学考指要丛书
XUEKAO ZHIYAO CONGSHU

学士版

本章综述　释疑解难　题型归纳　习题解答

高等数学（上册）

学考指要

汪志宏　田俊峰　胡贵安　编

西北工业大学出版社

高等数学
学考指要

（上册）

汪志宏　田俊峰　胡贵安　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)配套的教学辅导书。高等数学的概念、公式、定理较抽象难懂,解题方法也多样化,难以掌握,针对这个现状我们编写了本书。

全书分为12章,每章均设四个板块:本章综述、释疑解难、题型归纳和习题解答。"本章综述"部分概述了每章主要内容;对于那些重点难点及易混淆的知识点,本书"释疑解难"部分重点进行了详细诠释,力求让读者学习更容易,思路更清晰,理解更透彻;在"题型归纳"部分针对各种题型,给出多个实例,让读者在学习过程中更快更好地掌握解题思路及方法,达到举一反三,拓广知识面的效果。另外,我们还给出了《高等数学》(第五版)的习题解答,为读者学习提供参考。为满足读者复习应试需要,书后还附有两套期末考试题。

本书可作为学习高等数学课程的参考书,也可供考研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学考指要(上册)/汪志宏,田俊峰,胡贵安编.—西安:西北工业大学出版社,2006.5

(学考指要丛书)

ISBN 7-5612-2058-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①汪… ②田… ③胡… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第012266号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072

电　　话:(029)88493844　88491757

网　　址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西东江印务有限公司

开　　本:787 mm×960 mm 1/16

印　　张:36

字　　数:970千字

版　　次:2006年11月第1版　2006年11月第1次印刷

印　　数:1~6 000册

定　　价:48.00元(本册定价23.00元)

前 言

我们依据理工科各专业的培养目标和特点，按照教育部最新制定的高等数学课程教学大纲，编写了这本参考书。

本书着重对高等数学课程的知识要点进行了叙述，重点对那些重点难点及易混淆的知识点详细诠释，对各种题型的解题方法及技巧进行了分析介绍，以培养学生学习、解题能力。

本书除基本知识点全面、阐述解释清楚易懂等特点外，还突出以下特色：

(1) 对学习中易混淆和易忽略问题的解释清楚明了。

(2) 注重解题思路及技巧的培养，对各种题型解题思路及技巧重点分析，还对每一类型题目进行总结归纳评注，注重一题多解，有利于读者举一反三，扩大知识面，更全面地掌握所学知识。

(3) 着眼于读者的实际需要，对配套教材练习题给出较详细的解答，有助于读者更快、更好地发现和解决自己学习过程中遇到的问题。

书中收录的例题、习题均选自近几年通用教材和流行辅导书中，时效性强。本书由汪志宏、田俊峰、胡贵安执笔编写，全书由汪志宏统稿。

由于水平有限，书中难免存在疏漏及错误之处，恳请读者及同行批评指正。

编 者

2006 年 6 月

目 录

（上 册）

第 1 章
函数与极限

1.1 本章综述

一、集合

1. 集合的概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体，用 A,B,M 等表示．组成集合的事物称为集合的元素．a 是集合 M 的元素，表示为 $a \in M$.

一般利用列举法和描述法来表示集合．

若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$(读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$．

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集．

2. 集合的运算及法则

(1) 集合的运算．集合 A 与 B 的并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$；集合 A 与 B 的交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$；集合 A 与 B 的差集 $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$；称 $I \backslash A$ 为 A 的补集，记作 A^C，其中集合 I 为全集．

(2) 集合运算的法则．常见的集合运算的法则包括交换律、结合律、分配律和对偶律．

3. 区间和邻域

区间和邻域是特殊的集合．

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$. 设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

二、函数

1. 函数的概念

(1) 函数的定义．设有实数集 D 及两个变量 x 和 y，对每个 $x \in D$，如果按某种对应法则 f，总有确定的 y 值与之对应，则称 y 为 x 的定义在 D 上的函数，通常简记为 $y = f(x), x \in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$. 当变量 x 取遍实数集 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域．

构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

(2) 分段函数．在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数．如取整函数 $y=[x]$ 等．

(3) 函数的几种特性．函数有有界性、单调性、奇偶性和周期性四大特性．

2. 反函数与复合函数

称 $f^{-1}(y)=x$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数．一般地，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数通常记成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$．

g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须包含于 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$．否则，不能构成复合函数．

3. 函数的运算

函数的常见运算包括函数的四则运算和函数的复合运算．

4. 初等函数

初等函数中最简单的就是基本初等函数．基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等．

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．分段函数不是初等函数，双曲函数和反双曲函数都是初等函数．

三、数列的极限

1. 数列的概念

按照一定的顺序排成的一列数，称为数列，可以记为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 或 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的通项．数列有有界数列和无界数列之分．

单调增加数列 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots$ 和单调减少数列 $x_1>x_2>x_3>\cdots>x_n>\cdots$ 统称单调数列．

2. 数列的极限

对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，x_n 充分接近于某一常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛，并且以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（或 $x_n\to a$，$(n\to\infty)$）．

3. 收敛数列的性质

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限是唯一的．

(2) 收敛的数列一定是有界的数列．

(3) 设有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，即数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

(4) 如果数列收敛于 a，则其任意子列一定收敛且必收敛于 a．

(5) 单调有界数列必有极限．

4. 收敛数列的运算法则

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$；

(3) 当 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$．

四、自变量趋于有限函数的极限

1. 自变量趋于有限函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to x_0$).

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$　且　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2. 函数极限的性质

(1) 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么这极限唯一.

(2) 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$,那么存在常数 $M>0$ 和 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$,且 $f(x)\to A(x\to x_0)$),那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(4) 在同一极限过程中,函数 $f(x),g(x),h(x)$ 满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且

$\lim g(x)=A,\lim h(x)=A$,则 $\lim f(x)$ 存在,且 $\lim f(x)=A$.

(5) 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在,$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列,且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$,那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

3. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

五、两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.

六、无穷大与无穷小

1. 无穷大

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或

$x \to \infty$) 时的无穷大．记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$)．特别地，以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷大．

2. 无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小．特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小．"零"是可以作为无穷小的唯一的常数．

3. 无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小的关系在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷大．

4. 无穷小与函数极限的关系

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小．

5. 无穷小的比较

两个无穷小比值的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋于零的"快慢"程度．包括低阶无穷小、高阶无穷小、同阶无穷小和等价无穷小等概念．无穷小的等价代换定理是简化极限计算的一个重要定理．

七、函数的连续性

1. 函数连续的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续．如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续．如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续．

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续．

在区间上每一点都连续的函数，叫做该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续．如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续．

2. 函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点．

通常把间断点分成两类：第一类间断点和第二类间断点．在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点．无穷间断点和振荡间断点是第二类间断点．

3. 连续函数的运算

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则函数 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 在点 x_0 也连续．

如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续．

设函数 $y = f(g(x))$ 由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成，$U(x_0) \subset, D_{f \cdot g}$．若函数 $u = g(x)$ 在点 x_0 连续，函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 连续，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x_0 也连续．

4. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

(2) 一切初等函数在包含在其定义域内的区间内都是连续的.

5. 闭区间上的连续函数的性质

闭区间上的连续函数的性质包括最大值与最小值定理、有界性定理、介值定理和零点定理等.

1.2 释疑解难

问题 1.1　数列的极限存在等于 a 和数列的极限不等于 a 的严格数学定义

【指点迷津】　对于数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时,x_n 充分接近于某一常数 a,则称数列 $\{x_n\}$ 收敛,并且以 a 为极限,记作:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$. 这种叙述只是对极限的直观说明,没有充分从数学方面严格说明数列极限存在.

数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的严格数学定义:对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,存在整数 $N > 0$,当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛,并且以 a 为极限,记作:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$. 该定义有两个相对应的量 ε, N,对于不同的 ε,要求 N 相应地变化.

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$,对于 $\varepsilon = 0.2$,则取 $N > 5$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0.2$.

对于 $\varepsilon = 0.02$,则取 $n > 50$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0.02$.

对于 $\varepsilon = 0.002$,则取 $N > 500$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0.002$.

对于 $\varepsilon = 0.000\,2$,则取 $N > 5\,000$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < 0.000\,2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$ 用严格数学定义证明为:对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,要使 $\left|\dfrac{1}{2n} - 0\right| < \varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$,即 $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. 所以,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在正数 $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] > 0$,当 $n > N$ 时,恒有 $\left|\dfrac{1}{2n} - 0\right| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$.

另外,数列 $\{x_n\}$ 的极限不等于 a 的严格数学定义:存在正数 $\varepsilon_0 > 0$,对于任意的整数 $N > 0$,总存在 $N_0 > N$,恒有 $|x_{N_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$. 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \neq 1$,存在正数 $\varepsilon_0 = 0.1$,对于任意的整数 $N > 0$,总存在 $N_0 = N + 1$,恒有 $\left|\dfrac{1}{N_0} - 1\right| \geqslant 0.1$.

问题 1.2　利用定义证明数列极限的常见错误

【指点迷津】　利用严格数学定义证明数列极限不太容易,初学者容易出现错误. 现列举几个常见错误:

1. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sin nx}{n} = 0$

错误的证明:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,要使 $\left|\dfrac{1+\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon$,即 $\dfrac{1+\sin nx}{n} < \varepsilon$,所以 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$,即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

所以，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sin nx}{n} = 0$.

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 中，任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，去求使其成立的 N，应该放大 $|x_n - a|$，而以上证明是缩小 $|x_n - a|$，是错误的. 实际上找 N 的过程要看能否反推出 $|x_n - a| < \varepsilon$，若不能，就是错误的.

正确的证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon$，只要 $\frac{2}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sin nx}{n} = 0$.

2. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sin nx}{n} = 1$

显然上述极限是错误的，极限应为 0. 但该错误命题也可给出证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 1\right| < \varepsilon$，因为 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 1\right| < \frac{2}{n} + 1$，所以只要 $\frac{2}{n} + 1 < \varepsilon$，即 $n > \frac{2}{\varepsilon - 1}$. 所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon - 1}\right] > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 1\right| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sin nx}{n} = 1$.

上述证明好像也正确，但是仔细看 $\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 1\right| < \frac{2}{n} + 1$ 右边 $\frac{2}{n} + 1$，无论 n 取何正整数，$\frac{2}{n} + 1$ 恒大于 1. 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时，$\frac{2}{n} + 1 < \varepsilon$ 不会成立. 主要是在找 N 时，$\left|\frac{1+\sin nx}{n} - 1\right|$ 放得太大了.

总之，利用定义证明数列的极限一般采用倒推法，但同时注意放缩不可过大，否则容易导致以上错误.

问题 1.3　两数列和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间的关系

【指点迷津】 两数列和或差与积或商的极限同它们各自的极限之间存在紧密的联系.

(1) 根据数列极限的运算法则，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限均存在时，这两数列和或差的极限等于它们各自极限的和或差，这两数列积或商的极限等于它们各自极限的积或商.

(2) 两数列和或差的极限：

1) 当两数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 其中有一个极限不存在，它们和或差的极限必定不存在. 即已知数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，数列 $\{y_n\}$ 的极限不存在，则数列 $\{x_n + y_n\}$ 或 $\{x_n - y_n\}$ 极限肯定不存在. 就以 $\{x_n + y_n\}$ 为例，假定 $\{x_n + y_n\}$ 的极限存在，则由数列极限的运算性质，有 $\{x_n + y_n - x_n\}$ 极限存在，即数列 $\{y_n\}$ 的极限存在，同已知矛盾. 所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 或 $\{x_n - y_n\}$ 的极限肯定不存在.

2) 当两数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 极限均不存在时，它们和或差的极限可能存在可能不存在.

如取 $x_n = \frac{1}{n} - n^2$，$y_n = \frac{1}{n} + n^2$，则 $x_n + y_n = \frac{2}{n} \to 0 (n \to \infty)$，极限存在；若取 $x_n = -\frac{1}{n} + n^2$，$y_n = \frac{1}{n} + n^2$，则 $x_n + y_n = 2n^2 \to +\infty (n \to \infty)$，极限不存在.

(3) 两数列积或商的极限.

1) 当两数列中有一个极限存在且不为 0，另一个极限不存在，它们积或商的极限必定不存在. 即：已知数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若数列 $\{x_n\}$ 极限存在不为 0，数列 $\{y_n\}$ 的极限不存在，则数列 $\{x_n y_n\}$ 或 $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ 的极限肯定不存

在．以$\{x_ny_n\}$为例．因为假定$\{x_ny_n\}$的极限存在，则由数列极限的运算性质，有$\left\{\frac{x_ny_n}{x_n}\right\}$极限存在，即数列$\{y_n\}$的极限存在，同已知矛盾．所以数列$\{x_ny_n\}$或$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$的极限肯定不存在．

2）当两数列中有一个极限为 0，另一个极限不存在，它们积或商的极限可能存在可能不存在．如取$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\sin n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\sin n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sin n}$不存在；若取$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=n^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times n^2=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\times n^2}=0$.

3）当两数列极限均不存在，它们积或商的极限可能存在可能不存在．

如取$x_n=n$，$y_n=n^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\times n^2=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=+\infty$.

如取$x_n=n$，$y_n=\sin n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\times\sin n$不存在也不为$\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sin n}$不存在．

如取$x_n=n\sin n$，$y_n=\sin n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin n\times\sin n$不存在也不为$\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n\sin n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{\sin n}=+\infty$.

问题 1.4　函数在一点的极限存在等于 A 和函数在一点的极限不等于 A 的严格数学定义

【指点迷津】　如果当x从x_0左右两侧无限接近于x_0（记为$x\to x_0$），函数$f(x)$的值无限接近于常数A，则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限．记$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$．这种对函数在一点的极限的叙述只是直观说明，没有充分从数学方面严格说明．

函数$f(x)$在一点的极限存在的严格数学定义：函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义．对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，存在正数$\delta>0$，使得当x满足$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$．则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限．记$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$．该定义有两个相对应的量$\varepsilon$，$\delta$，对于不同的$\varepsilon$，要求$\delta$相应变化．

如$\lim\limits_{x\to 2}2x=4$，对于$\varepsilon=0.2$，则取$\delta=0.1$，当x满足$0<|x-2|<0.1$时，有$|2x-4|<0.2$.

对于$\varepsilon=0.02$，则取$\delta=0.01$，当x满足$0<|x-2|<0.01$时，有$|2x-4|<0.02$.

对于$\varepsilon=0.02$，则取$\delta=0.001$，当x满足$0<|x-2|<0.001$时，有$|2x-4|<0.002$.

对于$\varepsilon=0.000\,2$，则取$\delta=0.000\,1$，当x满足$0<|x-2|<0.000\,1$时，有$|2x-4|<0.000\,2$.

$\lim\limits_{x\to 2}2x=4$用严格数学定义证明为：对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，要使$|2x-4|<\varepsilon$，只要$2|x-2|<\varepsilon$，即$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$．所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当$0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$时，恒有$|2x-4|<\varepsilon$．故$\lim\limits_{x\to 2}2x=4$.

另外，函数$f(x)$在一点的极限不等于A的严格数学定义：存在正数$\varepsilon_0>0$，对于任意的正数$\delta>0$，使得当x满足$0<|x-x_0|<\varepsilon_0$时，恒有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon$．如$\lim\limits_{x\to 1}5x\neq 1$，存在正数$\varepsilon_0=0.1$，对于任意的正数$\delta>0$，当$x$满足$0<|x-1|<0.1$时，恒有$|5x-1|\geqslant 0.1$.

问题 1.5　利用定义证明函数在一点极限的常见错误

【指点迷津】　利用数学定义证明函数在一点的极限不太容易，初学者容易出现错误．现列举几个常见