數学分析的方法及例題选講

徐利治編著

商务印書館

數学分析的方法及例題选講

徐利治編著

本書着重介紹數学分析中的若干典型方法，內容分下列五章：(一)阿倍尔方法；(二)冪級數在計算中的应用；(三)不等式；(四)階的計算法及有關問題；(五)各种類型的極限問題。書中包括命題、例題及習題六百餘則，其中絕大部份均給出了証明、解法或指示，並在每章之末作了一些重點的註釋。本書可供數学專業高年級学生的学習参考，同時也可供高等学校數学分析課程的教師們作教学参考之用。

數学分析的方法及例題选講

徐利治編著

商务印書館出版
上海河南中路二一一号
(上海市書刊出版業營業許可証出字第〇二五号)
新華書店總經售
商务印書館北京廠印刷
(55783)

開本 850×1168 1/32　印張 10 5/16　字數 246,000
1955年12月初版　印數 1—3,000　定價(7)￥1.55

目　　録

序

1953年，筆者在东北人民大学，为數学系三四年級合班開設了一門学期課程，簡称“分析方法”。这本書的題材，便是根据原來的講稿为基礎，經过整理改寫而成的。

正如書名所标誌的那样，这本書主要是以介紹數学分析中的一些典型方法为目的。因此它和一般分析学教本是有區别的。

全書分五章，共包容命題、例題和習題600餘則。其中絕大部分都給出了証明、解法或提示，並且在每章之末还作了一些重點註釋。这些註釋对於了解若干典型命題的意义与方法精神的要點相信是有帮助的。

从这本書的內容性質來看，它的主要用处是这样：(一)可作为一般進修高等數学分析者的補充讀物和分析課程的教学参考書。(二)可供大学數学專業的高年級生为訓練分析技巧及解題能力之用。書中一部分的例題和習題，还可以作为數学分析課堂作業的題材。

这本書有它的特點和用处，但是也还有一些缺點存在着：第一，在各种題材的配置上，並沒有做到与其重要程度成比例。第二，在各个章節中，对於若干典型命題的意义和方法精神，还缺少隨時的說明和總結。好在由於各个章節，都帶有一定程度的独立性質，因此使用本書的讀者們，只要善於識别輕重，並隨時總結要點，也就不会受这些缺點的影响。

固然在这本書中，对於絕大部分的命題和例題，已經給出了証明或提示。但对於使用本書的青年讀者來說，筆者十分希望他們

能对其中的大部分題目独立地演習一遍；或者参考其解法要點，然後把証明或解題的步驟詳細寫出。这就是說，使用本書時，需要俘量加入自己的劳動。事实上，也衹有这样，才能收到較好的效果。

北京大学數学力学系的許宝騄教授，曾分出他一部分休养的時間，为本書原稿校閱一遍，並提示若干改進意見。肇者在此向他致以至誠的感謝。又东北人民大学的同事江澤坚副教授在我編寫本書的过程中，曾給以若干提議和鼓勵，在此也向他表示謝意。

最後，我也对本書的審稿者和編輯者所付出的劳動及其宝貴意見表示謝忱。

徐 利 治

1955年1月於長春东北人民大学

數学符号簡單介紹

$[x]$ 係表示实數 x 的最大整數部。亦卽 $[x]$ 为一合乎如此条件的整數：$[x]\leqslant x<[x]+1$。

$\{x\}$ 係表示实數 x 的最近整數。亦卽 $\{x\}$ 为一合乎如此条件的整數 $|\{x\}-x|<\frac{1}{2}$。

$\exp(x)$ 表示 x 的指數函數。亦卽 $\exp(x)=e^x$。

$\operatorname{sgn} x$ 表示一个 Kronecker 氏記号：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}+1 & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x=0,\\ -1 & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

$\operatorname{Max}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大值。

$\operatorname{Min}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小值。

$|a_{ik}|_1^n$ 或 $\det[a_{ik}]$ 表示以 a_{ik} 为元素的 n 級行列式。

$\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_1^\infty$ 表示一个序列（敍列）：$a_1, a_2, a_3, \cdots$。

$a_n\to a$ 表示当 $n\to\infty$ 時，$\lim a_n=a$。

$x\to a+$ 或 $x\to a+0$ 表示变量 x 从右方向趨於 a。有時亦記作 $x\downarrow a$。同理，$x\to a-$ 或 $x\to a-0$ 表示 x 从左方向趨於 a。亦可記作 $x\uparrow a$。

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 与 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 係分別表示於 $n\to\infty$ 時之 a_n 的上極限与下極限。同理，$\overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$ 与 $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$ 卽表示 $f(x)$ 於 $x\to a$ 時的上極限与下極限。

$\sup f(x)$ 与 $\inf f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 係分別表示 $f(x)$ 在間隔

$a\leqslant x\leqslant b$ 上的最小上界(上確界)与最大下界(下確界)。有時亦分別記作$\overline{\mathrm{bound}}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$与$\underline{\mathrm{bound}}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$。

$f_n(x)\xrightarrow{1}f(x)(n\to\infty;a\leqslant x\leqslant b)$係表示函數敍列$f_n(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$的間隔上一致地趨於$f(x)$。亦可記作$\lim f_n(x)\overset{1}{=}f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。

$a_n\sim b_n$ 表示当 $n\to\infty$ 時 $a_n/b_n\to1(b_n\neq0)$。

$a_n\prec b_n$ 或 $b_n\succ a_n$ 係表示 $a_n/b_n\to0(b_n\neq0)$。

$o(a_n)$係表示这样一个变量,它与 a_n 之比以零为極限。亦即於 $n\to\infty$ 時,$o(a_n)\prec a_n$。

$O(a_n)$ 係表示这样一个变量,它与 a_n 之比的絕对值有一个有限的上界($a_n>0$)。

$\overline{O}(a_n)$係表示这样一个变量,它与 a_n 之比的極限值为一異於零的常數($a_n>0$)。

$a\in A$ 表示元素 a 屬於集合 A。

$\sum\limits_{C}$ 表示在条件 C 之下求和。例如 $\sum\limits_{a\in A}f(a)$ 即表示对 A 中之一切元素 a 而求和。

$P\longrightarrow Q$ 表示命題(或定理)P隱含命題(或定理)Q。

$P\longleftrightarrow Q$ 表示命題P及Q可以相互推導。

$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=0.5772156649\cdots$表示奥衣勒常數。

$V_a^b[f(x)]$表示有界变差函數(囿变函數)$f(x)$在間隔 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的總变差。当 $a=0$ 時亦可記作 $V_f(b)$。

Δ 表示具有單位差的"差分算子",其定义为 $\Delta f(x)=f(x+1)-$ $-f(x)$。

E 表示一个"移位算子",其定义为 $Ef(x)=f(x+1)$。

引　言

數学分析，就其內容性質來說，是一門研究極限过程的理論与变量計算方法的科学；其中極限过程的內部規律性是变量計算方法的理論根据，变量計算的形式法則又是極限过程內部規律性的外在表現。

举个簡單的例，我們有下列熟知的微商公式：

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

这其实就代表着某种極限过程規律性的外在形式，同時也是微商計算中的有用法則之一。具体地說，这个公式实际是反映了極限过程的这样一个規律：当着自变量 x 的增量 Δx 趨於零時，函數乘積 $u\cdot v$ 的增量 $\Delta(uv)$ 对於增量 Δx 之比的極限，恰好就可以用 Δv，Δu 分別对於 Δx 之比的極限与 u, v 分別相乘之積的和來表現。这个規律的內部意义实际又是这样：在尙未通过極限过程之前，相应於 Δx 的 $u\cdot v$ 的增量 $\Delta(uv)$，恰好具有表達成为 $u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+o(\Delta x)$ 形式的可能，其中 $o(\Delta x)$ 一項对於 Δx 說來是一个高級"無窮小"，因而在以 $\frac{1}{\Delta x}$ 乘兩端之後並通过極限手續 $\Delta x\to 0$ 之時，那个原先是高級無窮小的項，也就由存在而消滅。很顯然的，如果在很多次碰到乘積函數的微商時，都重複地按照这个內部規律來做，那是不勝其煩的。由是可知，上述微商公式的作用（当然別的公式也是这样），还不僅是把变量变化过程的內部規律性反映出來，而且由於是把一个規律加以形式化固定化的結果，因而在实际計算中也就必然提供了不少便利。

一般說來，变量的計算法則(或方法)应該廣义地了解为变量解析的法則(或方法)。因此它並不專指微積分学中一些簡易的运算方法而言。例如，較複雜的解析式的估計法則(近似算法与漸近分析等)，变量之間相对的比較法則(不等式与階的計算法則等)，不同形态的極限之間的联繫法則（無窮級數与無窮乘積的相互轉化；線積分与重積分的联結法則——如格林定理等)，各种類型的極限計算法則以及二重極限的換序法則等等都無不屬於廣义的变量計算法則的範圍之內。

本書第一章，講的是阿倍尔方法。这其实就是一套關於下列形式的变量極限的解析法則：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} a_k b_k, \qquad \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

这一套解析方法在分析学中应用是較廣的。举例來說，以它为根据所作成的收斂判别法則，由於避免了將絕对收斂性的判定同時牽連在內，因而大大放寬了收斂法則適用的範圍。由於这样的理由，我們決定在本書中把它專列一章。

每一个初学分析的人，都会学到關於冪級數的一些基本命題。但是却很少注意到冪級數中的係數以及幾个冪級數乘積中的係數結合法則在若干計算中所起的重要作用。本書第二章便是为了顯示这种作用而設。

不等式工具在分析学中应用之廣是众所共知的。然而在一般富於系統性的分析教本中，却總不把它集中講解。因此在本書中也把它專設一章，而且收集了比較多样性的命題与例題。

本書第四章，講的是階的估計法。其中着重於具体运用方法的介紹。但在最末一節，也比較集中地注意到無窮大强度概念的描述。

本書第五章討論了各种類型的極限問題。敍列、級數与定積分的極限問題等佔有最大的篇幅。这是由於它們本身內容的丰富性所致。

總括來講，在本書各章中，我們偏重於变量計算方法的介紹。其中当然不可避免地時時要以極限过程的理論分析为依据。又由於变量的結構形式与限制条件可以是各种各样的，因此处理变量的具体方法也必然是多种多样的。在本書中，我們侭可能地以变量的計算法則(或解析方法)为核心，使多样性的个别的命題与例題圍繞在方法中心的周圍。当然这样做的結果，就無法很好地兼顧到分析学本身的邏輯系統性。这一點是应該在此預先指明的。

第一章　關於阿倍尔的方法

阿倍尔(Abel)的方法是一套比較古典的數学分析技巧。它在數学分析的某些部分，特别是在級數的收斂性理論与有關加式(或積分式)的階的計算中常常用到。

在分析学中，因为理論系統性的關係，常常把这个方法分散到幾处來講。在这裏，由於我們無需受系統性要求的限制，並希望能將这套方法在应用上的特點表現得更为顯著一些，因此就在这一章中，採用命題、例題和習題的形式，加以比較集中的考慮。

阿倍尔方法是从一个十分淺顯的恆等式開始的。这个恆等式又称为分部求和公式，它相当於積分学中的分部積分法。从这个簡單的恆等式可以直接推出阿倍尔引理，从而即可導出一系列很有價値的命題。簡單地說，正如下表所示：

恆等式……分部求和法
→阿倍尔引理
- →阿倍尔定理
  - →級數乘法定理。
  - ……冪級數求和法。
- →積分第二中值定理
- →阿倍尔收斂性判別法
- →狄利克萊收斂性判別法

現在我們就把有關阿倍尔方法的若干命題、例題及習題分佈在下列各節中：

§ 1.　分部求和法及其应用

1.（分部求和法）設 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k=1,2,3,\cdots)$，則

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n.$$

［証］ 只要將 $a_1=s_1, a_k=s_k-s_{k-1}(k=2,3,\cdots)$ 代入等式的左边，就可以看出等式是成立的。

2. 設 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\to s(n\to\infty)$。則

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=sb_1+(s_n-s)b_n-\sum_{k=1}^{n-1}(s_k-s)(b_{k+1}-b_k).$$

［提示］ 上式右边出現的 s 实际是可以消去的。

3. （阿倍尔引理） 若对於一切 $n=1,2,3,\cdots$ 而言，

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0,$$

$$m\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant M.$$

則有
$$b_1m\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1M.$$

［証］ 应用命題 1，並注意 $m\leqslant s_k\leqslant M$， $b_k-b_{k+1}\geqslant 0$，便得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}M(b_k-b_{k+1})+Mb_n=Mb_1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}m(b_k-b_{k+1})+mb_n=mb_1.$$

4. 設对一切 n 而言，$f_n\geqslant f_{n+1}\geqslant 0$。又設

$$A=\mathrm{Max}(|a_1|,|a_1|+|a_2|,\cdots,|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|).$$

則得
$$\left|\sum_{n=1}^{m}a_nf_n\right|\leqslant Af_1.$$
［阿倍尔］

5. 設 $a_1,a_2,\cdots,w_1,w_2,\cdots$ 为任意实數或複數。又設 A 代表加式 $\left|\sum_{n=1}^{p}a_n\right|$，$(p=1,2,\cdots,m)$ 中的最大值。則得

$$\left|\sum_{n=1}^{m}a_nw_n\right|\leqslant A\left\{\sum_{n=1}^{m-1}|w_{n+1}-w_n|+|w_m|\right\}.$$

6. 設 $\phi(n)>0$, $\phi(n)\uparrow\infty(n\to\infty)$。又設 $\sum a_n$ 为收斂。則得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\phi(k)=o(\phi(n))(n\to\infty). \qquad \text{［克郎內克］}$$

［証］ 本題可用分部求和法(命題 2)來証。令 N 表任一固定的正整數而 $n>N+2$。按假設，$s_n-s=o(1)(n\to\infty)$，顯然可書

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\phi(k)=(s_n-s)\phi(n)+s\phi(1)-\sum_{1}^{n-1}(s_k-s)\{\phi(k+1)-\phi(k)\}=$$

$$=o(\phi(n))+O(1)-\sum_{1}^{N}(s_k-s)\{\phi(k+1)-\phi(k)\}-$$

$$-\sum_{N+1}^{n-1}(s_k-s)\{\phi(k+1)-\phi(k)\}.$$

故对於任一固定 N 而言，我們有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\phi(k)\right|\leqslant o(\phi(n))+O(1)+O(1)+$$

$$+\varepsilon_N\sum_{N+1}^{n-1}\{\phi(k+1)-\phi(k)\}, \qquad (n\to\infty)$$

此处 $\varepsilon_N=\mathrm{Max}\,|s_k-s|$ $(k=N+1,N+2,\cdots)$。注意 $\phi(n)\uparrow\infty$, 且 $\varepsilon_N\to0(N\to\infty)$，因此对於任意預先給定的 $\varepsilon>0$(不論如何小)，總可选 N 充分大，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\phi(k)\right|\leqslant o(\phi(n))+\varepsilon_N\phi(n)\leqslant o(\phi(n))+\varepsilon\phi(n).$$

由於上式左端与 ε 並無關係，自然可令 $\varepsilon\to0$。故命題得証。

7. 設 $\phi(n)\downarrow0(n\to\infty)$，且 $\sum a_n\phi(n)$ 为收斂，則

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots a_n)\phi(n)=0.$$

［証］ 顯然在本命題中，只要將 $a_n\phi(n)$ 看作是命題 6 中之 a_n，而把 $\phi(n)^{-1}$ 看成是命題 6 中之 $\phi(n)$，就立刻得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k\phi(k))\phi(k)^{-1}=o(\phi(n)^{-1}),(n\to\infty).$$

［另証］ 本題亦可利用阿倍尔引理直接証明。任意給定 $\varepsilon>0$。由收斂性假設，可选 $N=N_{(\varepsilon)}>0$ 使凡 $m>n>N$ 時即有

$$-\frac{\varepsilon}{2}<a_m\phi(m)+a_{m-1}\phi(m-1)+\cdots+a_n\phi(n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

顯然 $\phi(m)^{-1}\geqslant\phi(m-1)^{-1}\geqslant\cdots\geqslant\phi(n)^{-1}>0,$

故按命題 3（視 $\phi(k)^{-1}=b_k$），便得到

$$-\frac{\varepsilon}{2}\phi(m)^{-1}<a_m+a_{m-1}+\cdots+a_n<\frac{\varepsilon}{2}\phi(m)^{-1}.$$

亦即 $$|(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m)\phi(m)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对於固定的 n，当然可令 m 充分大，使得

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)\phi(m)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $$|(a_1+a_2+\cdots+a_m)\phi(m)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因 ε 为任意，故知命題为眞確。

很明顯地，命題 6 与命題 7 是可以相互推導的。

8. 設 $\sigma>0$。則於下列的狄利克来(Dirichlet)級數

$$a_1\cdot 1^{-\sigma}+a_2\cdot 2^{-\sigma}+a_3\cdot 3^{-\sigma}+\cdots+a_n\cdot n^{-\sigma}+\cdots$$

收斂時必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)n^{-\sigma}=0$。

9. 設 $\{w_n\}_1^\infty$ 为任意一个複數序列而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|w_{n+1}^{-1}-w_n^{-1}|=\infty$。又

設級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n$ 为收斂。則必有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\left|w_{n+1}^{-1}-w_n^{-1}\right|\right)^{-1}=0.$$

［提示］ 应用命題 5 並仿照命題 7 的後一証法卽可得証。

§ 2. 阿倍尔引理应用於級數收斂問題

10.（阿倍尔定理） 設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$。則 $\lim_{x\to1-}\sum_{0}^{\infty} a_n x^n=s$。

［証］ 容易看出 $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n=f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上为一致收斂。因若任意給定 $\varepsilon>0$，由命題 3 可以見到（注意 $x^n\geqslant x^{n+1}\geqslant\cdots\geqslant0$）：

$$|r_{n,m}|=\left|\sum_{n}^{m} a_k\right|<\varepsilon,(m>n>N_\varepsilon)\to\left|\sum_{n}^{m} a_k x^k\right|<\varepsilon\ (0\leqslant x\leqslant1).$$

因此由函數級數的連續性定理卽得 $\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)=s$。

11.（級數乘法定理） 令 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$。又設 $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ 都收斂，則必

$$\sum_{0}^{\infty} c_n=\left(\sum_{0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} b_n\right). \qquad \text{［阿倍尔］}$$

［証］ 因为絕对收斂的級數可以相乘，因此

$$\sum_{0}^{\infty} c_n x^n=\left(\sum_{0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} b_n x^n\right)=s_1(x)s_2(x),\quad 0\leqslant x<1.$$