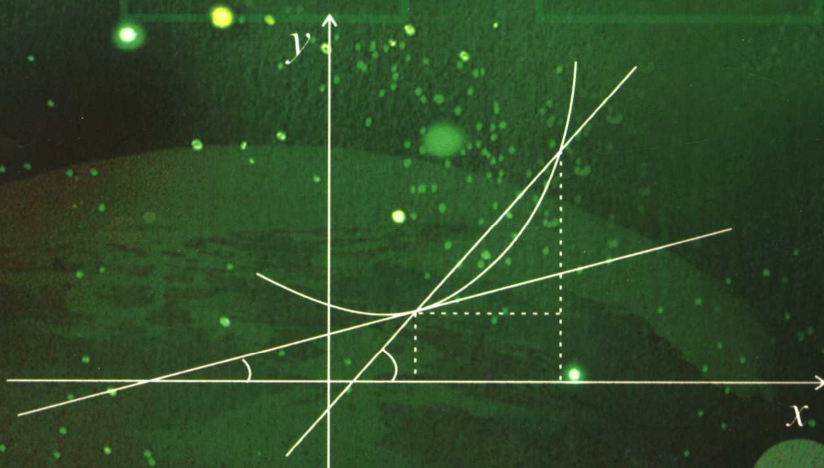
高等职业教育教材

新编
高等数学讲义

石德刚　李启培　主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育教材

新编高等数学讲义

石德刚　李启培　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

前　言

本书是在教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》基础上，在对比、剖析国内外多种同类教材的同时，集各家之长，并结合编者多年对高等数学教学认知规律的研究心得编写的.

本书编写时，坚持以“应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在内容编排上，紧密衔接初等数学，不仅注重从具体到抽象，而且十分注重理论联系实际.引入数学概念时，在保证数学概念准确性的前提下，力求从实际问题出发，并尽量借助几何直观图形和物理意义来解释概念，以使抽象的概念形象化，从而缩短学生学习高等数学的适应过程.此外，为了尽可能少地涉及其他学科知识，而在中学所学知识的基础上学习高等数学的概念，我们采用了很多传统的经典实例，这样更有利于学生集中精力理解新接触的高等数学概念.

本书在内容取舍上不是追求理论上的完整性与系统性，而是力求激发学生的学习兴趣，培养学生良好的数学素质.为了体现内容的典型性，本书舍弃了微积分学在物理、经济以及其他学科方面的应用.对这部分内容，建议授课教师根据所教授专业的具体情况提供给学生相应的素材(参见《高等数学应用205例》，李心灿，高等教育出版社)，指导学生用所学数学知识去解决问题，这样可提高学生应用数学知识解决实际问题的能力.另外，鉴于计算机的广泛应用和数学软件的便捷性，本书舍弃了微积分学中有关近似计算的内容.对这部分内容，建议通过数学实验(参见《高等数学实验课》，李卫国，高等教育出版社)来学习.

编者本着学生易学、教师易教的宗旨，对高等数学的知识体系重新进行了整合.教材中除将导数的应用与定积分的应用合并外，还将建立函数关系、数列极限、极限的保号性、闭区间上连续函数的性质、n 阶导数的求导法、泰勒公式、由参数方程确定的函数与隐函数的求导法、定积分的几何意义、定积分的不等式性质及积分中值定理、变上限积分、无穷区间上的广义积分等内容移到相关章节.同时，对高等数学中一系列难点问题的讲述进行了系统的改进，如：

①引入实数基本性质；

②引进了一般区间记号$\langle a,b\rangle$；

③导出了函数在有限点处极限的一个重要结论，将求函数在有限点处的极限问题提前；

④完善了间断点的定义；

⑤引进了极限过程的一般记号 $x\to\boxed{六}$；

⑥将常用的等价无穷小给予了一般化的结果；

⑦完善了幂函数求导公式的推证；

⑧用函数增量公式导入微分的定义并证明复合函数求导法则；

⑨用微分导出反函数及由参数方程确定的函数及隐函数的求导法则；

⑩用一般中值定理统一证明拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒中值定理；

⑪用拉格朗日中值定理证明牛顿—莱布尼茨公式；

⑫由第一类换元积分公式导出常用凑微分公式；

⑬采用绝对收敛和收敛为标准分类讨论敛散性；

⑭由条件极值化为无条件极值导入拉格朗日函数；

⑮用积分因子法导出一阶线性非齐次微分方程的通解公式.

本书第1章、第6章、第7章、第8章由石德刚编写,第2章、第3章、第4章、第5章由李启培编写.

本书由石德刚设计总体框架,由李启培定稿并完成计算机绘图,刘建老师完成全书计算机排版.

本书得到了天津冶金职业技术学院有关领导和同志们的大力支持,在此表示诚挚的感谢.

本书写作时参考了国内外高等数学(数学分析、微积分)相关著作,在此一并致谢.

由于时间紧迫、水平有限,错误和缺点在所难免,望请广大读者指正.

编者

2006年6月

目　　录

第 1 章　集合与函数

函数是现实世界中变量之间相互依存关系的一种抽象.它是高等数学研究的基本对象.本章先简要介绍集合的概念,再以集合论的观点给出函数的一般定义,然后着重讨论函数的特性、基本初等函数、复合函数、初等函数及其图形.

1.1　集合

1.1.1　集合的概念

1.集合

集合是指具有某个共同属性的一些对象的全体,是一种描述性的概念.构成集合的一个个的对象称为该集合的元素.通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合.特别用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集合;$\mathbf{Z}$ 表示整数集合;$\mathbf{R}$ 表示实数集合等.用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.如果 a 是集合 A 中的元素,就记为 $a\in A$(读作 a 属于 A),如果 b 不是集合 A 中的元素,就记为 $b\notin A$(读作 b 不属于 A).对于给定的集合 A,元素 $x\in A$ 或 $x\notin A$,二者必居其一.

2.集合的表示法

集合的表示法一般有两种.一是列举法,即把集合中元素按任意顺序列举出来,并用花括号{}括起来.比如,小于 10 的正奇数所组成的集合 A 可以表示为 $A=\{1,3,5,7,9\}$.另一种方法是描述法,即把集合中元素所具有的共同属性描述出来,用 $\{x\mid x$ 的共同属性$\}$表示.例如,上述集合 A 也可表示为 $A=\{x\mid x$ 是小于 10 的正奇数$\}$.

1.1.2　实数集

1.实数的性质

实数是有理数和无理数的总称,它具有以下性质.

①实数对四则运算(即加、减、乘、除)是封闭的,即任意两个实数进行加、减、乘、除(除法要求除数不为零)运算后,其结果仍为实数.

②有序性,即任意两个实数都可以比较大小,满足且只满足下列关系之一:

$a<b,a=b,a>b$.

③稠密性,即任意两个实数之间还有实数存在.

④连续性,即实数可以与数轴上的点一一对应.

2.实数的绝对值

对于任意一个实数 x,它的绝对值为 $|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

3.区间

(1)开区间

$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$ 表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合.

(2)闭区间

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合.

(3)半开半闭区间

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$表示满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合.类似地,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$表示满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合.

$\langle a,b\rangle$用来泛指以上四种有限区间.

除了上述有限区间外,还有 5 种无穷区间:

①$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$表示大于 a 的全体实数 x 的集合;

②$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$表示大于或等于 a 的全体实数 x 的集合,$\langle a,+\infty)$用来泛指以上两种无穷区间;

③$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$表示小于 a 的全体实数 x 的集合;

④$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$表示小于或等于 a 的全体实数 x 的集合,$(-\infty,a\rangle$用来泛指以上两种无穷区间;

⑤$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$表示全体实数,在几何上就表示整个数轴.

注意“$+\infty$”(读正无穷大)、“$-\infty$”(读负无穷大)是引用的符号,不能看作数.

字母 I 用来泛指以上各种区间.

4.邻域

点 x_0 的 δ 邻域,是指以点 x_0 为中心,以 $2\delta(\delta>0)$为长度的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$(图 1.1-1),记作 $U(x_0,\delta)$,或简记为 $U(x_0)$,即 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$.它表示了与点 x_0 的距离小于 δ 的点 x 的全体.

在点 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0,所得集合记作 $U^{\circ}(x_0,\delta)$,或简记为 $U^{\circ}(x_0)$,称为点 x_0 的空心 δ 邻域(图 1.1-2),即 $U^{\circ}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,或用区间表示为$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

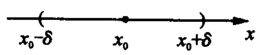


图 1.1-1

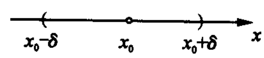


图 1.1-2

区间$(x_0-\delta,x_0\rangle$称为点 x_0 的左邻域,区间$\langle x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的右邻域.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

1.函数的定义

定义 1.2-1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果对于每一个 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应法则,总有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是关于 x 的函数,记作

$$y=f(x).$$

数集 D 称为函数$f(x)$的定义域,即 $D=D(f)$(简记为 D_f).习惯上,x 称为自变量,y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$,

当 x 遍取 D_f 内的各个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$$

称为函数 $f(x)$的值域,简记为 R_f.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.例如,在圆面积公式 $S=\pi r^2$ 中,定义域是全体正实数.

在纯数学研究中,常常抽去函数的实际意义,单纯讨论用算式表达的函数关系,这时可以规定函数的自然定义域.在实数范围内,函数的自然定义域是使算式有意义的一切实数组成的数集.例如,函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是$(-\infty,+\infty)$,又如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的自然定义域为$[-1,1]$等.

通过对函数定义的分析讨论发现,确定一个函数,起决定作用的是以下两个要素:

①对应法则(规则)f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系);

②定义域 D_f(即自变量 x 的变化范围).

如果两个函数的对应法则"f"和定义域"D"都相同,那么这两个函数就是相同的(或称相等的);否则就是不相同的.

例 1.2-1　下列各组函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\frac{x}{x},g(x)=1$;　(2)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;　(3)$f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　(1)题两函数不相同,因为定义域不同.函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而函数 $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)题两函数不相同,因为对应法则不同.当 $x=-1$ 时,$f(-1)=-1,g(-1)=1$.

(3)题两函数相同.因为函数 $f(x)$和函数 $g(x)$的对应法则相同且定义域均为$(-\infty,+\infty)$.

2.函数的图像

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,取定一个 $x\in D_f$,对应一个函数值 $y=f(x)$,这时(x,y)在 xOy 面上确定一个点.当 x 取遍 D_f 上每个值时,得到 xOy 面上的点集

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\},$$

点集 G 称为函数$y=f(x)$的图形(也叫图像).图形 G 在 x 轴上的垂直投影点集就是定义域 D_f,G 在 y 轴上的垂直投影点集就是值域 R_f(图 1.2-1).

一般地,所研究的函数图像是平面上的一条曲线,这条曲线具有一个特征,即它与过 D_f 内的点的每一条平行于 y 轴的直线必相交而且只有一个交点.由此可知,并不是所有平面曲线都表示一个函数.例如图 1.2-2 中的曲线,因为平行于 y 轴的直线中有的与该曲线的交点不止一个,即对于某一个 x 有不止一个 $y=f(x)$与之对应,因而不符合函数的定义.

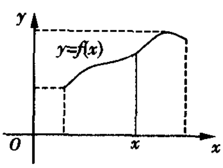


图 1.2-1

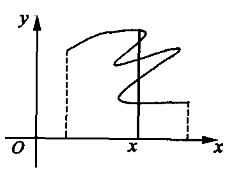


图 1.2-2

例 1.2-2 函数 $y=|x|$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$(图 1.2-3).

例 1.2-3 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$(图 1.2-4).

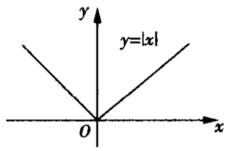


图 1.2-3

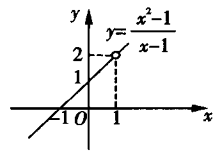


图 1.2-4

需要指出的是,并非所有的函数都可以用几何图形表示出来.

例 1.2-4 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数}),\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $\{0,1\}$,这个函数就不能用图形把它表示出来.

1.2.2 函数的表示法

1.*解析法*

本节的上述各例题都是用解析法表示的函数.高等数学中所讨论的函数大多是由解析法给出的,这是因为解析表达式便于进行各种运算和研究函数的性质.但要指出一点,用解析法表达函数不一定总是用一个解析式表示,也可以用几个解析式表示一个函数.习惯上,称用多个解析式表示的函数为分段函数.

对于分段函数需注意以下几点:

①相应于自变量不同的取值范围,函数用不同的解析式来表示;

②分段函数的定义域是各段定义域的并集;

③求分段函数的函数值时,应根据自变量所在区间,取该区间所对应的解析式来求函数值.

例 1.2-5 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,其图形如图 1.2-5 所示.

$$f(-1)=-1,f(2)=\frac{1}{2},f(0)=0.$$

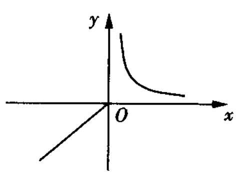


图 1.2-5

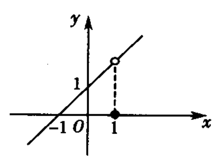


图 1.2-6

例 1.2-6 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,其图形如图 1.2-6 所示.

$$f(3)=4,f(1)=0,f(-1)=0.$$

例 1.2-7　取整函数：设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$.

例如，$\left[\frac{3}{7}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.8]=-4$.

把 x 看作变量，则函数 $y=[x]=n(n\leqslant x<n+1)$称为取整函数. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$(图 1.2-7).

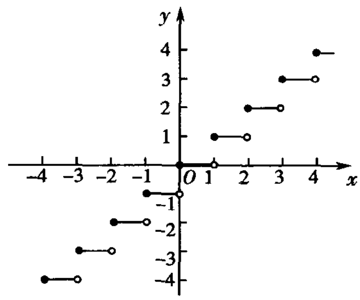


图 1.2-7

2. 表格法

在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法.

表格法的优点是简单明了，便于应用. 但也应看到它所给出的变量间的对应关系有时是不全面的.

3. 图像法

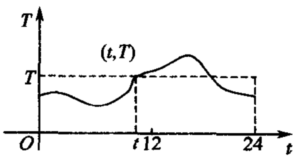


图 1.2-8

例 1.2-8　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化(图 1.2-8)，由图可以看到一昼夜内每一时刻 t 都有唯一确定的温度 T 与之对应，因此图中曲线在闭区间$[0,24]$上确定了一个函数，也就是用图像表示函数.

类似于例 1.2-8 这类问题，通常很难找到一个解析式准确地表示两个变量之间的对应关系，而用某坐标系中一条曲线(该曲线与任何一条平行于 y 轴的直线的交点不多于一个)来表示两个变量之间的对应关系，这种表示函数的方法称为图像法.

图像法的特点是直观性强，函数的变化一目了然，且便于研究函数的几何性质，缺点是不便于作理论研究.

1.2.3　几种常见的特殊函数

1. 单调函数

定义 1.2-2　设函数 $y=f(x)$在区间 $I\subset D_f$ 内随着自变量 x 的增大而增大，即对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$是区间 I 内的严格单调增加函数(图 1.2-9).

如果函数 $y=f(x)$在区间 $I\subset D_f$ 内随着自变量 x 的增大而减小，即对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$是区间 I 内的严格单调减少函数(图 1.2-10).

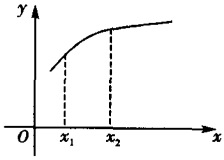


图 1.2-9

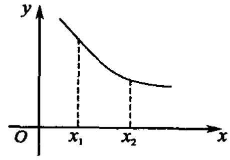


图 1.2-10

例 1.2-9 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是严格单调增加函数，因为对 $[0,+\infty)$ 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)=x_1^2<x_2^2=f(x_2)$.

同理，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内是严格单调减少函数. 但函数 $f(x)=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数(图 1.2-11).

例 1.2-10 证明函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加函数.

证 设 x_1、x_2 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，根据定义需要证

$$f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)，即证\ x_1^3-x_2^3<0.$$

由于 $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$，而 $x_1-x_2<0$，及

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0,$$

所以 $x_1^3-x_2^3<0$，$x_1^3<x_2^3$，即函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加函数(图 1.2-12).

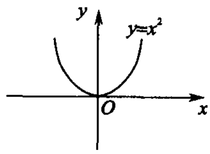


图 1.2-11

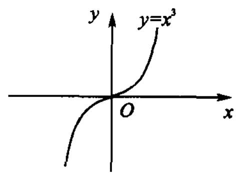


图 1.2-12

2. 有界函数

定义 1.2-3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I\subset D_f$ 内有定义，如果存在一个正数 M，使对于所有的 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 为区间 I 内的有界函数. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 内的无界函数.

例 1.2-11 函数 $f(x)=\sin x$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数. 因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|\sin x|\leqslant 1$.

例 1.2-12 函数 $f(x)=x\sin x$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的无界函数. 因为对于任意给定的正数 $M>0$，总可以找到某个 $x\in(-\infty,+\infty)$，如 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\in\mathbf{Z})$，使

$$|x\sin x|=\left|\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|2n\pi+\frac{\pi}{2}\right|>M，只要\,|n|\,充分大即可.$$

3. 奇函数与偶函数

定义 1.2-4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x\in D_f$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D_f$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.2-13 考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的奇偶性.

解 因为函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称，

且　$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数.

4.周期函数

定义 1.2-5　设函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的实数 T,使对于每一个 $x\in D_f$,总有 $(x\pm T)\in D_f$,且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为函数 $f(x)$ 的周期.通常所说周期函数的周期是指最小的正周期.

周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴相隔一个 T 重复一次(图 1.2-13).

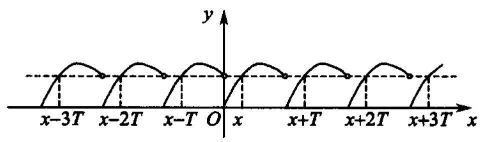


图 1.2-13

1.2.4　反函数

在函数 $y=f(x)$ 中,x 是自变量,y 是因变量,然而在同一变化过程中,存在着函数关系的两个变量,研究哪一个是自变量,哪一个是因变量,并不是绝对的,要视问题的具体要求而定.选定其中一个为自变量,那么另一个就是因变量(或函数).

例如,已知圆的半径 r 时,其面积 $S=\pi r^2$,此时,S 是关于 r 的函数,r 是自变量.若已知圆的面积 S,求它的半径 r,就必须把 S 作为自变量,而把 r 作为关于 S 的函数,并由 $S=\pi r^2$ 解出 r 关于 S 的关系式 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\quad(r>0)$.这时称函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 为函数 $S=\pi r^2$ 的反函数,而称函数 $S=\pi r^2$ 为函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 的像原函数.

定义 1.2-6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f.如果对任意一个 $y\in R_f$,在 D_f 内只有唯一的 x 与 y 对应,此 x 适合 $f(x)=y$,这时把 y 看作自变量,x 视为因变量,就得到一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上,把函数 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.反函数的定义域记为 $D_{f^{-1}}$,值域记作 $R_{f^{-1}}$,显然 $D_{f^{-1}}=R_f$,$R_{f^{-1}}=D_f$,即反函数的定义域等于像原函数的值域,反函数的值域等于像原函数的定义域.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是:x 与 y 的取值是一一对应的,即对于任何的 $x_1,x_2\in D_f$,当 $x_1\neq x_2$ 时,必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.严格单调函数的自变量与因变量取值一一对应,因此严格单调函数一定有反函数,我们给出下述反函数存在定理.

定理 1.2-1　如果函数 $y=f(x)\ (x\in D_f)$ 是严格单调增加(减少)函数,则它一定存在反函数 $x=f^{-1}(y)\ (y\in R_f)$,且该反函数在相应的区间内也是严格单调增加(减少)函数.

例 1.2-14　函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加函数,因而它有反函数

$y=\ln x \quad (x\in(0,+\infty))$,且它的反函数在区间$(0,+\infty)$内也是严格单调增加函数.

1.2.5 复合函数

在同一现象中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一变量间接联系起来的.例如,考察具有同样高度 h 的圆柱体的体积 V,显然不同圆柱体的体积取决于它的底面积 S 的大小,即由公式 $V=Sh$(h 为常数)确定.而底面积 S 由它的半径 r 确定,即 $S=\pi r^2$.这里 V 是关于 S 的函数,S 是关于 r 的函数,V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系 $V=Sh=\pi r^2 h$,它是由函数 $V=Sh$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的.

定义 1.2-7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g,如果 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$,那么就称函数 $y=f[g(x)]$为由函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$复合而成的复合函数,而 u 称为中间变量.函数 $y=f[g(x)]$的定义域和值域分别记作 $D_{f\circ g}$和 $R_{f\circ g}$.

例 1.2-15 对函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=g(x)=1-x^2$.因为 $R_g\cap D_f=[0,1]\neq\varnothing$,从而可构成复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$.

例 1.2-16 设函数 $y=f(u)=\sqrt{1-u^2}$,$D_f=[-1,1]$;$u=g(x)=x^2+2$,$R_g=[2,+\infty)$,因 $R_g\cap D_f=\varnothing$,故这两个函数不能构成复合函数.

1.2.6 基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

1.常函数

形如 $y=C$(C 为实常数)的函数称为常函数.

常函数 $y=C$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{C\}$,是有界偶函数.

2.幂函数

形如 $y=x^\mu$(μ 为实常数)的函数称为幂函数.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随μ 而异.例如,当 $\mu=3$ 时,$y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$;当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 的定义域是$[0,+\infty)$;当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是$(0,+\infty)$.但不论 μ 为何值,幂函数在$(0,+\infty)$内一定有定义,且其图形一定都经过点$(1,1)$.

幂函数 $y=x^\mu$ 中,$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 等是常见的幂函数,其图形如图 1.2-14 所示.

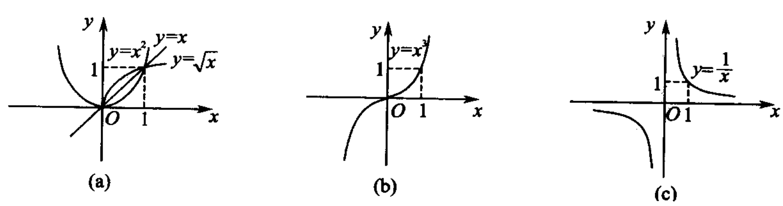


图 1.2-14

3.指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.只要 a 取任何不为 1 的正常数,函数图形均经过

点(0,1).当 $a>1$ 时,函数为严格单调增加函数;当 $0<a<1$ 时,函数为严格单调减少函数(图 1.2-15).

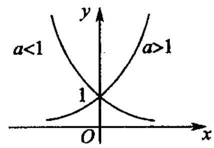


图 1.2-15

4.对数函数 $y=\log_a x\quad(a>0$ 且 $a\neq 1)$

定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,只要 a 取任何不为 1 的正常数,函数均经过点(1,0).当 $a>1$ 时,函数为严格单调增加函数;当 $0<a<1$ 时,函数为严格单调减少函数(图 1.2-16).

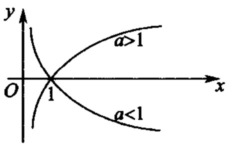


图 1.2-16

同底的对数函数与指数函数互为反函数.

5.三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数以及余割函数统称为三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且都是以 2π 为周期的周期函数.正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数,而余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数,因 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$,故它们都是有界函数,图形介于直线 $y=\pm 1$ 之间(图 1.2-17).

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的全体实数,是以 π 为周期的周期函数,且为奇函数(图 1.2-18).

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为除去 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的全体实数,是以 π 为周期的周期函数,且为奇函数(图 1.2-19).

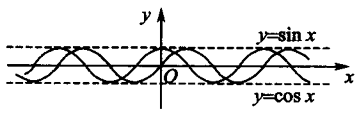


图 1.2-17

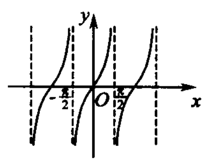


图 1.2-18

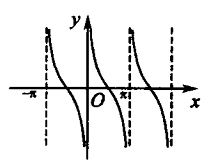


图 1.2-19

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 的定义域为除去 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数,且为偶函数.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 的定义域为除去 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数,且为奇函数.

6.反三角函数

由于三角函数是周期函数,对于值域内的每个 y 值,都有无穷多个 x 值与之对应,因此,必须限制其在单调区间上才能建立反三角函数.

函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数,叫做反正弦函数,其定义域是 $[-1,1]$,值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,并在定义域上是严格单调增加函数,且为奇函数(图 1.2-20).

函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,叫做反余弦函数,其定义

域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$，并在定义域上是严格单调减少函数(图 1.2-21).

函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数，叫做反正切函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，并在定义域内是严格单调增加函数，且为奇函数(图 1.2-22).

函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$内的反函数，叫做反余切函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$，并在定义域内是严格单调减少函数(图 1.2-23).

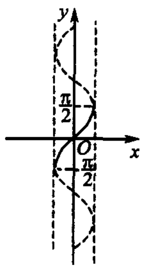


图 1.2-20

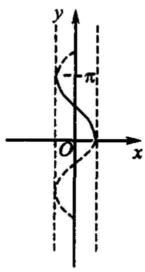


图 1.2-21

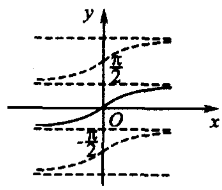


图 1.2-22

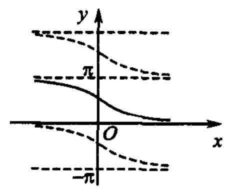


图 1.2-23

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合运算，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数，高等数学中讨论的函数绝大部分都是初等函数.

例如，函数 $y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$都是初等函数.

合理分解初等函数在微积分学中有着十分重要的意义，分解合理与否的准则是看各层函数是否为基本初等函数或其四则运算.

例 1.2-17 指出下列各函数的复合结构：

(1)$y=\sin^2 x$； (2)$y=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$； (3)$y=5^{(2x-1)^3}$； (4)$y=\ln\tan 3x$.

解 (1)函数 $y=\sin^2 x$ 是由基本初等函数 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成.

(2)函数 $y=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$是由基本初等函数 $y=u^{\frac{3}{2}}$和函数 $u=1+x^2$ 复合而成.

(3)函数 $y=5^{(2x-1)^3}$是由基本初等函数 $y=5^u$，$u=v^3$ 和函数 $v=2x-1$ 复合而成.

(4)函数 $y=\ln\tan 3x$ 是由基本初等函数 $y=\ln u$，$u=\tan v$ 和函数 $v=3x$ 复合而成.

第 2 章　极限与连续

第 1 章讨论了变量与变量之间的函数关系，而函数的变化趋势是与自变量的变化方式有关的.本章将进一步研究在函数的自变量按某种方式变化的过程中，相应地因变量随之而变的变化趋势，从而引出极限概念.

2.1　两个典型问题

2.1.1　平面曲线的切线

在中学数学中，圆的切线被定义为“与圆只有一个交点的直线”.但是，对一般平面曲线，就不能用“与曲线只有一个交点的直线”作为曲线的切线的定义.例如，在图 2.1-1 中，可明显看到，直线 $y=1$ 与曲线 $y=\sin x$ 相切，但它们的交点不唯一；同时，直线 $y=x-\pi$ 与曲线 $y=\sin x$ 只有一个交点，但它们在此点不相切.因此，必须对一般曲线在一点处的切线给出一个普遍适用的定义并指明如何求切线.

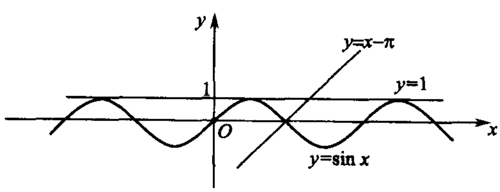


图 2.1-1

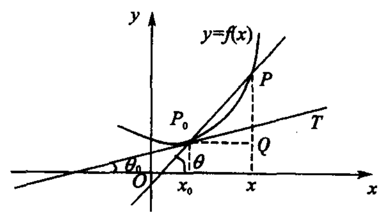


图 2.1-2

在曲线 $y=f(x)$ 上任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)$，其中 $y_0=f(x_0)$；再取曲线上与点 P_0 邻近的一点 $P(x,f(x))$.连接两点 P_0 与 P 作曲线的一条割线(图 2.1-2)，这条割线的倾角是 θ，其斜率为

$$\tan\theta=\frac{|QP|}{|P_0Q|}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\tag{2.1-1}$$

其中点 Q 是过点 P_0 所作的平行于 x 轴的直线与过点 P 所作的平行于 y 轴的直线的交点.当点 P 沿曲线移动趋近点 P_0 时，割线 P_0P 不断地绕点 P_0 转动而趋向于直线 P_0T，且割线 P_0P 的倾角 θ(斜率 $\tan\theta$)趋向于直线 P_0T 的倾角 θ_0(斜率 $\tan\theta_0$).因此，把经过点 P_0 且以 $\tan\theta_0$ 为斜率的直线称为曲线在点 P_0 的切线.

2.1.2　曲边梯形的面积

在许多几何问题中，常会遇到计算曲边梯形面积的问题.在平面直角坐标系中，由连续曲