大學用書

高等應用數學

下冊

(數字解釋微積分)

Dr. JEROME C. R. LI 著

袁丕志
張金裕 譯

維新書局印行

高等應用數學

下册目次

第九章　指數及對數函數

第十章　指數與對數函數之微分與積分

第十一章 三角函數

第十二章 三角函數之微分與積分

第十三章　級　　數

第十四章　偏 微 分

第十五章　重 積 分

附　　錄

習題解答

索　　引

第 九 章

指數及對數函數

(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTION)

指數函數 $y=f(x)$ 爲 y 對 x 之變率成比例之函數。故本函數較變率爲常數之直線函數，當然要複雜。因此，本章乃先行討論高等代數中之指數與對數。與指數函數相反之函數——對數函數——亦將於本章介紹之。

§9.1 指數 (Exponent)

指數之觀念，乃爲 n 個 B 之乘積的簡寫通常爲 B^n，或

$$BBB\cdots B=B^n$$

例如

$$BBB=B^3。$$

B^n 之 n 字稱爲**指數**(exponent)；其中之 B 則稱爲**底數** (base)，此確實爲一簡寫。例如數量

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1{,}024$$

可簡寫成

$$2^{10}=1{,}024。$$

由指數之基本定義，吾人可得運算之定律。**指數之第一定律爲**

$$B^mB^n=B^{m+n} \tag{1}$$

此處 B, m 與 n 均爲數字當 $B=2$, $m=3$ 及 $n=4$，此定律謂

$$2^32^4=2^{3+4}=2^7$$

顯然爲眞，若不如此寫法，則 $2^3 2^4$ 等於

$$(2\times2\times2)(2\times2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$$

此按指數之定義可寫成 2^7。

至此僅知指數爲正整數，但亦可能爲零。B^0 之值可由方程式 (1) 求得之，

當 $n=0$，方程式 (1) 可寫成

$$B^m B^0=B^{m+0}=B^m \tag{2}$$

此謂

$$B^0=1 \text{ 但 } B\neq0。 \tag{3}$$

故 B^0 應設之爲 1，俾使方程式 (1) 可以引伸至指數爲零之情形，雖然方程式 (2) 表示 B^0 等於 1，但 B 之本身仍不得爲零，因

$$0^3=0\times0\times0=0$$

$$0^2=0\times0=0$$

$$0^1=0$$

故可知 0^0 應爲 0。爲避免混亂，吾人特定方程式 (3) 亦不包含 0^0 在內，而令 0^0 爲未定。

指數之第二定律爲

$$\frac{B^m}{B^n}=B^{m-n} \tag{4}$$

此可用數字加以說明，當 $B=2$，$m=4$ 及 $n=3$，上述方程式 (4) 謂

$$\frac{2^4}{2^3}=\frac{2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}=2^{4-3}=2^1=2$$

此顯然成立。

由本定律引伸而得負指數之定義。當 $B=2$，$m=3$，及 $n=6$，方程式 (4) 變成

$$\frac{2^3}{2^6}=2^{3-6}=2^{-3}。$$

但同樣之寫法亦可寫成

$$\frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2}=\frac{1}{2\times2\times2}。$$

故

$$2^{-3}=\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{2^3}$$

或一般化爲

$$B^{-n}=\frac{1}{B^n}\qquad B\neq0。\tag{5}$$

此 B 亦不等於零，因爲零不能爲除數故也。

指數之第三定律爲

$$(B^m)^n=B^{mn}\tag{6}$$

例如

$$(2^3)^4=2^{12}。$$

此顯然爲眞，因按指數之定義 $(2^3)^4$ 應等於

$$2^3\times2^3\times2^3\times2^3=2^{3+3+3+3}=2^{12}。$$

由本定律引伸而得分數指數之定義，***B* 之 *n* 次根之 *n* 次方應等於 *B* 之本身**卽:

$$(\sqrt[n]{B})^n=B。$$

若吾人欲將 B 之 n 次根寫成指數式

$$\sqrt[n]{B}=B^x,$$

則須先決定 x 之値，俾使指數定律可以應用。欲使方程式

$$(\sqrt[n]{B})^n=(B^x)^n=B^{xn}=B$$

成立，x 之値必等於 $1/n$。故 B 之 n 次根，定爲以指數爲 $1/n$ 之 B 卽

$$\sqrt[n]{B}=B^{\frac{1}{n}}。\tag{7}$$

由方程式 (6) 知

$$(\sqrt[n]{B})^m=B^{\frac{1}{n}}B^{\frac{1}{n}}\cdots B^{\frac{1}{n}}=B^{m\left(\frac{1}{n}\right)}=B^{\frac{m}{n}}\tag{8}$$

此乃分數指數之定義。

B之 m/n 次乘積可用二種方法求之；其一可視爲B之m次乘積之n次方根，其二可視爲B之n次方根之m次乘積。二種方法所得之結果相同。以符號表之，該二種方法均可寫成

$$B^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{B^m}=(\sqrt[n]{B})^m。$$

例如 $5^{\frac{2}{3}}$ 應等於

$$(\sqrt[3]{5})^2=(1.7099759)^2=2.924018$$

或

$$\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}=2.924018$$

均得相同之數字。又如 $5^{\frac{3}{2}}$ 等於

$$(\sqrt{5})^3=(2.2360680)^3=11.180340$$

或

$$\sqrt{5^3}=\sqrt{125}=11.180340$$

亦得相同之數字。

故吾人更進而可知，指數既可定爲分數與整數，亦可定爲正數與負數。方程式 (1)，(4) 與 (6) 之三個定律均可適用於一切之指數。

§9.2　對數 (Logarithm)

若一數 N 等於 B^n，而B 爲一不等於 1 之正數，該指數n 吾人稱之爲 N 之對數 (logarithm)，而 B 稱爲該對數之底數 (base)。以符號表之，N 之對數可寫成

$$\log_B N=n。$$

若

$$N=B^n$$

用圖解方法表示之，可寫成

$$數字=(底數)^{對數}$$

此底數爲不等於 1 之正數。

由上述之定義，可求出許多數字之對數，以 4 爲底 16 之對數爲

$$\log_4 16=2$$

因爲

$$16=4^2。$$

當底數由 4 變爲 2，該數之對數寫成

$$\log_2 16=4$$

因爲

$$16=2^4。$$

以 3 爲底，81 之對數爲

$$\log_3 81=4$$

因爲

$$81=3^4。$$

當底數由 3 變爲 9，則該數之對數可寫成

$$\log_9 81=2$$

因爲

$$81=9^2。$$

負數與分數對數，可由上述相同性質之指數而求得。例如以 2 爲底 0.125 之對數爲

$$\log_2 0.125=-3$$

因爲

$$0.125=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}。$$

以 16 爲底，2 之對數爲

$$\log_{16} 2=\frac{1}{4}=0.25$$

因爲

$$2=\sqrt[4]{16}=16^{\frac{1}{4}}=16^{0.25}。$$

以 5 爲底，0.4472136 之對數爲

$$\log_5(0.4472136)=-0.5$$

因爲

$$0.4472136=\frac{1}{\sqrt{5}}=5^{-\frac{1}{2}}=5^{-0.5}。$$

由對數之定義，吾人可導出若干結果。以 B 爲底，B 之對數等於 1，或

$$\log_B B=1 \tag{1}$$

因爲

$$B=B^1。$$

以任意數爲底，1 之對數等於 0，或

$$\log_B 1=0 \tag{2}$$

因爲

$$1=B^0。$$

更明顯的事實爲

$$N=B^{\log N} \tag{3}$$

因爲方程式

$$N=B^n$$

之指數 n，按定義爲以 B 爲底 N 之對數。

由對數之定義可得其運算之定律詳述如下：**對數之第一定律**

$$\log_B(MN)=\log_B M+\log_B N \tag{4}$$

此謂兩數乘積之對數，等於該二數之對數和，而與所用底數無關。對數

$$\log_B M=m$$

及

$$\log_B N=n$$

但

$$M=B^m$$

及

$$N=B^n。$$

因此M與N之乘積等於

$$MN=B^m B^n=B^{m+n}。$$

故乘積 MN 之對數爲

$$\log_B(MN)=m+n=\log_B M+\log_B N。$$

茲舉例說明本定律，吾人可視方程式

$$\log_2(4\times 8)=\log_2 4+\log_2 8。$$

以 2 爲底，4×8 卽 32 之對數爲

$$\log_2 32=5$$

因爲

$$32=2^5。$$

以同數爲底， 4 與 8 之對數分別爲

$$\log_2 4=2$$

與

$$\log_2 8=3$$

此定律謂

$$5=2+3$$

顯然成立。

對數之第二定律爲

$$\log_B\left(\frac{M}{N}\right)=\log_B M-\log_B N \tag{5}$$

此謂**分數之對數等於分子之對數減去分母之對數**。當M與N寫成

$$M=B^m$$

與

$$N=B^n,$$

則分數本身可寫成

$$\frac{M}{N}=\frac{B^m}{B^n}=B^{m-n}。$$

然後，按定義，分數之分子與分母之對數分別為

$$\log_B M=m$$

$$\log_B N=n$$

與

$$\log_B\left(\frac{M}{N}\right)=m-n。$$

因此三個對數間之關係為

$$\log_B\left(\frac{M}{N}\right)=\log_B M-\log_B N。$$

本定律可以下例加以說明，吾人可視方程式

$$\log_3\left(\frac{243}{9}\right)=\log_3 243-\log_3 9$$

以 3 爲底，243/ 9 之對數或 27 之對數爲

$$\log_3 27=3$$

因爲

$$27=3^3;$$

而以同數爲底 243 之對數爲

$$\log_3 243=5$$

因爲

$$243=3^5;$$

而 9 之對數爲

$$\log_3 9=2$$

因爲

$$9=3^2。$$

該定律謂

$$\log_3\left(\frac{243}{9}\right)=\log_3 27=\log_3 243-\log_3 9$$

卽

$$3=5-2$$

此顯然成立。

對數之第三定律爲

$$\log_B M^n=n\log_B M \tag{6}$$

此亦可由指數之定律導出。當M寫成

$$M=B^m$$

時，則其 n 次方必爲

$$M^n=(B^m)^n=B^m B^m\cdots B^m=B^{mn}。$$

因此，按定義，M之對數爲

$$\log_B M=m$$

而 M^n 之對數爲

$$\log_B M^n=nm。$$

當上式之 m 以 $\log_B M$ 代替，其結果則爲方程式（6）。

本定律可用下例加以說明

$$\log_2(4^5)=5\log_2 4。$$

4 之 5 次方等於 1,024。而以 2 爲底該 1,024 之對數爲

$$\log_2(4^5)=\log_2(1,024)=10$$

因爲

$$1{,}024=2^{10}。$$

而以 2 爲底， 4 之對數爲

$$\log_2 4=2,$$

即

$$10=5(2)$$

故此定律顯然成立。

上述對數之第三定律，亦包括**第四定律**即：

$$\log_B \sqrt[r]{M}=\frac{\log_B M}{r} \tag{7}$$

因M的 r 次方根可寫成

$$\sqrt[r]{M}=M^{\frac{1}{r}}=M^n。$$

因此當 $n=1/r$ 時，方程式 (7) 可視爲方程式 (6) 之特例。

本定律可以下例說明之；

$$\log_5 \sqrt[3]{125}=\frac{1}{3}\log_5(125)。$$

因爲 125 之立方根等於 5，而以 5 爲底， 125 之立方根之對數爲

$$\log_5 \sqrt[3]{125}=\log_5 5=1。$$

此定律謂，此數等於 125 之對數的 $1/3$，因爲

$$\log_5 125=3$$

此乃因

$$125=5^3$$

之故也。

§9.3 常用對數 (Common Logarithm)

對數之底可隨意選擇，以配合使用者之方便，但其最常用者乃以 10 爲底。**當選 10 爲底時，則此數之對數稱爲常用對數** (common logarithm)。

任何數之常用對數，爲 10 之整數次方者，可直接根據定義求得之。茲擧數個常用對數如下:

數　目	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1,000
對　數	−3	−2	−1	0	1	2	3

0.001 之常用對數爲 −3，乃來自

$$0.001=\frac{1}{1,000}=\frac{1}{10^3}=10^{-3}$$

而 1,000 之常用對數爲3，則來自

$$1,000=10^3。$$

任何數N之常用對數，均可寫成 $\log N$，省略其底數 10。此種簡寫，除非事先加以說明，並非通用者。本書對常用對數，以後均將用此種簡寫符號。吾人可將上表內之對數，簡寫如下:

$$\begin{aligned}\log 0.001 &= -3\\ \log 0.01 &= -2\\ \log 0.1 &= -1\\ \log 1 &= 0\\ \log 10 &= 1\\ \log 100 &= 2\\ \log 1,000 &= 3\end{aligned}$$

上列所示，對數爲負值時並未限定，當一正數接近於 0，其對數則變成更大之負數。

1 至 10 之常用對數列於附錄表 1，此表共有 18 頁，每頁有 50 列 10 行，每列用三位數，每行用一位數標明之。因此該表爲一含有五位有效數之對數表，例如第 123 列與4行交叉之數爲 09132，卽

$$\log 1.234=0.09132。$$

各列之三位數爲一數N之首三位數，而各行之一位數則爲該數最末之第四個數，N 之第一位與第二位數間之小數點，於該表中均省略。N 之有效五位對數前之小數點也同樣省略。有此瞭解，吾人可自該表中求出 1.800，2.908，7.950 與 1.000 之對數，分別爲

$$\log 1.800=0.25527$$

$$\log 2.908=0.46359$$

$$\log 7.950=0.90037$$

$$\log 1.000=0.00000。$$

當常用對數

$$n=\log N$$

爲已知時，吾人可由該表決定 N 之值，故有時稱 **N 爲 n 之反對數** (antilogarithm)，在該表內此N均簡寫爲 10^n。例如上述之 4 個方程式可寫成

$$1.800=10^{0.25527}$$

$$2.908=10^{0.46359}$$

$$7.950=10^{0.90037}$$

$$1.000=10^{0.00000}。$$

附錄表 1 僅列 1 至 10 之常用對數，因

$$\log 1=0$$

及

$$\log 10=1,$$

故表中之對數應介於 0 與 1 之間。因此利用對數之第一定律

$$\log(MN)=\log M+\log N$$

即 §9.2 方程式 (4)。任何數目之常用對數，可寫成 M 與 N 之積，此 M 爲 10 之整數次方，而 N 爲 1 與 10 間之數字。例如求 123.4 之