元素 a,b,c 满足:

① 加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$;

② 加法交换律 $a+b=b+a$;

③ 乘法结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

④ 乘法交换律 $a\cdot b=b\cdot a$;

⑤ 乘法关于加法分配律 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$。

在 F 中存在 $0\in F$,使得对任何 $a\in F$ 有 $a+0=a$,称"0"为零元素;对每一个 $a\in F$,存在 $-a\in F$,使 $a+(-a)=0$,称"$-a$"为 a 的反元素;在 F 中还存在 $e\in F$,使对任何 $a\in F$,有 $a\cdot e=a$,称"e"为单位元素;对任一非零元素 $a\in F$,$a\cdot a^{-1}=e$,称 a^{-1} 是 a 的逆元素。

(2)F 是有序域,即在 F 中定义如下性质的序关系"<",满足:

① 传递性 若 $a<b,b<c$ 则 $a<c$;

② 三歧性 F 中任意两个元素 a 与 b 之间存在

$$a<b,a=b,a>b$$

这两种关系必居其一,且只居其一。

又当序关系与加法、乘法运算结合起来,有如下性质:

加法保序性,即若 $a<b$,则对任何 $c\in F$,有 $a+c<b+c$;