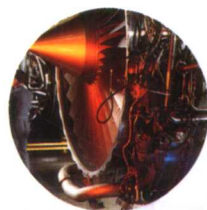




普通高等教育“十一五”国家级规划教材



龙述尧 蒯行成 刘腾喜 编著

计算力学

湖南大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

0302

10

2007

龙述尧 蒯行成 刘腾喜 编著

计算力学

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

内容包括绪论、数值方法的基本理论、弹性力学平面问题的有限元法、单元和插值函数、数值积分及等参元数值积分的精度、杆件问题的有限元法、轴对称问题的有限元法、板弯曲问题的有限元法和结构动力学问题的有限元法。

本书可作为工程力学专业计算力学课程的教材,也可作为机械、土木、航空、水利、桥梁、交通运输、船舶、采矿工程等有关专业本科生、研究生的有限元法课程的教材,还可供上述各工程领域的科研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算力学/龙述尧,蒯行成,刘腾喜编著. —长沙:湖南大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-81113-156-7

I. 计... II. ①龙...②蒯...③刘... III. 计算力学—高等学校—教材
IV. O320

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 005757 号

计算力学

Jisuan Lixue

作 者: 龙述尧 蒯行成 刘腾喜 编著

责任编辑: 厉 亚

责任印制: 陈 燕

封面设计: 张 毅

出版发行: 湖南大学出版社

社 址: 湖南·长沙·岳麓山

邮 编: 410082

电 话: 0731-8821691(发行部),8821142(编辑室),8821006(出版部)

传 真: 0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱: pressliy@hnu.cn

网 址: <http://press.hnu.cn>

印 装: 湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)

开本: 787×1092 16开

印张: 21.5

字数: 497千

版次: 2007年1月第1版

印次: 2007年1月第1次印刷

印数: 1~4 000册

书号: ISBN 978-7-81113-156-7/O·69

定价: 34.00元

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错,请与发行部联系

前 言

在现代科学技术和工程领域中,随着计算机科学技术的迅猛发展,数值分析方法成为与解析方法、实验分析方法并列的三种主要分析方法。现代工科学生,尤其是工程力学专业的学生必须在掌握解析和实验分析方法的同时,还要着重掌握数值分析方法的基本原理、基本方法和基本步骤。学生学习完数值分析方法课程后,能够运用所学的基本理论把所分析的问题较准确地抽象为计算模型,能够熟练地编制程序和利用分析软件对计算模型进行分析计算,也能够根据各种数值分析方法的优缺点,选择一种最适宜于分析计算的数值方法。

本书是根据1990年作者为工程力学专业本科生学习计算力学而编写的讲义的基础上改写而成的,原讲义名称为《有限单元法的理论及程序》。1997年对原讲义进行了部分修改,增加了流体力学问题和动力学问题的有限单元法的内容,并更名为《工程力学中的数值分析方法》。2002年结合国家教育部的教改课题“工程力学专业创新能力培养和系列课程综合改革的研究”对讲义进行了全面的修改,将课程内容沿着基于微分描述法和积分描述法的近似方法两条主线展开,将重点放在基于积分描述法的近似方法上,尤其是有限单元法上。

2006年,本书被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。结合几年来工程力学专业本科生的教学实践,将原书作了较大的修改,删去了一些在教学中没有讲授的内容,以适合于工程力学专业“计算力学”的课程内容和教学课时的基本要求,并将书名更改为《计算力学》。

本书此次出版,得到湖南大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

本书第6章由刘腾喜教授编写,第9章由蒯行成教授编写,其余章节均由龙述尧教授编写并统编了全书。

由于作者水平有限,疏漏之处恐仍难免,敬请读者批评指正。

作 者

2006年10月

目 次

第 1 章 绪论	1
第 2 章 数值方法的基本理论	4
2.1 两种描述方法	4
2.2 微分方程的近似求解方法 有限差分法(Finite Difference Method, FDM)	4
2.3 微分方程的等效积分形式和等效积分弱形式	21
2.4 基于等效积分形式的近似方法 加权残值法(Weighted Residual Method, WRM)	24
2.5 基于对称等效积分弱形式的近似方法 伽辽金有限元法(Galerkin Finite Element Method, GFEM)	32
2.6 基于非对称等效积分弱形式的近似方法 边界单元法(Boundary Element Method, BEM)	40
2.7 变分原理及其近似方法	48
2.8 弹性力学的基本方程和变分原理	76
习题	89
第 3 章 弹性力学平面问题的有限元法	92
3.1 结构的离散化	92
3.2 单元分析	93
3.3 整体分析	118
3.4 利用最小位能原理建立有限元格式	134
3.5 计算步骤	138
3.6 几个问题的讨论	141
3.7 常应变三角形单元解弹性力学平面问题的有限元程序	146
习题	158
第 4 章 单元和插值函数	162
4.1 引言	162
4.2 一维单元	163
4.3 二维单元	171
4.4 三维单元	182
4.5 等参单元	186
习题	218

第 5 章 数值积分及等参元数值积分的精度	220
5.1 一维数值积分	220
5.2 二维和三维数值积分	225
5.3 数值积分阶次的选择	230
5.4 非协调元和分片试验	234
习题.....	243
第 6 章 杆件问题的有限元法	245
6.1 引言	245
6.2 等截面直杆-梁单元.....	245
6.3 平面杆件系统	259
6.4 空间杆件系统	264
习题.....	266
第 7 章 轴对称问题的有限元法	267
7.1 引言	267
7.2 轴对称物体受轴对称载荷	267
7.3 轴对称物体受非轴对称载荷	276
习题.....	283
第 8 章 板弯曲问题的有限元法	284
8.1 引言	284
8.2 薄板的非协调板单元	286
8.3 薄板的协调板单元	295
8.4 位移和转角分别独立插值的板单元	299
8.5 离散克希霍夫(Kirchhoff)板单元(DKT)	303
习题.....	305
第 9 章 结构动力学问题的有限元法	306
9.1 运动方程	306
9.2 质量矩阵和阻尼矩阵	308
9.3 结构的无阻尼自由振动	312
9.4 振型叠加法	314
9.5 直接积分法	318
9.6 特征值问题的解法	324
9.7 与特征值有关的问题	334
习题.....	337
参考文献	338

第 1 章 绪 论

在科学技术和工程领域中,科技工作者要研究某一力学问题或物理问题,首先必须对所研究的问题建立起数学模型并对所研究问题的主要变量之间的关系做出假定,然后根据主要变量之间的假定建立起无限小微分元素的性质,于是便得到描述该问题的一个或一组微分方程和相应的定解条件。科技工作者的主要目标便是求出某个特殊区域上的微分方程或微分方程组及相应定解条件的解。但能用解析方法求出精确解的只是极少数方程性质比较简单,且几何形状相当规则的问题。对于绝大多数问题,由于方程性质比较复杂,或由于求解区域的几何形状比较复杂,则不能得到解析的结果。解决这类复杂问题通常有两种途径:一是引入简化假设,将微分方程和几何边界简化为能够处理的情况,从而得到问题在简化状态下的解析结果。但是这种方法只是在有限的情况下是可行的,因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。因此人们多年来寻找和发展了另一种求解途径和方法,即数值方法。自 20 世纪 60 年代以来,随着数字计算机的飞速发展和广泛应用,数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。

数值分析方法可以分为两大类。一类是以有限差分法为代表,其特点是直接求解微分方程和相应定解条件的近似解。采用有限差分法求解某个问题时,首先将该问题的求解域划分为网格,然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程,最后得到以节点变量为未知量的代数方程组,将求解微分方程的问题转化为求解联立代数方程组的问题。有限差分法解的精度完全由网格划分的粗细而决定,当网格划分得比较精细时,可以得到精度很高的近似解。借助于有限差分法,能够求解某些相当复杂的问题。特别是求解建立于空间坐标系的流体流动问题,有限差分法有自己的优势。因此,在流体力学领域内,它至今仍占支配地位。另外,在求解与时间有关的问题中,也常常利用对时间进行差分来求解时间变量。

另一类数值分析方法是有限单元法为代表,其特点是首先建立起与求解问题的微分方程及相应定解条件相等效的积分公式,然后求积分方程的近似解。通常,由于与微分方程等效的积分公式中的导数阶数比微分方程本身的导数阶数低,所以,在数值分析方法中,大都采用基于等效积分公式的近似方法。基于等效积分公式的近似方法有很多种类,除有限单元法外,还有边界单元法、加权残值法、里兹(Ritz)法、康托洛维奇(Kantorovich)法、有限条法等。

基于等效积分公式的近似方法又可分为两类,一类是基于等效积分公式本身的近似方法,例如加权残值法。

另一类是基于等效积分公式的弱形式的近似方法,这种近似方法又可分为基于对称和非对称等效积分弱形式的近似方法两种。属于对称等效积分弱形式的近似方法有伽辽金(Galerkin)有限元法等;而属于非对称等效积分弱形式的近似方法有边界单元法等。当然,加权残值法也可以利用等效积分弱形式进行近似计算,不过最常用的还是基于等效

积分公式的加权残值法。

当微分方程具有某些特定的性质时,它的等效积分公式的弱形式可以归结为某个泛函的变分,相应的近似解实质上是求解泛函的驻值问题。例如里兹法、伽辽金法、康托洛维奇法、屈列弗兹法等就属于这一类近似方法;基于泛函变分问题的有限单元法也属于这一类近似方法。它与前面几种近似方法的区别是:前面几种近似方法都是在整个求解域上假设近似函数,而有限单元法是在局部求解域(单元)上假设近似函数。因此对于几何形状和边界条件复杂的问题,有可能假设合乎实际变化情况的近似函数。有限单元法的出现,是数值分析方法研究领域内重大突破性的进展。

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个、且按一定方式相互联结在一起的单元的组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合,且单元本身又可以有不同的形状,因此可以模拟几何形状复杂的求解域。有限单元法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设近似函数来分片表示全求解域上待求的未知场函数,而每一个单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个节点的数值及其插值函数来表示。这样一来,一个问题的有限元分析中,未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(也即自由度),从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一旦求出这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加,也即单元尺寸的缩小,或者随着单元自由度的增加及插值函数阶数的提高,解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最终将收敛于精确解。

现代有限单元法的第一个成功的尝试,是将刚架位移法的解题思路推广应用于弹性力学平面问题。这是特纳(Turner)、克洛(Clough)、马丁(Martin)、托普(Topp)等人在分析飞机结构时于1956年得到的成果。有限单元法第一次尝试的成功,打开了人们的眼界。1960年加利福尼亚大学伯克利分校的克洛把这个新的工程计算方法进一步由航空结构扩展到土木工程,并第一次正式命名为有限单元法(Finite Element Method, FEM),因而人们开始认识了有限单元法的功效。自那时以来,有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说,正如上面所提到的特纳、克洛等人开始提出的有限单元法时是利用直接刚度法,它来源于结构分析的刚度法(位移法)。直接刚度法有利于我们明确有限单元法的一些物理概念,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963~1964年,贝西林(Besseling)、梅隆施(Melosh)、琼斯(Jones)等人证明了有限单元法是基于变分原理的里兹法的另一种形式,从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法,确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立的有限单元法和经典的里兹法的主要区别是:有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上成立的,而且事先不要求满足任何边界条件,因此有限单元法可以用来处理很复杂的连续介质问题。从20世纪60年代后期开始,许多研究者进一步利用加权残值法的伽辽金法来确定单元特性和建立有限元求解方程,这就是伽辽金有限元法。伽辽金有限元法可以求解已经知道问题的微分方程和边界条件,但变分的泛函尚未找到或根本不存在的状况,因而进一步扩大了有限元法的应用领域。

随着计算机科学技术的飞速发展,有限单元法今天已发展成为解决大型复杂力学问题的通用而有效的工具。力学工作者掌握了这个工具,就变得艺高胆大,过去不敢碰的一些计算难题现在已成为普通的计算问题,过去采用的一些过于简陋的数学模型现在已经被更加符合实际的复杂模型所代替。分析计算的高速度与高精度,使某些实验手段开始成为过时的东西,最优化设计方法和计算机辅助设计使结构设计从单纯的验算过程变为真正的设计过程。数值分析方法和计算机仿真已成为和理论分析、实验分析并列的第三手段。

自20世纪70年代以来,在国际上出现了许多大型通用和专用有限元软件,如SAP, ABAQUS, NONSAP, ASKA, ADINA, FLASH, ANSYS, NASTRAN, MARK, DYNA-3D等。随着有限元软件和数字计算机的迅猛发展,有限单元法的应用也逐步扩展到几乎所有的科学技术和工程领域。由弹性力学平面问题扩展到空间问题和板壳问题;由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题;由弹性问题扩展到弹塑性、塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料问题、土力学与岩石力学问题、疲劳与断裂问题;由固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题、电磁场问题以及建筑声学及噪音问题;由结构计算问题扩展到结构优化问题;由工程力学扩展到力学的其他领域,如冰川力学、地质力学、生物力学(血管与眼球力学)和运动力学等。可以预计,随着现代力学、计算数学和计算机科学技术学科的发展,有限单元法作为一种具有坚实理论基础和广泛应用前途的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身也将得到进一步的发展与完善。

在本书中,数值分析方法的内容将沿着基于微分和积分两种描述方法而展开。基于微分描述的近似方法——有限差分法目前在固体力学领域中很少采用,但在流体力学领域和与时间有关的问题中,它仍然是一种常用的较好的数值方法,因此,在本书中将以很少的篇幅简要地介绍有限差分法的基本原理和基本步骤,使学生对有限差分法有初步的了解。

本书的重点是放在基于等效积分公式的数值分析方法上。因为有限单元法是一种通用且有效的分析方法,它的应用几乎扩展到所有工程技术领域,而且它的大型通用和专用软件在全世界范围内有数十种之多,掌握有限单元法的基本理论和分析步骤又将是数值分析方法的重点。因此,本书将集中较多的章节介绍有限单元法,并附有计算机程序的详细说明。目的是使学生牢固掌握有限单元法的基本理论和分析步骤,培养学生编制程序进行分析计算的能力,同时训练学生利用大型商用软件解决实际问题的能力。

第 2 章 数值方法的基本理论

2.1 两种描述方法

在数学上描述场问题一般有两种方法,一种是微分的方法,另一种是积分的方法。微分描述法中,取微元体描述一点的性态,建立微分方程。这一点的性态适用于除了边界以外的全区域。边界条件一般分为三类:第一类规定场变量本身;第二类规定场变量梯度;第三类属于混合型。对微分方程进行求解,并将求得的解代入这三类边界条件便可得到定解。实际上,要求得微分方程和相应边界条件的定解是非常困难的,很多问题常常无法求解,因此,发展了积分描述法。在积分描述法中,从全区域出发,建立起与原场问题的微分方程及相应边界条件相等效的积分方程。这种积分方程在力学中大都代表全区域的能量。如果原场问题的微分方程具有某些特定性质,则它的等效积分方程可以归结为某个泛函的变分,然后通过变分来求解。这种通过变分求解的原理通常称为变分原理。变分原理有两类边界条件:一类称为本质边界条件,或强加边界条件,这就是微分方程的第一类边界条件,积分形式的方程进行变分后,这类边界条件需要另外强加上去;另一类称为自然边界条件,这类边界条件与微分方程的第二、第三类边界条件相当,但它可以自然地包含在积分形式的方程中,变分后无需另外加上去。

2.2 微分方程的近似求解方法 有限差分法(Finite Difference Method, FDM)

直接求解微分方程及相应边界条件下的定解问题,曾经是很多数学家和力学家所研究的内容。但是,对于工程上许多重要问题,并没有能够得出函数式(解析)解答。因此,各种数值解法便具有重要的实际意义。有限差分法是沿用较久的一种数值解法。

有限差分法的特点是直接求解微分方程及相应定解条件的近似解。有限差分法的求解步骤是:首先将求解区域划分为网格,然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程,把求解微分方程的问题改换成求解代数方程的问题。当采用较多节点时,近似解的精度可以得到改进。借助于有限差分法,能够求解某些相当复杂的问题。特别是求解建立于空间坐标系的流体流动问题时,有限差分法有自己的优势。因此在流体力学领域内,它至今仍占支配地位。但用于几何形状复杂问题时,它的精度将降低,甚至发生困难。

下面以求解温度场和弹性力学平面问题为例来说明有限差分法的求解步骤。

2.2.1 差分公式的推导

讲述差分方法之前,先来导出常用的一些公式,以使用它们来建立差分方程。

在求解区域上用相隔等间距 h 而平行于坐标轴的两组平行线织成网格(见图 2.1)。设 $f(x, y)$ 为求解区域内的某一个连续函数,它可能是某一个应力分量或者位移分量,也可能是应力函数或者温度等。这个函数,在平行于 x 轴的一根网线上,例如在 3-0-1 上,它只随 x 坐标的改变而变化。在邻近节点 0 处,函数 f 可以展开为泰勒级数

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 (x - x_0)^4 + \dots \quad (\text{a})$$

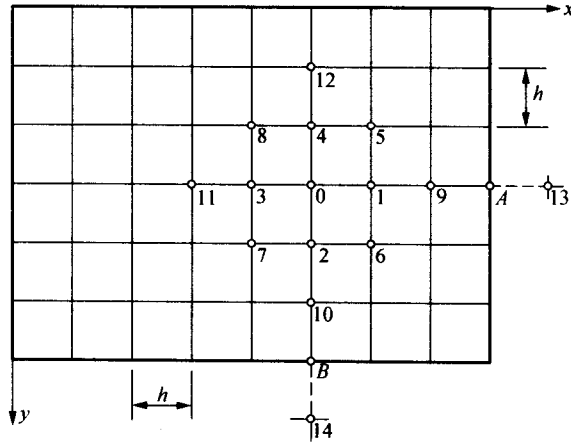


图 2.1 差分网格

在下面,我们将只考虑离开节点 0 充分近的那些节点,如图 2.1 所示,因而所用到的 x 值都和 x_0 相差不大,也就是说, $x - x_0$ 是充分小的。于是可以不计 $x - x_0$ 的三次幂及更高次幂的各项,而将式(a)简写为

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2. \quad (\text{b})$$

在节点 3 和节点 1 上, x 分别等于 $x_0 - h$ 和 $x_0 + h$, 即 $x - x_0 = -h$ 及 $x - x_0 = h$ 。代入式(b), 得到

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (\text{c})$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0. \quad (\text{d})$$

联立求解 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 及 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, 即得差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_3}{2h}, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2}. \quad (2.2)$$

同样,如果在网线 4-0-2 上取

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 (y - y_0)^2, \quad (\text{e})$$

则将得到差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_2 - f_4}{2h}, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2}. \quad (2.4)$$

公式(2.1)与公式(2.3)是基本差分公式,可以从它们导出其他的差分公式。例如,利用它们可以导出混合二阶导数的差分公式如下:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right] = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3}{2h} \\ &= \frac{\frac{f_6 - f_5}{2h} - \frac{f_7 - f_8}{2h}}{2h} \\ &= \frac{1}{4h^2} [(f_6 + f_8) - (f_5 + f_7)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

又例如,用同样的方法,可以从公式(2.2)及公式(2.4)导出四阶导数的差分公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_1 + f_3) + (f_9 + f_{11})], \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [4f_0 - 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + (f_5 + f_6 + f_7 + f_8)], \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_2 + f_4) + (f_{10} + f_{12})]. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

差分公式(2.1)及公式(2.3)是以相隔 $2h$ 的两节点处的函数值来表示中间节点处的一阶导数值,称为中点导数公式。有时也需要用到另一种形式的差分公式,它以相邻三节点处的函数值来表示一个端点处的一阶导数值,称为端点导数公式。

首先把导数 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 用 f_0, f_1, f_9 来表示。为此,在式(b)中令 $x = x_0 + 2h$, 即 $x - x_0 = 2h$, 得

$$f_9 = f_0 + 2h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (\text{f})$$

再从式(d)及式(f)中消去 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, 得左端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_9}{2h}. \quad (2.7)$$

同样也可以把导数 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 用 f_0, f_3, f_{11} 来表示。为此,在式(b)中令 $x = x_0 - 2h$, 即 $x - x_0 = -2h$, 得

$$f_{11} = f_0 - 2h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (\text{g})$$

再从式(c)及式(g)中消去 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, 又可得右端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{3f_0 - 4f_3 + f_{11}}{2h}. \quad (2.8)$$

与上相似, 也可以导出 y 方向的端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{-3f_0 + 4f_2 - f_{10}}{2h}, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{3f_0 - 4f_4 + f_{12}}{2h}. \quad (2.10)$$

应当指出: 中点导数公式与端点导数公式相比, 精度较高, 因为前者反映了节点两边的函数变化, 而后者只反映了节点一边的函数变化。因此, 我们总是尽可能应用前者, 而只有在无法应用前者时才不得不应用后者。

以上在导出差分公式时, 是从式(b)或式(e)出发的, 而在式(b)及式(e)中已经分别略去了 $(x-x_0)$ 或 $(y-y_0)$ 的三次及三次以上幂的各项, 使该两式中的 f 简化为 x 或 y 的二次函数。这就是说, 在连续两段网线间隔之内, f 已被当作按抛物线变化。因此, 以上导出的差分公式常被称为抛物线差分公式。

用不同的方式, 可以导出不同的差分公式。例如, 可以在式(b)中把 $(x-x_0)^2$ 的项也略去不计, 从而由式(c)及式(d)分别得出基本公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_0 - f_3}{h}, \quad (h)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_0}{h}. \quad (i)$$

在这里, 由于式(b)中的 f 被简化为 x 的线性函数, 也就是说, 在一段网格间距之内, f 已被当作按直线变化, 因此, 上列两个基本差分公式常被称为直线差分公式, 式(h)称为向后线性差分公式, 而式(i)称为向前线性差分公式。以这两个公式为基础, 可以导出高阶导数的向后或向前的差分公式。但这种差分公式精度较差, 因而很少采用。

又例如, 还可以在式(a)中保留 $(x-x_0)^3$ 及 $(x-x_0)^4$ 的项, 将该式应用于节点 1、3、9、11, 得出 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0$ 的四个方程, 联立求解, 从而得到四个基本差分公式。这种差分公式虽然比较精确, 但也很少采用, 因为每一公式涉及的节点太多, 用起来很不方便。

2.2.2 稳定温度场的差分解

在无热源的平面稳定温度场中, 热传导微分方程简化为调和(或拉普拉斯)方程 $\nabla^2 T=0$, 即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (a)$$

式中, T 为温度, ∇^2 称为调和算子或拉普拉斯算子。为了用差分法求解, 在温度场的域内织成网格, 如图 2.1 所示。在任意一个节点, 例如在节点 0, 由差分公式(2.2)及公式(2.4)有

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{h^2}, \quad (\text{b})$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{h^2}. \quad (\text{c})$$

代入式(a), 即得差分方程

$$4T_0 - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 0. \quad (2.11)$$

如果一个温度场的全部边界都具有第一类边界条件, 则所有边界节点处的 T 值都是已知的。这样, 只需在每一个内节点处建立一个式(2.11)型的差分方程, 就可以由这些方程求得所有内节点处的未知 T 值。

对于具有第二类边界条件, 即法向热流密度为已知的边界节点 0, 如图 2.2(a) 所示。由于该节点处的温度 T_0 是未知的, 需要计算, 因而需要在该节点处建立一个式(2.11)型的差分方程。但这一方程中将含有边界外的虚节点 1 处的温度 T_1 。为了消去这个未知的 T_1 , 可利用第二类边界条件的表达式。假定该边界是垂直于 x 轴的, 而且该边界的向外法线是沿 x 轴的正向, 如图 2.2(a) 所示, 则边界条件表达式为

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = (q_x)_0,$$

其中 λ 为导热系数, $(q_x)_0$ 是节点 0 处的沿 x 方向的已知热流密度。对 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0$ 应用差分公式(2.1), 则上式变为

$$-\lambda \left(\frac{T_1 - T_3}{2h}\right) = (q_x)_0.$$

解出 T_1 , 代入式(2.11), 即得修正的差分方程

$$4T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = -\frac{2h}{\lambda}(q_x)_0. \quad (2.12)$$

如果 4-0-2 是绝热边界或对称轴, 则有 $(q_x)_0 = 0$, 式(2.12)简化为

$$4T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = 0. \quad (2.13)$$

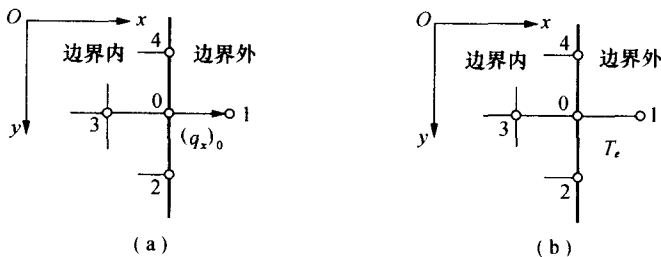


图 2.2 节点 0 具有第二类、第三类边界条件

对于具有第三类边界条件, 即在所有各瞬时的对流(运流)放热情况为已知的边界节点 0 [见图 2.2(b)], 也须列出相应于未知值 T_0 的差分方程。为了消去该方程中的虚节点温度, 可利用对流放热边界条件

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\beta}{\lambda}(T_0 - T_e),$$

式中, β 为对流传热系数, T_c 为边界以外的介质的已知温度。应用差分公式(2.1), 得

$$\frac{T_1 - T_3}{2h} = -\frac{\beta}{\lambda}(T_0 - T_c).$$

解出 T_1 , 代入式(2.11), 即得修正的差分方程

$$\left(4 + \frac{2h\beta}{\lambda}\right)T_0 - T_2 - 2T_3 - T_4 = -\frac{2h\beta}{\lambda}T_c. \quad (2.14)$$

当边界垂直于 y 轴时, 也极易导出与式(2.14)相似的修正差分方程。

当温度场具有曲线边界或斜边界时, 在靠近边界处将出现不规则的内节点, 如图 2.3 (a) 中的节点 0。我们首先假定边界 AB 是第一类边界条件。将温度 T 在邻近节点 0 处沿 x 方向展开为泰勒级数, 略去 $(x-x_0)$ 的三次及其以上次幂的项, 得

$$T = T_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 (x-x_0)^2.$$

令 x 依次等于 $x_0 - h$ 及 $x_0 + \xi h$, 即 $x-x_0 = -h$ 及 $x-x_0 = \xi h$ ($0 < \xi < 1$), 得

$$T_3 = T_0 - h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0,$$

$$T_A = T_0 + \xi h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0.$$

从上两式中消去 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0$, 可得

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{\xi(1+\xi)} T_A + \frac{1}{1+\xi} T_3 - \frac{1}{\xi} T_0 \right], \quad 0 < \xi < 1.$$

至于 $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0$, 则仍如式(c)所示。这样得到代替式(2.11)的差分方程

$$2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)T_0 - T_2 - \frac{2}{1+\xi}T_3 - T_4 = \frac{2}{\xi(1+\xi)}T_A, \quad 0 < \xi < 1. \quad (2.15)$$

对于图 2.3(b) 中的不规则节点 0, 同样可以导出代替式(2.11)的差分方程

$$\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right)T_0 - \frac{1}{1+\xi}T_3 - \frac{1}{1+\eta}T_4 = \frac{1}{\xi(1+\xi)}T_A + \frac{1}{\eta(1+\eta)}T_B, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1. \quad (2.16)$$

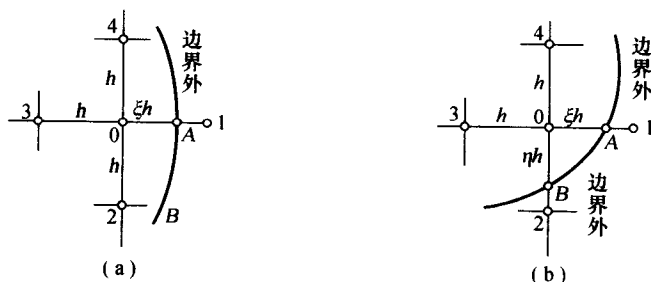


图 2.3 具有曲线边界的边界条件

其次, 假定图 2.3(a) 中的边界 AB 是第二类边界条件。这时我们将温度 T 在邻近节点 A 处沿 x 方向展开为泰勒级数, 略去 $(x-x_A)$ 的三次及其以上次幂的项, 得

$$T = T_A + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A (x - x_A) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A (x - x_A)^2.$$

令 $x - x_A$ 依次等于 $-\xi h$ 及 $-(1 + \xi)h$, 其中 $0 < \xi < 1$, 得

$$T_0 = T_A - \xi h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A + \frac{\xi^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A,$$

$$T_3 = T_A - (1 + \xi)h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A.$$

从上两式中消去 $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_A$, 可得

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 + \xi(1 + \xi)h \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A \right]. \quad (d)$$

再利用边界条件 $-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A = (q_x)_A$ 消去 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A$, 即得

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 - \xi(1 + \xi) \frac{h}{\lambda} (q_x)_A \right].$$

代入式(2.15), 简化以后, 即得代替式(2.11)的差分方程

$$\frac{4(1 + \xi)}{1 + 2\xi} T_0 - T_2 - \frac{2}{1 + 2\xi} T_3 - T_4 = -\frac{2}{1 + 2\xi} \frac{h}{\lambda} (q_x)_A, \quad 0 < \xi < 1. \quad (2.17)$$

对于图 2.3(b)中的不规则节点 0, 也可以同样导出代替式(2.11)的差分方程

$$\left(\frac{1}{1 + 2\xi} + \frac{1}{1 + 2\eta} \right) T_0 - \frac{1}{1 + 2\xi} T_3 - \frac{1}{1 + 2\eta} T_4 = -\frac{h}{\lambda} \left[\frac{1}{1 + 2\xi} (q_x)_A + \frac{1}{1 + 2\eta} (q_y)_B \right],$$

$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1. \quad (2.18)$$

如果图 2.3(a)中的边界 AB 是第三类边界条件, 则可利用边界条件得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A = -\frac{\beta}{\lambda} (T_A - T_r).$$

代入式(d), 可得方程

$$T_A = \frac{1}{1 + 2\xi} \left[(1 + \xi)^2 T_0 - \xi^2 T_3 - \frac{\beta h}{\lambda} \xi(1 + \xi) (T_A - T_r) \right], \quad 0 < \xi < 1. \quad (e)$$

解出 T_A , 再代入式(2.15)中, 即得代替式(2.11)的差分方程。如果图 2.3(b)中的边界是第三类边界条件, 则除了方程(e)以外还可得到相似的方程

$$T_B = \frac{1}{1 + 2\eta} \left[(1 + \eta)^2 T_0 - \eta^2 T_4 - \frac{\beta h}{\lambda} \eta(1 + \eta) (T_B - T_r) \right], \quad 0 < \eta < 1. \quad (f)$$

将方程(e)及方程(f)一并代入式(2.16), 亦可得到代替(2.11)的差分方程。

例 2.1 设有矩形薄板, 如图 2.4 所示, 长 8 m, 宽 6 m, 右边界为绝热边界, 其余三条边界上的已知节点温度标在各节点上(单位为 $^{\circ}\text{C}$), 试求板内的节点温度 T_a 至 T_i 。

解 用 4×3 的网格, $h = 2$ m。按照式(2.11)列出节点 a 至 f 处的差分方程如下:

$$4T_a - T_b - T_c - 35 - 32 = 0,$$

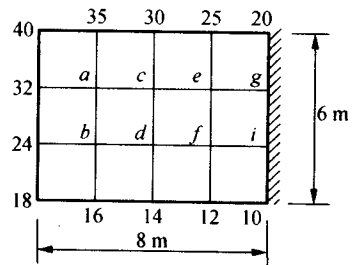


图 2.4 矩形薄板

$$\begin{aligned}4T_b - T_a - T_d - 16 - 24 &= 0, \\4T_c - T_a - T_d - T_e - 30 &= 0, \\4T_d - T_b - T_c - T_f - 14 &= 0, \\4T_e - T_c - T_f - T_g - 25 &= 0, \\4T_f - T_d - T_e - T_i - 12 &= 0.\end{aligned}$$

按照式(2.13)列出节点 g 和 i 处的差分方程如下:

$$\begin{aligned}4T_g - T_i - 2T_e - 20 &= 0, \\4T_i - T_g - 2T_f - 10 &= 0.\end{aligned}$$

联立求解上列 8 个方程,得到(单位为 $^{\circ}\text{C}$)

$$\begin{aligned}T_a &= 28.51, & T_b &= 22.03, & T_c &= 24.99, & T_d &= 19.61, \\T_e &= 21.84, & T_f &= 17.41, & T_g &= 19.97, & T_i &= 16.20.\end{aligned}$$

2.2.3 不稳定温度场的差分解

本节以混凝土体中由于混凝土凝结发热而出现的不稳定温度场为例,将简要地介绍平面不稳定温度场的差分解法。

计算时,仍然和以前一样在温度场上织成网格(见图 2.1)。将平面不稳定温度场的微分方程用于任一瞬时的任一内节点 0 ,得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 - a(\nabla^2 T)_0 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0. \quad (\text{a})$$

式中, a 为导温系数, $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0$ 为混凝土的绝热温升率。令节点 0 在 t 时的温度为 T_0 ,在 $t + \Delta t$ 时的温度为 T'_0 。应用向前线性差分公式,得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta t}. \quad (\text{b})$$

对于 $\nabla^2 T$,仍然采用抛物线差分公式,得

$$\begin{aligned}(\nabla^2 T)_0 &= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{h^2} + \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{h^2} \\&= \frac{1}{h^2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0).\end{aligned} \quad (\text{c})$$

对于 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$,也采用线性差分公式,即

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0 = \frac{\theta'_0 - \theta_0}{\Delta t} = \frac{(\Delta \theta)_0}{\Delta t}. \quad (\text{d})$$

式中, θ'_0 为 $t + \Delta t$ 时刻混凝土的绝热温度。将式(b)、式(c)、式(d)代入式(a),即得差分方程

$$T'_0 = \left(1 - \frac{4a\Delta t}{h^2}\right)T_0 + \frac{a\Delta t}{h^2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + (\Delta \theta)_0. \quad (2.19)$$

利用这一方程,可以根据节点 $0, 1, 2, 3, 4$ 在 t 时的温度,以及节点 0 在时段 Δt 内的 $\Delta \theta$,求得节点 0 在 $t + \Delta t$ 时的温度。

对于具有第一类边界条件的边界节点 0 ,由于节点温度 T'_0 是已知的,当然无须应用什么方程来求出它的温度。