



学 士 版

● 本章综述 ● 释疑解难 ● 题型归纳 ● 习题解答

高等数学 (上册)

学考指要

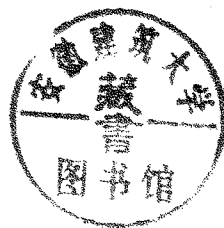
汪志宏 田俊峰 胡贵安 编

西北工业大学出版社

高等数学 学 考 指 要

(上册)

汪志宏 田俊峰 胡贵安 编



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)配套的教学辅导书。高等数学的概念、公式、定理较抽象难懂,解题方法也多样化,难以掌握,针对这个现状我们编写了本书。

全书分为12章,每章均设四个板块:本章综述、释疑解难、题型归纳和习题解答。“本章综述”部分概述了每章主要内容;对于那些重点难点及易混淆的知识点,本书“释疑解难”部分重点进行了详细诠释,力求让读者学习更容易,思路更清晰,理解更透彻;在“题型归纳”部分针对各种题型,给出多个实例,让读者在学习过程中更快更好地掌握解题思路及方法,达到举一反三,拓广知识面的效果。另外,我们还给出了《高等数学》(第五版)的习题解答,为读者学习提供参考。为满足读者复习应试需要,书后还附有两套期末考试题。

本书可作为学习高等数学课程的参考书,也可供考研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学考指要(上册)/汪志宏,田俊峰,胡贵安编.——西安:西北工业大学出版社,2006.5

(学考指要丛书)

ISBN 7-5612-2058-8

I. 高… II. ①汪… ②田… ③胡… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第012266号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西东江印务有限公司

开本:787 mm×960 mm 1/16

印张:36

字数:970千字

版次:2006年11月第1版 2006年11月第1次印刷

印数:1~6 000册

定价:48.00元(本册定价23.00元)

前 言

我们依据理工科各专业的培养目标和特点,按照教育部最新制定的高等数学课程教学大纲,编写了这本参考书。

本书着重对高等数学课程的知识要点进行了叙述,重点对那些重点难点及易混淆的知识点详细诠释,对各种题型的解题方法及技巧进行了分析介绍,以培养学生学习、解题能力。

本书除基本知识点全面、阐述解释清楚易懂等特点外,还突出以下特色:

- (1) 对学习中易混淆和易忽略问题的解释清楚明了。
- (2) 注重解题思路及技巧的培养,对各种题型解题思路及技巧重点分析,还对每一类型题目进行总结归纳评注,注重一题多解,有利于读者举一反三,扩大知识面,更全面地掌握所学知识。
- (3) 着眼于读者的实际需要,对配套教材练习题给出较详细的解答,有助于读者更快、更好地发现和解决自己学习过程中遇到的问题。

书中收录的例题、习题均选自近几年通用教材和流行辅导书中,时效性强。本书由汪志宏、田俊峰、胡贵安执笔编写,全书由汪志宏统稿。

由于水平有限,书中难免存在疏漏及错误之处,恳请读者及同行批评指正。

编 者

2006 年 6 月

目 录

(上 册)

第 1 章 函数与极限	1
1.1 本章综述	1
1.2 释疑解难	5
问题 1.1 数列的极限存在不等于 a 和数列的极限不等于 a 的严格数学定义	5
问题 1.2 利用定义证明数列极限的常见错误	5
问题 1.3 两数列和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间的关系	6
问题 1.4 函数在一点的极限存在等于 A 和函数在一点的极限不等于 A 的严格数学定义	7
问题 1.5 利用定义证明函数在一点极限的常见错误	7
问题 1.6 两函数和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间的关系	8
问题 1.7 $g(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有界, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$, 是否一定有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	9
问题 1.8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+3^x) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x \cdot \frac{1}{x} = +\infty$ 是否正确	10
问题 1.9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$ 是否正确	10
问题 1.10 两函数和或差与积或商的连续性同它们各自的连续性之间的关系	10
1.3 题型归纳	11
题型 1 函数有界性、奇偶性、周期性的判别	11
题型 2 求函数的定义域	12
题型 3 求函数的复合函数	13
题型 4 求函数的反函数	14
题型 5 求一般数列的极限	14
题型 6 已知数列的前几项的值和数列通项求数列的极限	15
题型 7 求函数的左右极限	16
题型 8 求有理分式函数的极限	17
题型 9 利用两个重要极限求函数极限	18
题型 10 无穷小量的比较	20
题型 11 函数连续性的讨论	22
题型 12 确定函数的间断点及其类型	23
题型 13 分段函数中确定参数来确定函数连续性	24

题型 14 利用闭区间上连续函数性质的证明命题	26
1.4 习题解答	27
1.1 习题 1-1 解答	27
1.2 习题 1-2 解答	33
1.3 习题 1-3 解答	34
1.4 习题 1-4 解答	36
1.5 习题 1-5 解答	38
1.6 习题 1-6 解答	40
1.7 习题 1-7 解答	42
1.8 习题 1-8 解答	43
1.9 习题 1-9 解答	45
1.10 习题 1-10 解答	47
1.11 总习题一解答	48
第 2 章 函数的导数与微分	52
2.1 本章综述	52
2.2 释疑解难	55
问题 2.1 函数在一点的导数与其曲线在对应点处切线倾角的关系	55
问题 2.2 函数在一点可导与在一点函数的极限存在的关系	55
问题 2.3 函数在一点的可导、可微与连续的关系	55
问题 2.4 几种常见的函数在一点不可导的情形	56
问题 2.5 复合函数求导常见的几种错误	57
问题 2.6 何时用定义求函数在一点的导数	57
问题 2.7 求函数微分常用的两种方法	58
问题 2.8 $d(x^2), dx^2$ 与 d^2x 的联系与区别	59
问题 2.9 常见的利用微分计算近似值的几个公式	59
问题 2.10 利用微分近似计算时怎样选取 $f(x)$ 和 x_0	59
2.3 题型归纳	60
题型 1 求函数在一点的导数	60
题型 2 求复合函数的导数	61
题型 3 隐函数求导	62
题型 4 求参数方程所确定的函数的导数和微分	64
题型 5 高阶导数的计算	65
题型 6 求函数在一点的微分	67
题型 7 隐函数求微分	67
题型 8 求分段函数的导数	68
2.4 习题解答	70
2.1 习题 2-1 解答	70

2.2 习题 2-2 解答	73
2.3 习题 2-3 解答	77
2.4 习题 2-4 解答	79
2.5 习题 2-5 解答	83
2.6 总习题二解答	87
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	91
3.1 本章综述	91
3.2 释疑解难	94
问题 3.1 罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及泰勒中值定理的关系	94
问题 3.2 应用洛必达法则须注意的几点问题	95
问题 3.3 怎样求函数的单调区间	95
问题 3.4 怎样求函数图像的凹凸区间和拐点	96
问题 3.5 区间上函数的极值和最值的区别和联系	96
问题 3.6 函数图形的几种渐近线	97
问题 3.7 函数图形描绘的步骤	97
问题 3.8 曲率及其计算公式	97
3.3 题型归纳	98
题型 1 利用中值定理证明含 $f^{(n)}(\xi)$ 的式子	98
题型 2 利用中值定理证明存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 满足某关系式	99
题型 3 求未定式 $\frac{0}{0}$ 的极限	100
题型 4 求未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限	101
题型 5 求未定式 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ 的极限	102
题型 6 求未定式 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 的极限	103
题型 7 函数的单调性判别	104
题型 8 求函数的极值、最值	105
题型 9 不等式的证明	107
题型 11 关于方程根的讨论	109
题型 12 曲线的凹凸与拐点的判别	110
题型 13 渐近线的相关计算	111
题型 14 平面曲线的描绘	112
3.4 习题解答	114
3.1 习题 3-1 解答	114
3.2 习题 3-2 解答	117
3.3 习题 3-3 解答	119
3.4 习题 3-4 解答	121
3.5 习题 3-5 解答	127

3.6	习题 3-6 解答	131
3.7	习题 3-7 解答	134
3.8	习题 3-8 解答	136
3.9	总习题三解答	137
第 4 章	不定积分	143
4.1	本章综述	143
4.2	释疑解难	144
问题 4.1	函数、函数的原函数、函数的不定积分的关系	144
问题 4.2	函数的不定积分结果是否唯一	145
问题 4.3	怎样利用换元法求被积函数带有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ 的不定积分	146
问题 4.4	几个利用回归法求出的函数的不定积分	147
问题 4.5	怎样将较复杂的有理分式化为简单的分式的和	148
问题 4.6	分段连续函数的不定积分	151
4.3	题型归纳	151
题型 1	简单不定积分的相关计算	151
题型 2	利用第一类换元法计算不定积分	152
题型 3	利用第二类换元法计算不定积分	153
题型 4	利用分部积分法计算不定积分	155
题型 5	分式有理函数的积分	156
题型 6	简单无理函数的积分	158
题型 7	三角函数有理式的积分	159
题型 8	分段函数的不定积分	160
4.4	习题解答	161
4.1	习题 4-1 解答	161
4.2	习题 4-2 解答	163
4.3	习题 4-3 解答	167
4.4	习题 4-4 解答	170
4.5	习题 4-5 解答	174
4.6	总习题四解答	176
第 5 章	定积分	183
5.1	本章综述	183
5.2	释疑解难	185
问题 5.1	变限积分的导数	185
问题 5.2	绝对值函数或分段函数的定积分	186
问题 5.3	以 l 为周期的连续周期函数定积分 $\int_a^{a+l} f(x)dx$ 是否与 a 无关	187

问题 5.4 连续奇或偶函数 $f(x)$ 的积分上限函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数还是偶函数	187
问题 5.5 对称区间上的连续奇或偶函数 $f(x)$ 的积分	188
问题 5.6 反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 是否收敛	188
问题 5.7 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 的敛散性	189
问题 5.8 函数和差的反常积分	190
5.3 题型归纳	190
题型 1 关于定积分的定义及性质的运算	190
题型 2 含变限积分的运算	193
题型 3 被积函数是分段函数的定积分计算	195
题型 4 利用换元法计算定积分	195
题型 5 利用分部积分法计算定积分	197
题型 6 无穷限反常积分的计算	199
题型 7 无界函数广义积分的计算	200
题型 8 其余类型题	201
5.4 习题解答	203
5.1 习题 5-1 解答	203
5.2 习题 5-2 解答	208
5.3 习题 5-3 解答	211
5.4 习题 5-4 解答	216
5.5 习题 5-5 解答	218
5.6 总习题五解答	221
第 6 章 定积分的应用	229
6.1 本章综述	229
6.2 释疑解难	230
问题 6.1 元素法	230
问题 6.2 利用定积分计算平面图形面积的几种方法	231
问题 6.3 利用定积分计算体积的几种方法	231
问题 6.4 定积分的物理应用中的力问题	232
6.3 题型归纳	232
题型 1 求平面图形的面积	232
题型 2 求立体体积	234
题型 3 求平面曲线弧长	236
题型 4 定积分的物理应用	236
题型 5 定积分的其它应用	238
6.4 习题解答	239

6.1	习题 6-2 解答	239
6.2	习题 6-3 解答	248
6.3	总习题六解答	252

第1章

函数与极限

1.1



一、集合

1. 集合的概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体,用 A, B, M 等表示.组成集合的事物称为集合的元素. a 是集合 M 的元素,表示为 $a \in M$.

一般利用列举法和描述法来表示集合.

若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \supset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.规定空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算及法则

(1) 集合的运算.集合 A 与 B 的并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;集合 A 与 B 的交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;集合 A 与 B 的差集 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$;称 $I \setminus A$ 为 A 的补集,记作 A^c ,其中集合 I 为全集.

(2) 集合运算的法则.常见的集合运算的法则包括交换律、结合律、分配律和对偶律.

3. 区间和邻域

区间和邻域是特殊的集合.

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.设 δ 是一正数,则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,其中点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

二、函数

1. 函数的概念

(1) 函数的定义.设有实数集 D 及两个变量 x 和 y ,对每个 $x \in D$,如果按某种对应法则 f ,总有确定的 y 值与之对应,则称 y 为 x 的定义在 D 上的函数,通常简记为 $y = f(x), x \in D$,其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域,记作 D_f ,即 $D_f = D$.当变量 x 取遍实数集 D 的每个数值时,对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域.

构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f .如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

(2) 分段函数. 在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 如取整函数 $y = [x]$ 等.

(3) 函数的几种特性. 函数有有界性、单调性、奇偶性和周期性四大特性.

2. 反函数与复合函数

称 $f^{-1}(y) = x$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数通常记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

g 与 f 构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须包含于 f 的定义域 D_f 内, 即 $g(D) \subset D_f$. 否则, 不能构成复合函数.

3. 函数的运算

函数的常见运算包括函数的四则运算和函数的复合运算.

4. 初等函数

初等函数中最简单的就是基本初等函数. 基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 分段函数不是初等函数, 双曲函数和反双曲函数都是初等函数.

三、数列的极限

1. 数列的概念

按照一定的顺序排成的一列数, 称为数列, 可以记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 或 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为数列的项. 数列有有界数列和无界数列之分.

单调增加数列 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ 和单调减少数列 $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$ 统称单调数列.

2

2. 数列的极限

对于数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, x_n 充分接近于某一常数 a , 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且以 a 为极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (或 $x_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$).

3. 收敛数列的性质

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限是唯一的.

(2) 收敛的数列一定是有界的数列.

(3) 设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 即数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(4) 如果数列收敛于 a , 则其任意子列一定收敛且必收敛于 a .

(5) 单调有界数列必有极限.

4. 收敛数列的运算法则

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 那么

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

(3) 当 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $B \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

四、自变量趋于有限函数的极限

1. 自变量趋于有限函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ (当 $x \rightarrow x_0$).

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$.

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow \infty$).

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow +\infty$).

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow -\infty$).

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

2. 函数极限的性质

(1) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

(2) 如果 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$), 那么存在常数 $M > 0$ 和 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

(3) 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$, 且 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$)), 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

(4) 在同一极限过程中, 函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且

$\lim g(x) = A, \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x)$ 存在, 且 $\lim f(x) = A$.

(5) 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

(1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

五、两个重要极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

六、无穷大与无穷小

1. 无穷大

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 就称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或

$x \rightarrow \infty$ 时的无穷大. 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$). 特别地, 以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷大.

2. 无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小. 特别地, 以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小. “零”是可以作为无穷小的唯一的常数.

3. 无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小的关系在同一极限过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

4. 无穷小与函数极限的关系

在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小.

5. 无穷小的比较

两个无穷小比值的极限的各种不同情况, 反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度. 包括低阶无穷小、高阶无穷小、同阶无穷小和等价无穷小等概念. 无穷小的等价代换定理是简化极限计算的一个重要定理.

七、函数的连续性

1. 函数连续的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义, 如果当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋于零时, 对应的函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 也趋于零, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

在区间上每一点都连续的函数, 叫做该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点, 那么函数在右端点连续是指左连续, 在左端点连续是指右连续.

2. 函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

通常把间断点分成两类: 第一类间断点和第二类间断点. 在第一类间断点中, 左、右极限相等者称为可去间断点, 不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点是第二类间断点.

3. 连续函数的运算

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 则函数 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 在点 x_0 也连续.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加 (或单调减少) 且连续, 那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续.

设函数 $y = f(g(x))$ 由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, $U(x_0) \subset D_{f \circ g}$. 若函数 $u = g(x)$ 在点 x_0 连续, 函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 连续, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在点 x_0 也连续.

4. 初等函数的连续性

- (1) 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.
 (2) 一切初等函数在包含在其定义域内的区间内都是连续的.

5. 闭区间上的连续函数的性质

闭区间上的连续函数的性质包括最大值与最小值定理、有界性定理、介值定理和零点定理等.

1.2

问题 1.1 数列的极限存在等于 a 和数列的极限不等于 a 的严格数学定义

【指点迷津】 对于数列 $\{x_n\}$, 当 n 无限增大时, x_n 充分接近于某一常数 a , 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且以 a 为极限, 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$. 这种叙述只是对极限的直观说明, 没有充分从数学方面严格说明数列极限存在.

数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的严格数学定义: 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且以 a 为极限, 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$. 该定义有两个相对应的量 ε, N , 对于不同的 ε , 要求 N 相应地变化.

如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$, 对于 $\varepsilon = 0.2$, 则取 $N > 5$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.2$.

对于 $\varepsilon = 0.02$, 则取 $N > 50$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.02$.

对于 $\varepsilon = 0.002$, 则取 $N > 500$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.002$.

对于 $\varepsilon = 0.0002$, 则取 $N > 5000$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.0002$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ 用严格数学定义证明为: 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. 所以, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$.

另外, 数列 $\{x_n\}$ 的极限不等于 a 的严格数学定义: 存在正数 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意的整数 $N > 0$, 总存在 $N_0 > N$, 恒有 $|x_{N_0} - a| \geq \varepsilon_0$. 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$, 存在正数 $\varepsilon_0 = 0.1$, 对于任意的整数 $N > 0$, 总存在 $N_0 = N + 1$, 恒有 $\left| \frac{1}{N_0} - 1 \right| \geq 0.1$.

问题 1.2 利用定义证明数列极限的常见错误

【指点迷津】 利用严格数学定义证明数列极限不太容易, 初学者容易出现错误. 现列举几个常见错误:

1. 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin nx}{n} = 0$

错误的证明: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 即 $\frac{1 + \sin nx}{n} < \varepsilon$, 所以 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

所以,对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正数 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 0 \right| < \epsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin nx}{n} = 0$.

用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 中, 任意给定的 $\epsilon > 0$, 要使 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, 去求使其成立的 N , 应该放大 $|x_n - a|$, 而以上证明是缩小 $|x_n - a|$, 是错误的. 实际上找 N 的过程要看能否反推出 $|x_n - a| < \epsilon$, 若不能, 就是错误的.

正确的证明: 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 0 \right| < \epsilon$, 只要 $\frac{2}{n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 所以对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正数 $N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right] > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 0 \right| < \epsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin nx}{n} = 0$.

2. 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin nx}{n} = 1$

显然上述极限是错误的, 极限应为 0. 但该错误命题也可给出证明: 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 1 \right| < \epsilon$, 因为 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 1 \right| < \frac{2}{n} + 1$, 所以只要 $\frac{2}{n} + 1 < \epsilon$, 即 $n > \frac{2}{\epsilon - 1}$. 所以对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正数 $N = \left[\frac{2}{\epsilon - 1} \right] > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 1 \right| < \epsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin nx}{n} = 1$.

上述证明好像也正确, 但是仔细看 $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 1 \right| < \frac{2}{n} + 1$ 右边 $\frac{2}{n} + 1$, 无论 n 取何正整数, $\frac{2}{n} + 1$ 恒大于 1. 当 $0 < \epsilon < 1$ 时, $\frac{2}{n} + 1 < \epsilon$ 不会成立. 主要是在找 N 时, $\left| \frac{1 + \sin nx}{n} - 1 \right|$ 放得太大了.

总之, 利用定义证明数列的极限一般采用倒推法, 但同时注意放缩不可过大, 否则容易导致以上错误.

问题 1.3 两数列和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间的关系

6

【指点迷津】 两数列和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间存在紧密的联系.

(1) 根据数列极限的运算法则, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 的极限均存在时, 这两数列和或差的极限等于它们各自极限的和或差, 这两数列积或商的极限等于它们各自极限的积或商.

(2) 两数列和或差的极限:

1) 当两数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 其中有一个极限不存在, 它们和或差的极限必定不存在. 即已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 数列 $\{y_n\}$ 的极限不存在, 则数列 $\{x_n + y_n\}$ 或 $\{x_n - y_n\}$ 极限肯定不存在. 就以 $\{x_n + y_n\}$ 为例, 假定 $\{x_n + y_n\}$ 的极限存在, 则由数列极限的运算性质, 有 $\{x_n + y_n - x_n\}$ 极限存在, 即数列 $\{y_n\}$ 的极限存在, 同已知矛盾. 所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 或 $\{x_n - y_n\}$ 的极限肯定不存在.

2) 当两数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 极限均不存在时, 它们和或差的极限可能存在也可能不存在.

如取 $x_n = \frac{1}{n} - n^2$, $y_n = \frac{1}{n} + n^2$, 则 $x_n + y_n = \frac{2}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 极限存在; 若取 $x_n = -\frac{1}{n} + n^2$, $y_n = \frac{1}{n} + n^2$, 则 $x_n + y_n = 2n^2 \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 极限不存在.

(3) 两数列积或商的极限.

1) 当两数列中有一个极限存在且不为 0, 另一个极限不存在, 它们积或商的极限必定不存在. 即: 已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若数列 $\{x_n\}$ 极限存在不为 0, 数列 $\{y_n\}$ 的极限不存在, 则数列 $\{x_n y_n\}$ 或 $\left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\}$ 的极限肯定不存在.

在. 以 $\{x_n y_n\}$ 为例. 因为假定 $\{x_n y_n\}$ 的极限存在, 则由数列极限的运算性质, 有 $\left\{\frac{x_n y_n}{x_n}\right\}$ 极限存在, 即数列 $\{y_n\}$ 的极限存在, 同已知矛盾. 所以数列 $\{x_n y_n\}$ 或 $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ 的极限肯定不存在.

2) 当两数列中有一个极限为 0, 另一个极限不存在, 它们积或商的极限可能存在也可能不存在. 如取 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \sin n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \sin n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin n}$ 不存在; 若取 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \times n^2} = 0$.

3) 当两数列极限均不存在, 它们积或商的极限可能存在也可能不存在.

如取 $x_n = n$, $y_n = n^2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \times n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$.

如取 $x_n = n$, $y_n = \sin n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \times \sin n$ 不存在也不为 ∞ , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sin n}$ 不存在.

如取 $x_n = n \sin n$, $y_n = \sin n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin n \times \sin n$ 不存在也不为 ∞ , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n \sin n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{\sin n} = +\infty$.

问题 1.4 函数在一点的极限存在等于 A 和函数在一点的极限不等于 A 的严格数学定义

【指点迷津】 如果当 x 从 x_0 左右两侧无限接近于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0$), 函数 $f(x)$ 的值无限接近于常数 A , 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$. 这种对函数在一点的极限的叙述只是直观说明, 没有充分从数学方面严格说明.

函数 $f(x)$ 在一点的极限存在的严格数学定义: 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义. 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, 存在正数 $\delta > 0$, 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$. 该定义有两个相对应的量 ϵ, δ , 对于不同的 ϵ , 要求 δ 相应变化.

如 $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$, 对于 $\epsilon = 0.2$, 则取 $\delta = 0.1$, 当 x 满足 $0 < |x - 2| < 0.1$ 时, 有 $|2x - 4| < 0.2$.

对于 $\epsilon = 0.02$, 则取 $\delta = 0.01$, 当 x 满足 $0 < |x - 2| < 0.01$ 时, 有 $|2x - 4| < 0.02$.

对于 $\epsilon = 0.002$, 则取 $\delta = 0.001$, 当 x 满足 $0 < |x - 2| < 0.001$ 时, 有 $|2x - 4| < 0.002$.

对于 $\epsilon = 0.0002$, 则取 $\delta = 0.0001$, 当 x 满足 $0 < |x - 2| < 0.0001$ 时, 有 $|2x - 4| < 0.0002$.

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$ 用严格数学定义证明为: 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, 要使 $|2x - 4| < \epsilon$, 只要 $2|x - 2| < \epsilon$, 即 $|x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$. 所以对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正数 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 当 $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$ 时, 恒有 $|2x - 4| < \epsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$.

另外, 函数 $f(x)$ 在一点的极限不等于 A 的严格数学定义: 存在正数 $\epsilon_0 > 0$, 对于任意的正数 $\delta > 0$, 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$. 如 $\lim_{x \rightarrow 1} 5x \neq 1$, 存在正数 $\epsilon_0 = 0.1$, 对于任意的正数 $\delta > 0$, 当 x 满足 $0 < |x - 1| < 0.1$ 时, 恒有 $|5x - 1| \geq 0.1$.

问题 1.5 利用定义证明函数在一点极限的常见错误

【指点迷津】 利用数学定义证明函数在一点的极限不太容易, 初学者容易出现错误. 现列举几个常见