高等院校核心课程导学

高等数学导学

杨万利　程俊明　李庆奎　罗俊芝　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

—— 高等院校核心课程导学丛书 ——

高等数学导学

杨万利　程俊明
李庆奎　罗俊芝　编著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

作者集 10 余年教学理论与实践研究的经验，以高等数学分类典型题及综合典型题解题思路的分析为主导，同步于高等数学的教学实际，以提高学生掌握高等数学基本知识难点及解决高等数学问题的能力为目的，重点介绍高等数学典型题解题的分析思路、基本方法与技巧。

本书可作为大学生学习高等数学的同步教学参考书，也可作为报考硕士研究生的复习及进行高等数学竞赛准备的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导学 / 杨万利等编著. —北京：国防工业出版社，2006.7
高等院校核心课程导学丛书
ISBN 7-118-04130-0

Ⅰ.高... Ⅱ.杨... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101809 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 29 字数 682 千字
2006 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 **定价** 40.00 元

国防书店：(010) 68428422 发行邮购：(010) 68414474
发行传真：(010) 68411535 发行业务：(010) 68472764

前　言

随着社会对高素质人才需求的增长,众多工程本科大学生想熟练掌握高等数学典型问题解题方法与技巧的愿望日益强烈,每年都有数十种各类高等数学考研辅导丛书面市。但分析众多参考材料发现,大多以介绍高等数学解题方法与技巧的讲授为主,穿插少许解题思路的精解与剖析。从培养大学生创新能力、创新思维的角度考虑,培养、锻炼大学生分析、解决数学问题的思维方法应该是数学课程教学的本质所在,解题方法与技巧固然重要,但提高分析、解决数学问题的能力的关键还在于理顺、矫正解决数学问题的思维方法,只强调方法、技巧的总结与训练,难于使方法、技巧达到真正的提高,只能使读者陷入浩瀚题海之中,此也是目前各类数学复习材料越编越厚之根本所在。本书旨在将“高等数学典型问题的解决思路之剖析”与“高等数学典型问题的解决方法与技巧之总结”穿插予以精解,在总结“高等数学典型问题的解决方法与技巧”的同时,掌握“高等数学典型问题的一般解决思路”,真正熟练掌握高等数学各知识点,以达到提高分析、解决数学问题能力的真正目的。

目前,国内高等数学考研辅导丛书,大多都集中于罗列一系列解题的方法与技巧,而从提高学生真正解题能力方面仍没能脱开“题海”方式。数学考研(即便是平时的教学也是需要的)辅导丛书急需有一种以剖析解题思路,而达到掌握解题方法、技巧的资料出台。作者集10余年教学一线及数学研究的经验,也想在这一方面做一尝试。

本书以近几年工科类硕士研究生入学试题为背景,以高等数学分类典型题及综合典型题解题思路的分析为主导,同步于高等数学的教学实际,以提高学生掌握高等数学基本知识难点及解决高等数学问题的能力为目的,重点介绍高等数学典型题解题思路的分析及高等数学典型题解题的基本方法与技巧。

本书可作为本科高等数学教学、报考硕士研究生的复习及高等数学竞赛准备的参考资料。限于作者的水平,本书难免有疏漏及不足之处,恳请读者予以指正。

编　者

2006年5月

目　　录

第一章　函数与极限

一、知识要点解析

高等数学所研究的主要对象是一种特殊的映射——函数,极限则是研究函数的一种重要手段.本章重点介绍函数与极限的基本概念及一些相关性质,是整个高等数学课程乃至后续课程的重要基础,深刻掌握和理解这些基本概念、基本思想及基本方法是学好高等数学的关键.

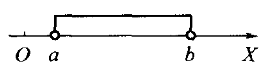
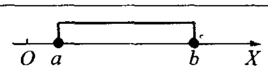
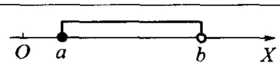
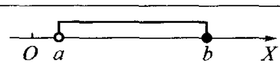
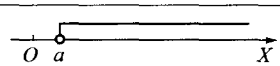
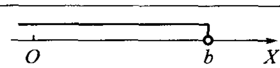
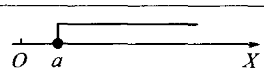
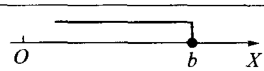
(一) 函数

1. 几类常见的数集

全体自然数的集合 $\mathbf{N}$;全体整数的集合 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合 $\mathbf{R}$.

区间集是一类有着较多用途的数集.

区间集一览表

类别	名称	记号	几何表示	备注
有限区间集	开区间	(a,b)		其中:$a,b \in \mathbf{R}$,且 $a<b$;a 称为区间的左端点,b 称为区间的右端点.$b-a$ 被称为区间的长度
	闭区间	$[a,b]$		
	半开区间	$[a,b)$		
		$(a,b]$		
无限区间集	无限开区间	$(a,+\infty)$		其中:$a,b \in \mathbf{R}$
		$(-\infty,b)$		
		$(-\infty,+\infty)$	整个数轴	
	无限半开区间	$[a,+\infty)$		
		$(-\infty,b]$		

邻域也是高等数学中常用的基本概念,设 $a,\delta \in \mathbf{R}$,且 $\delta>0$,我们有点 a 的 δ 邻域为

$$U(a,\delta) = (a-\delta,a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

点 a 的去心 δ 邻域为

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

其中：a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

2. 函数概念

1）函数的定义

函数是一种特殊的映射，函数的定义域与对应法则是构成函数的两个主要因素；当且仅当定义域与对应法则都一致时，才称两个函数是相等的. 从函数的定义来看：对于定义域 $\mathbf{D}$ 中的每个元素 x，按一定的法则 $f(x)$ 总有值域中确定的值 $y=f(x)$ 与之对应，至于能有几个确定的值 y 与之对应，则是由法则 $f(x)$ 所决定的，从这个意义上来讲，函数分为单值函数（对于定义域 D 中的每个元素 x，总有惟一确定的值 $y=f(x)$ 与之对应）与多值函数（非单值函数的函数）. 如无特别说明，高等数学中所研究的函数均指单值函数.

2）函数的图形

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{D}$，称 XOY 平面上的点的集合 $\mathbf{C}=\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

3）分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数通常称之为分段函数；分段函数无论在理论上还是在应用上都有着很重要的作用. 几个重要的分段函数如下.

（1）绝对值函数

$$y = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

其图形如图 1－1 所示.

（2）符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

其图形如图 1－2 所示.

（3）取整函数

$$y = [x] = \begin{cases} \cdots \\ k & (k \leqslant x < k+1, k \in \mathbf{N}) \\ \cdots \end{cases}$$

其图形如图 1－3 所示.

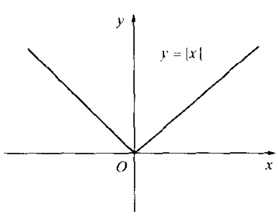


图 1－1

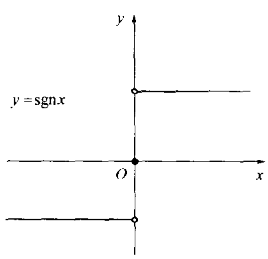


图 1－2

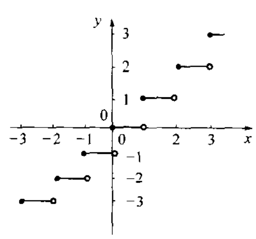


图 1－3

3. 函数的几种特性

1）函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{D}$,数集$\mathbf{X}\subset\mathbf{D}$. 如果存在数$k_1$,使得:对于任意的$x\in\mathbf{X}$,均有$f(x)\leqslant k_1$,则称函数$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上有上界,并称$k_1$为$f(x)$在$\mathbf{X}$上的一个上界。显然,若$k_1$是$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上的一个上界,则对于任意正数$M$,$k_1+M$均为$f(x)$在$\mathbf{X}$上的上界,由此可见,在数集$\mathbf{X}$上有上界的函数$f(x)$在$\mathbf{X}$上的上界不是惟一的(其最小的上界称为$f(x)$在$\mathbf{X}$上的上确界,记为$\sup\limits_{x\in\mathbf{X}}f(x)$,而$f(x)$在$\mathbf{X}$上的上确界是惟一的,有兴趣的读者可参见相关理科数学分析教材.);如果存在数k_2,使得:对于任意的$x\in\mathbf{X}$,均有$f(x)\geqslant k_1$,则称函数$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上有下界;同上界问题的讨论一样,如果$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上有下界,则$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上的下界不是惟一的,其最大的下界称为$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上的下确界,记为$\inf\limits_{x\in\mathbf{X}}f(x)$,$f(x)$在$\mathbf{X}$上的下确界是惟一的。在数集$\mathbf{X}$上既有上界,又有下界的函数$f(x)$,称为在数集$\mathbf{X}$上的有界函数;显然,函数$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上有界的充要条件是:存在正数$M$,使得对任意$x\in\mathbf{X}$,均有$|f(x)|\leqslant M$成立. 如果这样的正数$M$不存在,则称$f(x)$在数集$\mathbf{X}$上无界.

2）函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{D}$,区间$\mathbf{I}\subset\mathbf{D}$,如果对于区间$\mathbf{I}$上任意两点$x_1$及$x_2$,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),\quad(\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数$f(x)$在区间$\mathbf{I}$上是单调增加(减少)的.

函数$f(x)$在区间$\mathbf{I}$上是单调增加(减少)的,等价于下列两个条件之一.

条件1:$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$(或$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$),对任意的$x_1,x_2\in\mathbf{I}$成立;

条件2:$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\left(\text{或}\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\right)$,对任意的$x_1,x_2\in\mathbf{I}$且$x_1\neq x_2$,成立.

3）函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域$\mathbf{D}$关于原点对称,如果对于任一$x\in\mathbf{D}$,

$$f(-x)=f(x)\quad(\text{或}f(-x)=-f(x))$$

恒成立,则称$f(x)$为$\mathbf{D}$上奇函数(偶函数).

几何意义:奇函数的图像是关于原点对称的,偶函数的图像是关于y轴对称的.

4）函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{D}$,如果存在一个不为零的数l,使得对于任一$x\in\mathbf{D}$有$x\pm l\in\mathbf{D}$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称$f(x)$为$\mathbf{D}$上的周期函数,l称为$f(x)$的周期,如果周期函数存在最小正周期,那么,通常所说的周期函数的周期指的是最小正周期。但并不是所有周期函数都会存在最小正周期的.

几何意义:设函数$f(x)$在$\mathbf{D}$上以T为周期,$x_0\in\mathbf{D}$,k为任意整数,则函数$y=f(x)$在区间$[x_0,x_0+T]$上的图像与在区间$[x_0+kT,x_0+(k+1)T]$上的图像完全“相同”(即前者向右平移kT个单位后与后者完全重合).

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 定义于数集 $\mathbf{D}$ 上，其值域为数集 $\mathbf{W}=\{y \mid y=f(x), x \in \mathbf{D}\}$，则对于任意的 $y \in \mathbf{W}$，总至少能确定一个 $x \in \mathbf{D}$，使得 $f(x)=y$. 这样所确定的新的对应关系被称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，函数 $y=f(x)$ 也就被称为直接函数，由定义易见，尽管函数 $y=f(x)$ 可能是单值函数，但其反函数却很有可能是多值函数. 由反函数的定义来看，任何函数都会存在反函数，但我们都在许多情况下关注，对于单值函数 $y=f(x)$ 而言，何时其反函数也是单值的呢？这个问题的答案将在以后给出.

几何意义：直接函数的图像与反函数的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

（二）初等函数

1. 基本初等函数

（1）幂函数　　$y=x^{\mu}$（μ 是常数）.

（2）指数函数　　$y=a^{x}$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$）.

（3）对数函数　　$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$）.

（4）三角函数　　$y=\sin x$（正弦函数），$y=\cos x$（余弦函数）.

$y=\tan x$（正切函数），$y=\cot x$（余切函数）.

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$（正割函数），$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$（余割函数）.

（5）反三角函数　　$y=\mathrm{Arcsin}x$（反正弦函数）.

$y=\mathrm{Arccos}x$（反余弦函数）.

$y=\mathrm{Arctan}x$（反正切函数）.

$y=\mathrm{Arccot}x$（反余切函数）.

深刻理解并掌握上述基本初等函数的基本性质（包括定义域、奇偶性、周期性、单调性、对称性、有界性等性质）对后续知识的学习是至关重要的.

2. 复合函数与初等函数

1）复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $\mathbf{D}_1$，函数 $u=\varphi(x)$ 在 $\mathbf{D}_2$ 上有定义，且 $\mathbf{W}_2=\{u \mid u=\varphi(x), x \in \mathbf{D}_2\} \subset \mathbf{D}_1$，则对于任一 $x \in \mathbf{D}_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u \in \mathbf{W}_2$ 与之对应，再通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应，这样，得到一个以 $x \in \mathbf{D}_2$ 为自变量，y 为因变量的函数，称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

u 被称为中间变量.

2）初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

3. 双曲函数与反双曲函数

1）双曲函数

（1）双曲正弦　　$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

（2）双曲余弦 $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

（3）双曲正切 $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

2）反双曲函数

（1）反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

（2）反双曲余弦 $y = \operatorname{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

（3）反双曲正切 $y = \operatorname{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$

（三）数列的极限

1. 定义

设有数列$\{x_n\}$与常数a,如果对于任意给定的正数ε(不论它有多小),总存在正整数N,使得对于$n>N$时的一切x_n,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立,则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$,并称数列$\{x_n\}$为收敛数列;否则称为发散数列.

上述定义被称为数列极限的$\varepsilon - N$定义,在此定义中,有两点是需要强调说明的:一是关于任意小的正数ε;二是关于正整数N的存在性.

任意小的正数ε,是刻画x_n能够任意接近a的程度,对于任意小的正数ε,如果$f(\varepsilon)$也能达到任意小,则在数列极限的$\varepsilon - N$定义中,也可用$f(\varepsilon)$替代ε而行使“刻画x_n能任意接近a”的程度. 比方说,我们可取$f(\varepsilon)$为

$$c\varepsilon, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2, \cdots$$

其中:c为正常数.

此时,数列极限的$\varepsilon - N$定义便可如下叙述:若对于任意小的正数ε,$f(\varepsilon)>0$也可任意小(学完函数极限后,此意味着$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)=0$),且存在$N>0$,使得$n>N$时,$|x_n - a| < f(\varepsilon)$,则称数列$\{x_n\}$的极限为$a$.

对于正整数N应该注意把握两点:其一,N是伴随着ε而存在的,即对于预先给定ε后,才存在正整数N,一般来讲,N是随着ε的减小而增大的,但N却不是惟一存在的;其二,定义中只强调了整数N的存在性,而并非必须找到最小的N,至于时刻N以前的情形可以不予关心,尽管在第N项以前也有可能存在某项也能与常数a有给定的接近程度,我们只关注第N项以后的各项均能保持与常数a的距离小于给定的任意小正数ε即可.

2. 性质

收敛数列具有如下几个性质.

1）极限惟一性

若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限是惟一的.

2）收敛数列的有界性

若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$为有界数列.

3）收敛数列子列的收敛性

若数列$\{x_n\}$有极限a,则其任一子列$\{x_{n_k}\}$也有限极a.

4）保号性

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$,则存在正整数$N_1$,使得$n>N_1$时$x_n>0$.

5）保序性

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,且$A<B$,则存在正整数$N_1$,使得$n>N_1$时,$x_n<y_n$;若存在$N_2$,$n>N_2$时$x_n\leqslant y_n$,且$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则$A\leqslant B$.

（四）函数的极限

1. 定义

（1）自变量趋于有限值时函数的极限:函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ,使得对于满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则常数A为函数$f(x)$在$x\to x_0$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

（2）自变量趋于有限值时函数的左(或右)侧极限:函数$f(x)$在点x_0的某一去心左(或右)侧邻域$(x_0-\delta_0,x_0)$(或$(x_0,x_0+\delta_0)$)内有定义,如果对于任意给定的正数ε,总存在正数$\delta<\delta_0$,使得对于满足不等式$0<x_0-x<\delta$(或$0<x-x_0<\delta$)的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0^-$(或$x\to x_0^+$)时的左(或右)侧极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$).

（3）自变量趋于无穷大时函数的极限:设函数$f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义,如果任给$\varepsilon>0$,总存在着正数X,使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 并称$y=A$为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线.

（4）自变量趋于正(或负)无穷大时函数的极限:设函数$f(x)$在x大于(或小于)某一数时有定义,如果任给$\varepsilon>0$,总存在着正数X,使得对于适合不等式$x>X$(或$x<-X$)的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A为函数$f(x)$当$x\to+\infty$(或$x\to-\infty$)时的极限,记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$). 并称$y=A$为函数$y=f(x)$的图形的右(或左)水平渐近线.

注:关于上述四类极限的定义,同数列极限的定义相同. 也有两点需要强调说明的,其一是关于任意小的正数ε,这一点同数列极限定义时的情形;其二是自变量趋于有限值时函数极限定义中的δ(包括左、右侧极限时的情形)及自变量趋于无穷大的函数极限定义中的X(包括$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时的情形). 以自变量趋于有限值时的情形为例,我们所强调的是δ的存在性,一般来讲,δ是随着ε的减小而减小的,δ不是惟一的;另应注意的一点则是讨论$x\to x_0$(或$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$)的过程中函数的极限时,并不关心$x=x_0$时的函数值(无论其存在与否),我们所关注的只是$x\to x_0$时$f(x)$的变化情况.

2. 性质

1）极限的惟一性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$)存在,则极限

是惟一的.

2）局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$)存在,则存在$\delta_1>0$,使得$f(x)$在去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$(或开区间$(x_0-\delta_1,x_0)$或开区间$(x_0,x_0+\delta_1)$)内是有界的;若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$)存在,则存在$X_1>0$,使得$f(x)$在$|x|>X_1$(或$x>X_1$或$x<-X_1$)时是有界的.

3）局部保号性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A>0$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A>0$),则存在$\delta_1>0$,使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$(或$x\in(x_0-\delta_1,x_0)$或$x\in(x_0,x_0+\delta_1)$)时,$f(x)>0$;若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A>0$(或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A>0$),则存在$X_1>0$,使得$|x|>X_1$(或$x>X_1$或$x<-X_1$)时,$f(x)>0$.

4）局部保序性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且$A<B$,则存在$\delta_1>0$,使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$时$f(x)<g(x)$;若存在$\delta_2>0$,使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$时$f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则$A\leqslant B$(关于其他情形时的函数极限可得相似结论).

（五）无穷小与无穷大

1. 无穷小

1）定义

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$或$x\to\infty$或$x\to-\infty$或$x\to+\infty$)时的极限为零,则称函数$f(x)$为在$x\to x_0$(或$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$或$x\to\infty$或$x\to-\infty$或$x\to+\infty$)时的无穷小.

注：无穷小函数是与自变量的变化过程紧密相关的. 如果$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$,则称数列$\{x_n\}$为无穷小数列.

2）无穷小与极限的关系

在自变量的同一变化过程中,$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中,$\lim\alpha(x)=0$;$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow x_n=A+\alpha_n$,其中,$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha_n=0$.

2. 无穷大

1）定义

如果对于任意给定的正数M,总存在正数δ,使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$0<x_0-x<\delta$或$0<x-x_0<\delta$)的一切x,$f(x)$有定义,且满足不等式$|f(x)|>M$,则称函数当$x\to x_0$(或$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$)时为无穷大;如果对于任意给定的正数M,总存在正数X,使得对于适合不等式$|x|>X$(或$x>X$或$x<-X$)的一切x,$f(x)$有定义,且满足不等式$|f(x)|>M$,则称函数在$x\to\infty$(或$x\to+\infty$或$x\to-\infty$)时为无穷大;如果对于任意给定的正数M,总存在正整数N,使得$n>N$时,总有$|x_n|>M$,则称数列$\{x_n\}$为无穷大数列.

2）铅直渐近线

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$（或$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$或$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$），则称直线$x = x_0$是函数$y = f(x)$的图形的铅直（或右铅直或左铅直）渐近线.

3）无穷大与无穷小的关系

在同一变化过程中，$\alpha(x)$为无穷大$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$为无穷小.

（六）极限运算法则

1. 无穷小运算法则

法则1：同一变化过程中的有限个无穷小的和也是无穷小.

法则2：同一变化过程中的有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

法则3：同一变化过程中的无穷小的乘积也是无穷小.

2. 极限四则运算

法则1：如果$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

法则2：如果$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则$\lim[f(x)g(x)] = AB$.

法则3：如果$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B \neq 0$，则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

注：上述极限是同一极限过程，如果将极限换成数列的极限，结论也是成立的.

3. 复合函数的极限运算法则

若$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a, \lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，且在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x) \neq a$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A$$

注：将$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$换成$\lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi(x) = a$（或$\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi(x) = a$或$\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = a$或$\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$等），相应将$\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$换成$\lim\limits_{u \to a} f(u) = \infty$或换成$\lim\limits_{x \to \infty} f(u) = A$，可得类似的结论成立.

（七）极限存在准则及两个重要极限

1. 夹逼准则

1）数列极限的夹逼准则

如果数列$\{x_n\}, \{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

① 存在$N, n > N$时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$；

② $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{x \to \infty} z_n = a$.

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

2）函数极限的夹逼准则

（以$x \to x_0$和$x \to \infty$为例，其他极限过程也成立）如果

① $x \in \mathring{U}(x_0, r)$（或$|x| > M$）时，有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

② $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$（或$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = A$），则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$（或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$）存在，

且等于 A.

3）一个重要不等式

$$0 < x < \frac{\pi}{2}\text{时}, \sin x < x < \tan x$$

2. 单调数列极限存在准则

单调有界数列必有极限;单调增加无界数列必趋向于正无穷大;单调减少无界数列必趋向于负无穷大.

3. 柯西(Cauchy)极限存在准则

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:对于任意给定的正数 ε,存在着这样的正整数 N,使得当 $m,n>N$ 时,有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$;

注:其中 $\alpha(x)\to 0$ 的过程可以是任意极限过程,也可换成为无穷小数列,即

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=\mathrm{e}$.

(八) 无穷小的比较

1. 无穷小的阶

设 α,β 是同一变化过程中的无穷小.

1）高阶无穷小

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称在此变化过程中 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;同时称 α 是比 β 低阶的无穷小.

2）同阶无穷小

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称此变化过程中 β 与 α 是同阶无穷小.

3）k 阶无穷小

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$,则称此变化过程中 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

4）等价无穷小

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称此变化过程中,$\beta$ 与 α 是等价无穷小,并记作 $\alpha\sim\beta$.

β 与 α 是等价无穷小的充要条件是 $\beta=1+o(\alpha)$.

2. 等价无穷小在极限中的应用

若 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

（九）函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性

（1）函数的连续性定义．设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续．

（2）函数的左（或右）连续性定义．如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是左（或右）连续的．

（3）函数 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是函数在 x_0 点是左连续的同时也是右连续的．

2. 函数的间断点

1）第一类间断点

如果 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，则称此间断点为函数的第一类间断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则进一步称此间断点为可去间断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称此间断点为正数 $f(x)$ 的跳跃间断点．

2）第二类间断点

如果 $f(x)$ 在 x_0 的左、右侧极限至少有一个不存在，则称此类间断点为函数的第二类间断点．无穷间断点与振荡间断点属于常见的第二类间断点．

（十）连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 连续函数的和、差、积及商的连续性

有限个在某点连续的函数的和、差、积及商（此时需要做分母的函数在该点非零）是一个在该点连续的函数．

2. 反函数与复合函数的连续性

1）反函数的连续性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续．

注：函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上的单调性确保了其反函数 $x=\varphi(y)$ 的单调性，这可直接用反证法依据单调函数的定义得以证明．也可由直接函数与反函数的图形特点得以直观显示．

2）复合函数的连续性

（1）复合函数的极限．设函数 $u=\varphi(x)$，当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u\to a$ 时的极限也存在且等于 A，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x\to x_0$ 时的极限也存在且等于 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$．

注：如果函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，当然此时 $A=f(a)$；如果 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，此时 $a=\varphi(x_0)$．

（2）复合函数的连续性．设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也是连续的．

注：复合函数的极限定理是解决许多复杂极限问题的有力工具．

3）初等函数的连续性

基本初等函数及初等函数在其定义域内都是连续的.

（十一）闭区间上连续函数的性质

1. 最大值和最小值定理

1）最大值和最小值定理

在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

注：最大值和最小值定理俗称最值定理，最值定理成立需要两个因素，一是函数的连续性，二是连续范围（或说所考虑的区间）必须是闭区间，二者缺一不可，缺少其中任一条件都可能导致最值定理的结论不成立，最值定理的成立是许多优化问题有解的前提.

2）有界性定理

闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

注："闭区间"与"函数连续"也是有界性定理成立的两大因素.

2. 介值定理

1）零点定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点，即至少存在一点$\zeta(a<\zeta<b)$使得$f(\zeta)=0$.

注：如果函数$f(x)$在开区间(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$存在且异号（包括$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)\in[-\infty,0)$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)\in(0,+\infty]$；$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)\in(0,+\infty]$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)\in[-\infty,0)$的情形），仍有零点定理成立.

2）介值定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值，$f(a)=A$，$f(b)=B$，则对于A与B之间的任意一个数c，在开区间(a,b)内至少有一点ζ，使得$f(\zeta)=c\quad(a<\zeta<b)$.

注：如同零点定理一样，介值定理也有如下变形形式，函数$f(x)$在开区间(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$存在且不同，则对于$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$之间的任意一个数$c$，在开区间$(a,b)$内至少有一点$\zeta$，使得$f(\zeta)=c(a<\zeta<b)$. 这里也包括$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$取$+\infty$或$-\infty$时的情形.

3. 一致连续性

（1）一致连续性定义.

设函数$f(x)$在区间$\mathbf{I}$上有定义，如果对于任意给定的正数ε，总存在着正数δ，使得对于区间$\mathbf{I}$上的任意两点x_1,x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$在区间$\mathbf{I}$上是一致连续的.

（2）一致连续性定理. 闭区间$[a,b]$上的连续函数一定是$[a,b]$上的一致连续函数.

二、典型例题解析

例 1. 设$[x]$表示不超过x的最大整数，求函数$f(x)=\arccos\frac{x}{[x]}$的定义域.

[分析]　粗略来看,函数是由 $y=\arccos u, u=\frac{x}{[x]}$复合而成,应同时考虑两个函数的定义域.

[解]　若使函数 $f(x)$ 有定义,应解如下方程组

$$\begin{cases}-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1\\ [x]\neq 0\end{cases}$$

由 $[x]$ 的定义,易知

$$x-1<[x]\leqslant x$$

(1) $0\leqslant x<1$ 时,$[x]=0$.

(2) $x\geqslant 1$ 时,$[x]\geqslant 1$,且$\frac{x}{[x]}\geqslant 1$,从而仅当 $x=k\in\mathbf{N}, k>0$ 时,才有$\frac{x}{[x]}=1$.

(3) $x<0$ 时,设 $x=k+\alpha$,其中,$k\in\mathbf{N}, k<-1, 0\leqslant\alpha<1$,则 $[x]=k, \frac{x}{[x]}=1+\frac{\alpha}{k}$,由 $-1<\frac{\alpha}{k}<0$,便知,$0<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$.

综上可知函数 $f(x)$ 的定义域为

$$\mathbf{D}=\{x\mid x<0, \text{或}\ x=k, k>0, k\in\mathbf{N}\}$$

例 2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

[分析]　由题设出发,可知 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$,从而 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$,解此方程便可得到函数 $\varphi(x)$ 的表达形式. 尔后求其定义域.

[解]　由题设可得

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$

又由于 $\varphi(x)\geqslant 0$,从而 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为如下方程组的解为

$$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$$

解之可得函数 $\varphi(x)$ 的定义域为

$$\mathbf{D}=\{x\mid x\leqslant 0\}=(-\infty,0].$$

例 3. 求函数 $f(x)$ 的表达式

(1) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2, |x|>1$;

(2) $af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$.

[分析]　(1) 观察所给等式两端. 发现 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,从而等式右端可"凑成"形式$\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}+\sin\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+2$,这样便可得到函数 $f(x)$ 的表达式.

还可用变量替换的方法,即,直接令 $u=x+\frac{1}{x}$,而求得用 u 表示 x 的表达形式,代换