弹性支承連續梁在公路桥梁上的应用

楼 辰 王伯惠 史尔毅 等編譯

史尔毅 編

人民交通出版社

彈性支承連續梁
在公路桥梁上的应用

楼 辰 王伯惠 史尔毅 等編譯

史尔毅 編

人民交通出版社

本書是选集若干篇有关彈性支承連續梁在公路桥梁上应用的文集，內容包括：彈性支承連續梁計算的基本公式、图解、及計算中的有关問題并有1～10跨支承連續梁支承反力影响綫表、装配式鋼筋混凝土上部构造横梁計算以及用彈性支承連續梁方法計算木桥組合梁的問題討論等。采用本書所介紹的方法設計，可使計算加速，并为国家社会主义建設节約材料方面起很大作用。

彈性支承連續梁在公路桥梁上的应用

樓 宸　王伯惠　史尔毅等編譯

史尔毅　編

*

人 民 交 通 出 版 社 出 版

（北京安定門外和平里）

北京市書刊出版業營業許可証出字第〇〇六号

新　华　書　店　发　行

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1959年6月北京第一版　　1959年6月北京第一次印刷

开本：850×1168 $\frac{1}{32}$　　印張：6$\frac{3}{8}$　　張插頁 1

全書：230,000字　　印数：1— 2900 册

統一書号：15044-1304

定价（10）：1.16元

目　录

序言

序　言

自我們从苏联的木桥上学到用彈性支承梁的計算方法来考虑縱橫梁的彈性分布，至今已經有四、五年了。这段时間，許多同志为了节約材料，以及为了使計算加速和精确，付出了許多力量，使这方面的知識逐漸丰富和完整起来。

这里搜集了几篇文章，有的散見于杂志，有的尚未发表过，目的是在于把它們放在一起，使讀者对此問題的現阶段情况有一全面的了解，便于研究此問題的同志們参考应用。

彈性支承連續梁法，主要用于公路木桥面載重的彈性分布。但是在这方面，时常只限于研究一列車載在桥面上，或一个車輪載在一根縱梁上，而对于橫向有两列車及一根縱梁上有两个輪或两个輪以上荷載的情况，还缺乏研究。本書內征得王伯惠同志"公路木桥面彈性計算有关問題"一文，涉及范圍，甚为深广。

除了在木桥上应用之外，最近在設計裝配式鋼筋混凝土上部构造的載重分布，特别是橫梁計算，也运用了这个方法，本書內作了簡单的介紹。

書中还介紹了彈性梁的基本公式。这些公式是苏联 B.C. 奥西波夫著"彈性支承連續梁表"內的材料。所附各表，一部分是这本書原有的，一部分則是樓辰同志計算补充的，樓辰同志的九跨和十跨梁表，对于寬桥面及縱梁較密的很有用。另外还附了苏联1954年标准图第一册"木桥"的計算例題和表，为以往設計公路木桥一般所遵循的方法。

彈性分布的計算的簡化，本書也有論述。并对于将来設計的进一步加速簡化，指出途徑。

編　者

計算彈性支承連續規則梁的基本公式

下面是关于計算在彈性支点上的連續規則梁的公式。規則梁就是支承在等彈性支座上的断面不变的，跨徑相等的梁。

支点的反力 R_r 及其沉陷 δ_r 間的关系由下式表示之：

$$R_r=\omega\delta_r, \tag{1}$$

式中：W——为支座的剛性；支座的剛性等于支点沉陷每一公分所生的反力（以公斤/公分表示）

关于連續規則梁第 r 支点在集中外力作用下（图 1）的沉陷由下式决定：

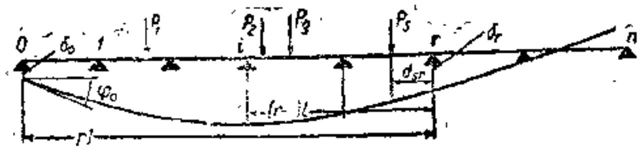

图 1

$$\delta_r=\delta_0+\varphi_0 rl-\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{R_i(r-i)^3l^3}{6EJ}+\sum_{s=1}^{s}\frac{P_s d_{sr}^3}{6EJ}$$

$$=\delta_0+\varphi_0 rl-\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_i(r-i)^3+\frac{\alpha}{\omega}\sum_{s=1}^{s}P_s t_{sr}^3, \tag{2}$$

式中： δ_r——支点 r 的沉陷；

δ_0——第一个支点 0 的沉陷；

φ_0——彈性綫在支点 0 处的傾角；

$(r-i)l$——在支点 r 左边的任一支点 i（其反力为 $R_i=\omega\delta_i$）至支点 r 的距离；

d_{sr}——$t_{sr}l$ = 支点 r 左边的外力 $P_1, P_2\cdots\cdots P_s$ 等至支点 r 的距离；

l——梁的跨徑；

$\alpha=\frac{\omega l^3}{6EJ}$——常数表示連續規則梁的柔度；

EJ——梁的刚性。

注： 梁的沉陷，不一定完全向下，有的向上，本書在未知其方向前，一律評为沉陷——譯者。

当一个集中外力$P=1$作用于梁的支点s上时，则公式（2）可以写成下面的形式：

$$\delta_{rs}^{P}=\delta_{0s}^{P}+\varphi_{0s}^{P}rl-\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_{is}^{P}(r-i)^{3}+\frac{\alpha}{\omega}t_{sr}^{3}. \tag{3}$$

計算在集中外力$P=1$之左的支点沉陷时（3）式中的末一项等于0，其沉陷之計算公式如下：

$$\delta_{rs}^{P}=\delta_{0s}^{P}+\varphi_{0s}^{P}rl-\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_{is}^{P}(r-i)^{3}. \tag{3'}$$

与（3′）式同理，当一个弯矩$M=1$，顺时針方向作用在支点n时，各支点的沉陷可用下式計算之：

$$\delta_{rn}^{M}=\delta_{on}^{M}+\varphi_{0n}^{M}rl-\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_{in}^{M}(r-i)^{3}, \tag{4}$$

这里δ和φ上边的指数M表示这些数值是由于$M=1$作用于梁上时所产生的。

如果力$P=1$作用于梁的悬臂上（图2）则把它从作用点m化为作用在

图 2

极右端支点n的力及弯矩，并用下列公式来决定支点的沉陷：

$$\Delta_{rm}^{P}=\delta_{rn}^{P}+kl\,\delta_{rn}^{M}, \tag{5}$$

式中：Δ_{rm}^{P}——作用于m点的外力$P=1$所产生的支点r的沉陷。

δ_{rn}^{P}——作用于支点n的力$P=1$所产生的支点r的沉陷。

δ_{rn}^{M}——顺时針方向作用于n处的弯矩$M=1$所产生的支点r的沉陷；

k——$d:l$ 其中 d 为外力 $P=1$ 在悬臂上的作用点 m 至支点 n 的距离。

由(3)(3′)及(5)各式，可以看出，每个支点的沉陷可用两个未知的原始参变数的函数来表示。这两个参变数就是开始支点的沉陷 δ_0 及該处之傾角 φ_0。根据作用于梁之全部外力及反力可以写出两个联立方程式 $\Sigma Y=0$ 及 $\Sigma M=0$ 来，解此联立方程式就可得出 δ_0 及 φ_0 之値。然后将此 δ_0 及 φ_0 之値代入各支点之沉陷公式內，即可求出各該支点之沉陷値。

当 δ_0 及 φ_0 之値为已知，以公式(3′)及(4)能算出挠度图在各支点处之縱坐标値。至于支点間各縱坐标値，可用下述方法来計算:

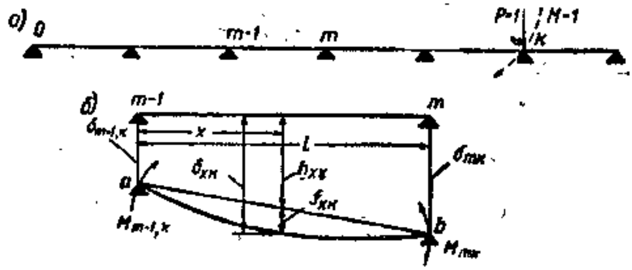

图 3

取梁之任一跨孔 $m-1$，m 研究之：当載重 $P=1$ 及弯矩 $M=1$ 作用于 $m-1$，m 孔右方的某一支点 k 上时(图3a)在以外力($P=1$ 或 $M=1$)之作用下，梁之各支点均发生沉陷：第 $m-1$ 支点之沉陷为 $\delta_{m-1,k}$ 第 m 支点沉陷为 $\delta_{m,k}$，用支座 $m-1$ 及 m 之中綫，从梁內截出 $m-1$，m 跨孔来：左右截去部分之影响代以力矩 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk}，(图3,б)。这样 $m-1$，m 孔可視为在不同高度的剛性支承上的单跨梁，該梁的两端有弯矩 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk} 作用于其上。梁上任何一点距支点 $m-1$ 为 x 則該点的沉陷 δ_{xk} 可由(1)两支点沉陷 $\delta_{m-1,k}$ 及 δ_{mk} 在 x 处所生之沉陷 h_{xk} 及(2)由于弯矩 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk} 在 x 处所生之挠度 f_{xk} 两者之和求出，即

$$\delta_{xk}=h_{xk}+f_{xk}。\qquad (a)$$

由梯形 $a,m-1,m,b$(图3,б)得出

$$h_{xk}=\delta_{m-1,k}+(\delta_{mk}-\delta_{m-1,k})u, \qquad (б)$$

式中 $u=x:l$。

由 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk} 两弯矩作用所产生的挠度 f_{xk} 将为:

$$f_{xk}=\frac{M_{m-1,k}lx}{6EJ}\left[2+\frac{M_{mk}}{M_{m-1,k}}-\frac{3x}{l}-\right.$$

$$-\left(\frac{M_{mk}}{M_{m-1,k}}-1\right)\frac{x^2}{l^2}\Big]=\frac{l_x}{6EJ}\Big[M_{m-1,k}\left(2-3\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)+$$

$$+M_{mk}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\Big]. \qquad (в)$$

弯矩 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk} 可用支点反力的函数表示之:

$$M_{m-1,k}=R_{0k}(m-1)l+R_{1k}(m-2)l+\cdots\cdots+R_{m-2,k}l$$

$$=l\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}(m-1-i)。 \qquad (г)$$

使

$$A_{m-1,k}=\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}(m-1-i), \qquad (6)$$

则得

$$M_{m-1,k}=A_{m-1,k}l; \qquad (г')$$

又

$$M_{mk}=R_{0k}(m-0)l+R_{1k}(m-1)l+\cdots+R_{m-1,k}l$$

$$=M_{m-1,k}+l\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}。 \qquad (д)$$

使

$$B_{m-1,k}=\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik} \qquad (7)$$

并由 г′ 式，得

$$M_{mk}=(A_{m-1,k}+B_{m-1,k})l. \qquad (д')$$

将以上所得 $M_{m-1,k}$ 及 M_{mk} 之值，代入公式(в)，并略加演化可列出下式(8)。由此，可算出在外力 $P=1$ 或弯矩作用下 $M=1$ 梁的挠度图的支点的各个縱坐标的数值:

$$\delta_{xk}=\delta_{m-1,k}+(\delta_{mk}-\delta_{m-1,k})u+\frac{3\alpha}{\omega}A_{m-1,k}(u-u^2)+$$

$$+\frac{\alpha}{\omega}B_{m-1,k}(u-u^3)。 \qquad (8)$$

在計算了 $m-1$，m 跨孔以后来計算下一跨孔 $m, m+1$ 孔时，系数 A_{mk} 及 B_{mk} 可以用公式(9)及(10)相应求出。公式(9)及(10)不难由公式(г)及

(Ⅱ)推求出来。

$$A_{mk}=A_{m-1,k}+B_{m-1,k},\tag{9}$$

$$B_{mk}=B_{m-1,k}+\eta_{mk}.\tag{10}$$

設外力$P=1$或弯矩$m=1$作用于梁的支点$m-1$上或者作用于其左边，则在求$M_{m-1,k}$及M_{mk}的公式中便含有受P及M直接作用影响的各項。同时支点間各縱坐标的数值仍用公式(8)来求得，但系数A及B具有另外的数值。当外力$P=1$作用时为：

$$A'_{m-1,k}=\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}(m-1-i)-(m-1-k)$$

$$=A_{m-1,k}-(m-1-k),\tag{11}$$

$$B'_{m-1,k}=\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}-1=B_{m-1,k}-1;\tag{12}$$

当力矩$M=1$作用时

$$A'_{m-1,k}=\sum_{i=0}^{i=m-1}R_{ik}(m-1-i)+\frac{1}{l}=A_{m-1,k}+\frac{1}{l}.\tag{13}$$

而系数$B'_{m-1,k}$則用公式(7)求得之。

当系数为$A'_{m-1,k}$及$B'_{m-1,k}$的时候也适用公式(9)及(10)。

撓度綫之傾角可由δ_{xk}对x之第一次微导数求得之，以(8)式，微分之，得

$$\varphi_{xk}=(\delta_{mk}-\delta_{m-1,k})\frac{1}{l}+\frac{3\alpha}{\omega l}A_{m-1,k}(1-2u)+$$

$$+\frac{\alpha}{\omega l}B_{m-1,k}(1-3u^2).\tag{14}$$

公路木桥面載重的彈性分布

一、求力之分布系数

（一）应用公式及公式的計算

1. 公式：

苏联公路木桥書籍中，一般均列出了計算木桥面上載重的彈性分布公式：当集中載重作用于某中部梁而分布到三根梁时：

$$P_1=\frac{1+2K}{3+2K}P; \qquad P_2=\frac{1}{3+2K}P。$$

分布到五根梁时：

$$P_1=\frac{1+18K+7K^2}{5+34K+7K^2}P; \qquad P_2=\frac{1+11K}{5+34K+7K^2}P;$$

$$P_3=\frac{1-3K}{5+34K+7K^2}P。$$

分布到七根梁时：

$$P_1=\frac{1+72K+131K^2+26K^3}{7+196K+193K^2+26K^3}P; \quad P_2=\frac{1+57K+46K^2}{7+196K+193K^2+26K^3}P;$$

$$P_3=\frac{1+29K-18K^2}{7+196K+193K^2+26K^3}P; \quad P_4=\frac{1-18K+3K^2}{7+196K+196K^2+26K^3}P。$$

以上各式左边之 P_1，P_2，P_3，P_4 为力 P 分布到各梁的压力，其值各等于力 P 乘以一个系数，此系数被称为力之分布系数（本文一律以 c 表示，在力下者为 c_1，其次者 c_2，再其次者为 c_3）。为了了解此系数的来源，用以下的方法，举例証明之。

2. 撓矩面积法：

于图 1 中表示木桥桥面板支承于多数梁上，作用力 P 分布到五根梁的情况。設集中力 P 作用于中間梁 4 处桥面板上，由于桥板及梁的弯曲，力遂被分布于 2,3,4,5,6 各号梁上。結果在 4 号梁的压力为 P_1；由对称的关系，3 号及 5 号梁上的压力各为 P_2；2 号及 6 号梁上的压力各为 P_3。而各压力之和应等于作用力 P，即

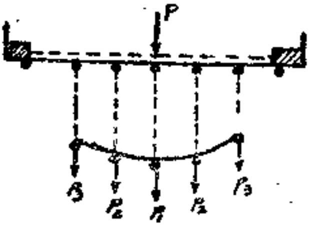

图1　中部梁受力之分布

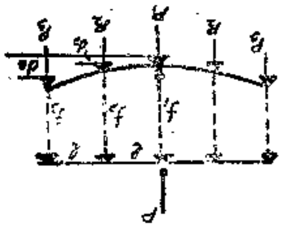

图2　梁及板受力后之变位

$$P=P_1+2P_2+2P_3。\qquad (1)$$

由 P 之作用，对梁产生向下之压力 P_1，P_2，P_3 等，更由 P_1 使梁4下沉 f_1；P_2 使梁3及5下沉 f_2；P_3 使梁2及6下沉 f_3（見图2，上边为原来位置，下边为沉陷后位置）。

桥板对梁之压力，各等于梁对板之反力。取桥板为一孤立体，可反觀之为支持于力 P 之两个悬臂板，而有力 P_1，P_2，P_3 作用其上（图2）。因各力之作用，使板发生变位，假設在 P_2 处所产生的变位为 d_2；在 P_3 处所产生的变位为 d_3，則由图中可見下列关系：

$$f_1-d_2=f_2, \qquad (2)$$

$$f_1-d_3=f_3。\qquad (3)$$

假設集中載重 P 作用于梁的跨徑中点处桥板上，且如普通木桥的一般情况，各梁之尺寸及支撑情况均相同，則沉陷 f_1，f_2，及 f_3 可用普通变位公式求出之：

$$f_1=\frac{P_1L^3}{48E_1I_1}, \quad (4) \quad f_2=\frac{P_2L^3}{48E_1I_1}, \quad (5) \quad f_3=\frac{P_3L^3}{48E_1I_1}; \quad (6)$$

其中　L—梁的跨徑；E_1—梁的彈性模量；I_1—梁断面慣矩。而 d_1 及 d_2 之值，可用撓矩面积法求之，为

$$d_2=\frac{l^3}{6E_2I_2}(2P_2+5P_3), \qquad (7)$$

$$d_3=\frac{l^3}{6E_2I_2}(5P_2+16P_3); \qquad (8)$$

其中　l—梁之間距（桥板的跨徑）；E_2—板之彈性模量；I_2—板断面慣矩。

将 f 及 d 之值代入（2）式及（3）式內，并經过变化，得

$$P_1=(2K+1)P_2+5KP_3, \qquad (9)$$

$$P_2=5KP_2+(16K+1)P_3; \qquad (10)$$

其中 $K=\frac{8I_1l^3}{I_2L^3}$=梁中点弹性傳递系数。

解此二式得
$$P_3=\frac{1-3K}{1+11K}P_2, \qquad (11)$$

$$P_1=\frac{1+18K+7K^2}{1+11K}P_2; \qquad (12)$$

代入(1)式解之得
$$P_2=\frac{1+11K}{5+34K+7K^2}P;$$

更将此值代入(11)及(12)，求出

$$P_3=\frac{1-3K}{5+34K+7K^2}P \quad 及 \quad P_1=\frac{1+18K+7K^2}{5+34K+7K^2}P。$$

以上得出的公式为假設 P 作用于梁之跨徑中央者，如在其他某点，則 f 各値均为該点者，仍可求出同样公式，仅 K 之値与中点者不同而已。

3. **原始參变数計算法：**

以上的公式可以用另外一个更普遍的方法来証明。因为力傳布于各梁上之压力，卽等于各梁对板之反力。这个方法是将桥面板看成支承在梁上的彈性支承連續梁，可以采用为苏联学者所創造和广泛应用了的原始参变数計算法来計算。用这个有高度效用的計算超靜定結构的方法，可以算出在任何数目的集中載重作用下，任何数目梁每根梁的反力。

在力的作用下，梁发生沉陷。某支点 r 的反力 R_r 与其沉陷 δ_r 間的关系为：

$$R_r=\omega\delta_r, \qquad (A)$$

其中 ω—支座剛性，等于支点沉陷一单位长度所生反力。

又因普通桥面板断面为不变的，支承梁是等間距的，而且梁板的尺寸均有一定，两者的材料也相同。因此桥面板可視为支承于等彈性支点上的連續規則梁。图3表示 n 孔連續梁在任意数目集中外力作用下的变位情况。关于第 r 支点在力的作用下所生的沉陷值，由下式决定：

$$\delta_r=\delta_0+\varphi_{0r}l-\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{R_i(r-i)^3l^3}{6E_2I_2}+\sum_{s=1}^{s}\frac{P_sd_{sr}^3}{6E_2I_2}$$

$$=\delta_0+\varphi_0 rl-\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_i(r-i)^3+\frac{\alpha}{\omega}\sum_{s=1}^{s}P_s t_{sr}^3 \qquad (B)$$

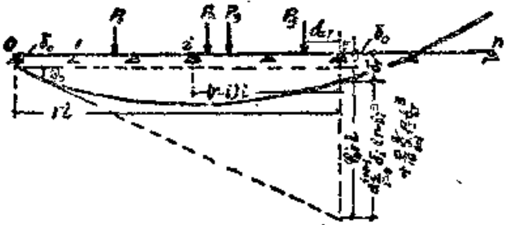

图 3　支点 r 的沉陷

其中：　δ_r——支点 r 的沉陷；

δ_0——第 1 支点 o 的沉陷；

φ_0——支点 o 处变位綫的角变；

$(r-i)l$——在支点 r 左边的任一支点 i（其反力 $R_i=\omega\delta_i$）至第 r 支点間的距离。

$d_{sr}=t_{sr}l$ 为在支点 r 左边之外力 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_s$ 等至支点 r 間的距离；

l——連續梁的跨徑；

$\alpha=\frac{\omega l^3}{6E_2I_2}$——常数，为連續規則梁之柔性特性；

E_2I_2——梁的剛性。

上式之意义乃假設第一支点 o 为原始点，則原始參变数为支点 o 的沉陷 δ_0 及其角变 φ_0，設 δ_0 及 φ_0 之値为已知，然后求各支点的沉陷。第 r 支点的沉陷是由原始点 o 处情况所引起的 δ_0 加上 o 处角变 φ_0 乘以 o 至 r 之距离即 $\varphi_0 rl$；由 r 左边支点反力引起者为式中右边第三項，由左边各外力引起者为式中第四項。r 点之总沉陷 δ_r 为四項之和（見图 3）。

求梁上任一点沿通过其点之垂直軸对 o 点切綫之变位，用变位公式

$$\int_0^x\int\frac{Mdx}{EI}dx,$$

其中 M 为断面左边各支点反力及作用力在 x 断面內所生的撓矩之和，現情况下其値为

$$\Sigma R_i x+\Sigma P_s x;$$

其中 R_i 为計算断面左边任一支点的反力，P_s 为左边任一作用力，x 为該反

力或作用力至該断面的距离。今将各反力及作用力的影响，分别計算之。

因 R_i 在 r 点所生变位为

$$\int_0^{(r-i)l}\int\frac{Mdx}{E_2I_2}dx=\int_0^{(r-i)l}\int\frac{R_ix}{E_2I_2}dxdx=\frac{R_i(r-i)^3l^3}{6E_2I_2},$$

則 r 点左边各反力使 r 发生的总变位为 $\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{1}{6E_2I_2}R_i(r-i)^3l^3$。其方向与由原始点所产生者相反，故为負号。至于作用力 P 使 r 点变位的計算，同于反力計算，不过 R_i 被换为 P_s 而 $(r-i)^3l^3$ 則被 d^3_{sr} 代替而已。其方向向下，故同于 δ_0 及 $\varphi_0 rl$。（此計算可用撓矩面积法，因 R_i 及 P_s 之力矩图均为三角形，故变位之求出甚易。）

力 P 及沉陷，自上向下为正；支点反力，自下向上为正；撓矩及轉角，順时針方向为正。

又因
$$\alpha=\frac{\omega l^3}{6E_2I_2}，則\ \omega=\frac{\alpha 6E_2I_2}{l^3},$$

故
$$R_i=\omega\delta_i=\frac{\alpha 6E_2I_2}{l^3}\delta_i;$$

所以以上的

$$\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{R_i(r-i)^3l^3}{6E_2I_2}=\alpha\sum_{i=0}^{i=r-1}\delta_i(r-i)^3。$$

同理求出

$$\sum_{s=1}^{s}\frac{P_sd^3_{sr}}{6E_2I_2}=\frac{\alpha}{\omega}\sum_{s=1}^{s}P_st^3_{sr},$$

因为 $d^3_{sr}=t^3_{sr}l^3$ 之故也。

公式于此証明，再談其利用。欲求支点沉陷 δ_r 之值，必先求原始参变數 δ_0 及 φ_0 之値。求 δ_0 及 φ_0 可由作用外力之和等于反力和，与反力及外力对任一支点之撓矩和为零两条件，写出两个方程 $\Sigma Y=0$ 及 $\Sigma M=0$，再解此联立方程而得之。

当原始参变數 δ_0 及 φ_0 之値已知，代入(B)式，可求出任一支点的沉陷値

δ_r；再将 δ_r 之值代入(A)式，可求出該支点之反力 R_r。

为了了解原始参变数算法的运用，仍取力 P 分布五根梁为例，求 P_1，P_2，P_3 之值。（即求下图中四孔連續梁当 P 作用于梁2上时 R_2，R_1，R_0 之值。）

用公式(B)先求各点之沉陷：

(1) $\delta_0=\delta_0$，

(2) $\delta_1=(1-\alpha)\delta_0+\varphi_0 l$，

(3) $\delta_2=(1-9\alpha+\alpha^2)\delta_0+(2-\alpha)\varphi_0 l$，

(4) $\delta_3=(1-36\alpha+17\alpha^2-\alpha^3)\delta_0+$

$$+(3-10\alpha+\alpha^2)\varphi_0 l+\frac{\alpha}{\omega}P,$$

图4　求四孔梁的支点反力

(5) $$\delta_4=(1-100\alpha+135\alpha^2-25\alpha^3+\alpha^4)\delta_0+(4-46\alpha+18\alpha^2-\alpha^3)\varphi_0 l-$$

$$-\frac{\alpha^2}{\omega}P+8\frac{\alpha}{\omega}P。$$

由作用力之和等于反力和 $\Sigma Y=0$ 知：

$$\Sigma R-P=\Sigma\omega\delta-P=\omega(\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4)-P=0。$$

将已得沉陷值(1)—(5)代入此式，經若干变化得：

$$\omega\Big[(5-146\alpha+153\alpha^2-26\alpha^3+\alpha^4)\delta_0+(10-57\alpha+19\alpha^2-\alpha^3)\varphi_0 l-$$

$$-\frac{\alpha^2}{\omega}P+9\frac{\alpha}{\omega}P\Big]-P=0\qquad(a)$$

其次再以任一支点处为自由支承撓矩和为零之情况，任意取支点4为中心，写出

$$\Sigma M_4=4lR_0+3lR_1+2lR_2+lR_3-2lP=0；$$

即　　$$4\omega\delta_0+3\omega\delta_1+2\omega\delta_2+\omega\delta_3-2P=0。$$

将已得沉陷值(1)—(5)代入此式并化簡之得：

$$\omega\varphi_0 l=\frac{(2-\alpha)P-\omega\delta_0(10-57\alpha+19\alpha^2-\alpha^3)}{10-12\alpha+\alpha^2}。\qquad(b)$$

将此值代入(a)式并解之，得

$$\omega\delta_0=\frac{10-22\alpha-24\alpha^2}{50+380\alpha+342\alpha^2+56\alpha^3}P；$$

設式中分母等于 D，則

$$\omega\delta_0=\frac{P}{D}(10-22\alpha-24\alpha^2)。\qquad (c)$$

將(c)代入(b)，解之得

$$\omega\varphi_0 l=\frac{0+1500\alpha-900\alpha^2-1170\alpha^3+378\alpha^4-24\alpha^5}{D(10-12\alpha+\alpha^2)}P。\qquad (d)$$

將(c)及(d)之値代入(1)—(5)各式內，可求出各支点之沉陷δ。再由 $R=\omega\delta$之关系，得出支点反力，其値如下：

$$R_2=\omega\delta_2=\frac{P}{D}(10+188\alpha+214\alpha^2+56\alpha^3)；$$

$$R_1=R_3=\frac{P}{D}(10+118\alpha+88\alpha^2)；$$

$$R_0=R_4=\frac{P}{D}(10-22\alpha-24\alpha^2)。$$

以上 $\omega\delta$ 之表出法，可由現成表中查出。驟視之，其形式較为复杂，若上下均以 $10+8\alpha$ 除之，則得出

$$R_2=\frac{1+18\alpha+7\alpha^2}{5+34\alpha+7\alpha^2}P;\qquad R_1=R_3=\frac{1+11\alpha}{5+34\alpha+7\alpha^2}P;$$

$$R_0=R_4=\frac{1-3\alpha}{5+34\alpha+7\alpha^2}P。$$

与撓矩面积法比較，除式中 α 代替前法之 K 外，余均相同。进而我們要証明柔性特性 α 卽彈性傳遞系数 K。

因桥板被視为彈性支承上的連續規則梁，則 $\alpha=\frac{\omega l^3}{6E_2I_2}$，其中 ω 为 P 所在处支座，卽支承桥板之梁，每沉陷一单位长度所生之反力。当 P 位于支承梁之中点处桥板上时，支承梁受到分布后之力設为 P_x，其沉陷將为 $\frac{P_xL^3}{48E_1I_1}$；

故 $$\omega=P_x:\frac{P_xL^3}{48E_1I_1}=\frac{48E_1I_1}{L^3}，\text{而 } \alpha=\frac{48E_1I_1l^3}{6E_2I_2L^3}。$$

一般$E_1=E_2$，則