函数論与
泛函分析初步

A. H. 柯莫果洛夫
C. B. 佛　　明
著

高等教育出版社

本書根据莫斯科大学出版部在 1954 年为紀念莫斯科大学成立 200 周年（1755—1955）出版的由柯莫果洛夫（А. Н. Колмогоров）与佛明（С. В. Фомин）合著的“函数論与泛函分析初步（Элементы теории функций и функционального анализа）”第一卷譯出，原書是按莫斯科大学編輯出版委員会的决議印行的。

本書可作我国綜合大学及师范学院数学，数学力学及数学物理等系的教学参考書。

本書由北京师范大学董延闓譯出，譯稿的前半部曾經同校的蔣碩民教授审閱。

函数論与泛函分析初步

卷一

А. Н. 柯莫果洛夫　С. В. 佛　明著

董延闓譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号13010•304　開本850×1168 1/32　印張5 5/16　字數129,000　印數0001—3,000

1957年7月第1版　1957年7月北京第1次印刷　定價(10)￥0.85

序 言

这本書是講課笔記的加工品。A. H. 柯莫果洛夫(A. H. Колмогоров)向莫斯科大学力学数学系的学生,C. B. 佛明(C.B.Фомин)向莫斯科大学物理系的数学理論物理專門化的学生(对后者講授內容略少)所講授的泛函分析課程,一方面包括着集論、測度論及勒貝格积分論的必要知識,另一方面包括着集論、实变函数論及泛函分析的一般方法在古典分析学具体問題上的应用示范(存在定理的証明,积分方程論——作为綫性空間中运算子方程論的特殊情形——的闡述,等等)。本書第一卷所含材料已在目录中列出。在以后各卷中可以找到測度、勒貝格积分及希尔伯特空間的理論,具有对称核的积分方程及正交函数組的理論,非綫性泛函分析的初步知識及泛函分析方法在計算数学上的一些应用。

在編写本書的不少节段时,作者們曾使用了 A. A. 彼得洛夫(A. A. Петров)对A. H. 柯莫果洛夫講課所作的笔記。

1954年2月　　　　　　　　A. 柯莫果洛夫, C. 佛明

譯 者 附 言

原書的价値是無待譯者絮言的。但原書的出版可能有些倉卒(它是为紀念莫斯科大学成立200周年而出版的)。譯者曾对原書中一些排印錯誤作了修訂,幷在某些个别場合,对其他不恰当处,在企圖保留作者原意的努力下,作了微小的改动。此外,譯者还添加了一些簡單的底注。凡由此而引起的錯誤概由譯者負責。

1956年10月

目录

第一章　集論初步

§1. 集的概念·在集上的运算

不論在数学里或是在日常生活当中，我們会經常遇到集这个概念。我們可以談論一个多面体的面的集，某一教室里学生的集，一条直綫上点的集，自然数的集等等。集的概念是这样地普遍，以致我們很难給它任何定义而同时要求这定义不得归結到用“集”这一字的同义語：“总体”，“元素的彙合”等等来代替“集”。

集的概念在現代数学里扮演着極其重要的角色，这不仅由于集論本身在目前已成为很广闊而且內容很充实的科学，主要由于从上一世紀末叶开始成長起来的集論已經影响，而且正在影响着整个的数学。这里，我們將只扼要地叙述一下集論中最初步的概念，这些概念將要在本書后面用到。讀者要想閱讀关于集論的詳尽得多的闡述，可参考，例如П.С.阿列克三德洛夫(П.С. Александров)的書“集与函数一般理論导引(Введение в общую теорию множеств и функций)”，那本書还指出了进一步的文献。

我們用大写字母 $A, B, \cdots\cdots$ 表示集，用小写字母 $a, b, \cdots\cdots$ 表示它們的元素。記法 $a\in A$ 或 $A\ni a$ 表示元素 a 屬于集 A；記法 $a\overline{\in} A$ 或 $A\overline{\ni} a$ 表示元素 a 不屬于集 A。如果組成集 A 的一切元素都含在集 B 里面(情况 $A=B$ 并不除外)，我們就說集 A 是集 B 的子集，并写做 $A\subseteq B$ [1]。例如，一切整数就在一切实数的集里構成一个子集。

---

[1] 記法 $A\subset B$ 表示 A 是集 B 的子集并且 $A\neq B$，就是說，在 B 里至少存在一个不屬于 A 的元素。这时就說 A 是 B 的眞子集。

有时，在談到某一集(例如，某一方程的根的集)时，我們幷不預先知道这个集是否确实含有元素。因此我們就合理地引入所謂空集的概念，这就是連一个元素也不包含的集。我們用 θ 表示空集。任何集包含 θ 做为它的子集。

設 A, B 是任意兩个集；如果集 C 是由至少屬于 A, B 兩集之一的一切元素所組成，我們就說 C 是 A, B 兩集的和集(сумма)或联集(соединение)(圖 1)，幷記做 $C=A\bigcup B$。

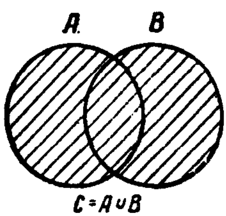

圖 1

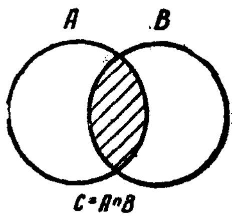

圖 2

类似地，可以定义任何(有穷或無穷)多个集的和集：設 A_α 是任意一組集；如果集 A 是由至少屬于一个 A_α 的一切元素所組成，我們就說 A 是这組集 A_α 的和集，幷記做 $A=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$。

如果集 C 是由既屬于集 A，又屬于集 B 的一切元素所組成，我們就說 C 是 A, B 兩集的交集(пересечение)(圖 2)，幷記做 $C==A\bigcap B$。例如，考虑一切偶数的集与一切能被三整除的数的集，二者的交集就是一切能被六整除的整数的总体。对于任何(有穷或無穷)多个集 A_α 来說，如果集 A 是由同时屬于每一个 A_α 的一切元素所組成，我們就說 A 是这些集 A_α 的交集，幷記做 $A=\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$。

下列关系式把相加与相交兩种运算联系起来：

$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C), \tag{1}$$

$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)。 \tag{2}$$

讓我們来証实，例如，这里的第一等式。設元素 x 屬于等式

(1)左边的集。这意味着 x 屬于 C 而且至少屬于 A,B 兩集之一，于是 x 至少屬于 $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 兩集之一，因而它屬于我們所考慮的等式右边的集。倒过来説，設 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$。于是 $x\in A\cap C$ 或者 $x\in B\cap C$。因之 $x\in C$，同时，x 还至少屬于 A,B 兩集之一，卽 $x\in(A\cup B)$。这样，$x\in(A\cup B)\cap C$。等式(1)得証。等式(2)可用类似的方法証实。

我們再定义集的减法。我們把集 A 里面不屬于集 B 的那些元素的总体 C 叫做集 A 与集 B 的差集 (разность)，并記做 $C=A\setminus B$ (圖 3)。这里，一般并不假定 $A\supset B$。

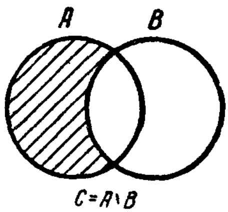

圖 3

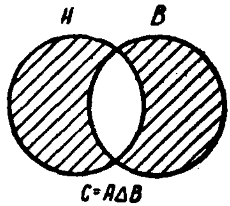

圖 4

在某些場合，例如在測度論里，需要考慮所謂 A,B 兩集的“对称差集 (симетрическая разность)”，这就是，差集 $A\setminus B$ 与 $B\setminus A$ 的和集(圖 4)。我們用記号 $A\triangle B$ 表示 A,B 兩集的对称差集。上述定义可用記号写成：

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)。$$

習題 証明

$$A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

今后我們有时需要在某一基本集 S 里，研究作为它的子集的各种不同的集，例如在数直綫上研究各种不同的点集。在这情况下，对于每一集 A 来說，把差集 $S\setminus A$ 叫做 A 的余集 (дополнение)。

在集論及其应用中，扮演着極其重要角色的有所謂对偶原理，它建立在以下兩个关系式上。

1. 和集的余集等于余集的交集：

$$S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{3}$$

2. 交集的余集等于余集的和集：

$$S\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{4}$$

根据这兩个关系式，凡遇到涉及某一固定集 S 的一組子集的定理时，我們就可用下述方法自然而然地得到它的对偶定理：把被考慮的集用它們的余集代替，把和集用交集代替，把交集用和集代替。第二章 §10 的定理 1′ 就是应用这一原理的例子。

我們証明关系式(3)。

設 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$。这就是說，$x$ 不屬于和集 $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$，即不屬于任何一个集 A_{α}。于是，x 屬于每一个余集 $S\setminus A_{\alpha}$，因之 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$。倒过来說，設 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$，这就是說，$x$ 屬于每一个集 $S\setminus A_{\alpha}$，于是 x 不屬于任何一个集 A_{α}，即不屬于它們的和集 $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$。所以 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$。等式(3)得証。等式(4)可用类似方法証明。

§2. 有窮集与無窮集·可数性

当我們研究各种不同的集时，我們注意到，对于某些集，即使在实际上不能指出，至少在原則上也能指出組成这些集的元素的个数。例如，在这房間里椅子的集，匣子里鉛笔的集，莫斯科市所有汽車的集，地面上一切水分子的集等等。这里每一个集包含着有窮多个元素，虽然我們可能并不曉得元素的个数到底多少。另一方面，还存在着由無窮多个元素所組成的集。例如，一切自然数的集，直綫上一切点的集，平面上一切圓的集，系数为有理数的一

切多項式的集等等。这里，当我們說这个或那个集是無穷集时，我們乃是根据这样的事实：从它里面可以取出一个元素，兩个元素，等等，并且在这样的每一步驟之后，在这集里总还剩有元素。

当我們考虑兩个有穷集时，二者元素的个数可能是相同的，或者是，兩集之一含有比另一集更多的元素，这就是說，我們可以按照有穷集所含元素的个数来比較它們。我們現在要問，是否可以类似地在無穷集之間进行比較？或者，我們要問，像下面的問題有沒有意义：平面上的圓多呢，还是直綫上的有理点多？定义在閉区間[0, 1]上的函数多呢，还是空間中的直綫多？諸如此类。

讓我們更仔細地看一下如何比較兩个有穷集。这可以用兩种方法进行。第一种方法：我們可以数一数一个集里边元素的个数，再数一数另一集里边元素的个数，这样，就比較了这兩个集。第二种方法：我們企圖在这兩个集之間建立这样的对应，使得对于一个集的每一元素，另一集有一个且仅有一个元素与它对应，并且倒过来也是一样，我們把这样的对应叫做一一对应。显然，当且仅当兩个有穷集的元素个数相同时，在它們之間可以建立一一对应。例如，为了檢查班上学生人数与教室里椅子的个数是否相同，我們可以不必去数二者的数目，只要叫每个学生坐在指定的椅子上就可以了。如果每个学生有了座位，而且也沒有一个座位空下来，这等于說，在这兩个集之間建立了一一对应，那末，这就意味着它們的元素个数是相同的。

不难看出，第一种方法(元素个数的計数)只能适用于有穷集的比較，同时，第二种方法(一一对应的建立)不論对于有穷集或無穷集都同样适用。

在所有可能的無穷集当中，自然数集是最簡單的一个。任何一个集，如果它的元素可以与一切自然数建立一一对应，就叫它做可数集(счетное множество)。換句話說，可数集是这样的集，我們

可以把它的一切元素編号，使成为無穷序列的形式: $a_1, a_2, \cdots\cdots,$ $a_n, \cdots\cdots$。下面是一些可数集的例子

1. 一切整数的集。我們可用如下方式建立一切整数与一切自然数之間的一一对应:

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{matrix}$$

一般来說，对于 $n \geqslant 0$, 設 $n \longleftrightarrow 2n+1$, 对于 $n<0$, 設 $n \longleftrightarrow -2n$。

2. 一切正偶数的集。显然可取对应: $n \longleftrightarrow 2n$.

3. 数 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$ 所成的集。对于数 2^n, 設数 n 与它对应; 这个对应显然是一对一的

4. 我們再研究一个較比复杂的例子——証明一切有理数的集是可数的。假定每一有理数已被写成既約分数的形式: $\alpha = \frac{p}{q}$, $q>0$。把和数 $n=|p|+q$ 叫做有理数 α 的高度(высота)。很明显，高度为 n 的分数的个数是有穷的。例如，高度为 1 的只有数 $\frac{0}{1}=0$, 高度为 2 的有 $\frac{1}{1}$ 及 $\frac{-1}{1}$ 两个数，高度为 3 的有 $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{-1}{2}$ 四个数，等等。我們把一切有理数按照遞增的高度編号，这就是說，由高度为 1 的数开始，然后是高度为 2 的数，以此类推[①]。这时，每一有理数得到了一个确定的号碼，因而在一切自然数与一切有理数之間建立了一一对应。

我們把不可数的無穷集叫做不可数集 (несчетное множество)。

---

① 在高度相同的数里，我們可以，例如把負数排在正数后面；对于高度相同而且符号相同的数，可以把分母較大的排在分母較小的后面。这样排成的序列的前几項如下所示:

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1},\ \frac{-1}{1};\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{-2}{1},\ \frac{-1}{2};\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{-3}{1},\ \frac{-1}{3};$$

$$\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{-4}{1},\ \cdots\cdots。$$

——譯者

現在証明可数集的一些一般性質。

1°. 可数集的任一子集是有穷的或可数的。

証　設 A 是一个可数集，B 是它的子集。把集 A 的元素編号：$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$。設 n_1, n_2, $\cdots$ 是編号中与 B 的元素相对应的自然数。如果这些数当中有最大的，B 就是有穷的，如果这些数当中沒有最大的，B 就是可数的。

2°. 任何有穷个或可数个可数集的和集仍是可数集。

証　設 A_1, A_2, $\cdots$ 都是可数集。所有它們的元素可以写成下列無穷表格的形式：

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

这里，在第一行安置着 A_1 的元素，在第二行安置着 A_2 的元素，以此类推。現在把所有这些元素"按对角綫"进行編号，这就是說，依照下列表格上箭头所指的次序——a_{11} 第一，a_{12} 第二，a_{21} 第三，等等——进行編号：

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

显然，这时每一集 A_i 的每一元素得到了确定的号碼，因而在一切集 $A_1, A_2, \cdots$ 的一切元素与一切自然数之間建立了一一对应。

我們的論断得証。

習題 1. 証明，系数为有理数的一切多項式的集是可数的。

2. 如果数 ξ 是系数为有理数的某一多項式的根，我們就說 ξ 是一个代数数。証明，一切代数数的集是可数的。

3. 証明，直綫上一切有理开区間(卽端点为有理点的开区間)的集是可数的。

4. 証明，平面上坐标为有理数的一切点的集是可数的。

(提示：利用定理 2°)。

3°. 任一無穷集包含着可数子集。

証 設 M 是一个無穷集。在它里面任取一个元素 a_1。既然 M 是無穷的，那末在它里面还可找到与 a_1 不同的元素 a_2，然后找到与 a_1 及 a_2 不同的元素 a_3，以此类推。繼續这一过程(这过程不能在有穷多步驟上中断，因为 M 是無穷集)，我們就得到集 M 的可数子集

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\}.$$

定理得証。

这定理表明，可数集可以說是無穷集当中"最小的"。至于不可数無穷集是否存在的問題，將要在 §4 再来研究。

§3. 集的等势性

可数集概念的引入是由于在这些或那些無穷集与自然数集之間建立一一对应。我們已經指出了一系列可数集的例子以及可数集的一些一般性質。

显然，一一对应的建立不仅可以用来比較無穷集与自然数集；用同样的办法可以比較任何兩个集。于是我們引入以下的

定义 如果在 M 与 N 兩个集的元素之間可以建立一一对应，就說它們相互等势(эквивалентные)(用 $M\sim N$ 表示)。

等势的概念可以应用到任何集上，不論这些集是有穷集或是無穷集。显然，当且仅当两个有穷集由一样多的元素所組成时，它們是等势的。前面引入的可数集定义現在可以表述成如下形式：如果一个集与自然数集等势，就說它是可数集。

例 1. 任何两个閉区間$[a, b]$,$[c, d]$上一切点的集相互等势。在圖5中，我們利用圖形給出了在这两个集之間建立一一对应的方法。这就是，設O是直綫ac与bd的交点，如果点p与点q位于由点O引出的同一射綫上，就把它們算做是彼此对应。

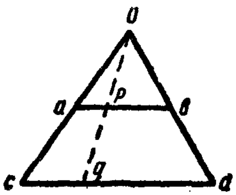

圖 5

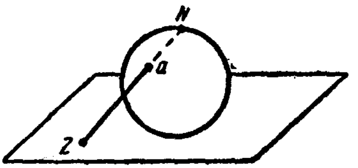

圖 6

2. 复平面上一切点的集与球面上一切点的集等势。例如，可以借助球極平面射影法来建立一一对应$a \longleftrightarrow z$(圖6)。

3. 在开区間$(0, 1)$內一切数的集与整个直綫上一切点的集等势。例如，可以借助函数

$$y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$$

来建立对应。

直接根据定义，显然可見，如果两个集分别与第三集等势，它們必相互等势。

考察一下这里的例子以及§2的例子，我們可以做出下面有趣的結論：在一系列的情形里，無穷集与它的真子集等势。例如，自然数原来与一切整数"一般多"，甚至与一切有理数"一般多"；在开区間$(0, 1)$上的点与整个直綫上的点"一般多"，諸如此类。不难証实，这种情况乃是一切無穷集的特征。

事实上，在§2（定理3°），我們曾証明，从任一無穷集M里总可选出一个可数子集；設它是

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

把A分裂成两个可数子集

$$A_1=\{a_1, a_3, a_5, \cdots\}, \quad A_2=\{a_2, a_4, a_6, \cdots\}.$$

由于A与A_1都可数，所以能够在它們之間建立一一对应。这一对应可被扩展成为集$A_1 \cup (M \setminus A)=M \setminus A_2$与集$A \cup (M \setminus A)=M$之間的一一对应，只要讓$M \setminus A$的每一元素与自己对应就可以了。集$M \setminus A_2$是集$M$的眞子集。这样，我們得到了以下的結果：

任一無穷集与它的某一眞子集等势。

这一性質可以当做無穷集的定义。

習題 証明，如M是任意的無穷集，而A是可数的，则

$$M \sim M \cup A.$$

§4. 实数集的不可数性

在§2我們曾引入一系列可数集的例子。这样例子的数目还可以大大地增加。此外，我們又曾証明，如果求有穷个或可数个可数集的和，我們將仍得到可数集。自然会發生这样的問題：到底有沒有不可数的無穷集？以下的定理給出肯定的答复。

定理 包含在零与一之間的实数所組成的集是不可数的。

証 把位于閉区間$[0, 1]$上的每一实数写成十进小数的形式。假定这些实数所組成的集可以排成一个序例：

$$\begin{array}{l} 0.\,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\ a_{1n}\cdots \\ 0.\,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\ a_{2n}\cdots \\ 0.\,a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \cdots\ a_{3n}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0.\,a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \cdots\ a_{nn}\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (1)$$

其中每一个 a_{ik} 是数碼 $0, 1, \cdots, 9$ 中的某一个。現在，制造一个小数

$$0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots, \tag{2}$$

它的各个数碼是如下选出的：取不同于 a_{11} 的任意数碼作为 b_1，不同于 a_{22} 的任意数碼作为 b_2，以此类推，一般来說，取不同于 a_{nn} 的任意数碼作为 b_n。这个十进小数不能与表格（1）里面的任何一个小数全同。事实上，按照这一小数的構造方法，它与表格(1)中第一小数至少有第一位数碼不同，与第二小数至少有第二位不同，以此类推，一般来說，由于对于一切的 n, $b_n \neq a_{nn}$，所以小数(2)不可能与表格(1)所包含的任何一个小数全同。这样，“可以利用某种方法把位于閉区間 $[0, 1]$ 上一切实数編号”这一假定把我們引向矛盾。

上面采用的証法还需要些許的补充說明。这就是，某些数可以用兩种方法写成十进小数：在一种写法里包含無穷多个零，在另一种写法里包含無穷多个九；例如

$$\frac{1}{2} = 0.5000\cdots = 0.4999\cdots$$

这样，兩个十进小数不全同还不等于說它們表示不同的数。

但是，如果这样来制造小数(2)，讓它既不含零，又不含九，例如規定，$a_{nn} = 1$ 时，$b_n = 2$；$a_{nn} \neq 1$ 时，$b_n = 1$，那末，上面的問題就不存在了。

于是，我們已經得到了不可数無穷集的例子，下面再指出与 0, 1 之間一切实数的集等势的一些集的例子。

1. 任何閉区間 $[a, b]$ 或开区間 (a, b) 上一切点的集。

2. 直綫上一切点的集。

3. 平面，空間，球面的一切点的集，位于球的內部一切点的集，等等。

4. 平面上一切直綫的集。

5. 單变量或多变量的一切連續函数的集。

对于例 1 及例 2，証明是不难的（参看 § 3 的例 1, 3）。对于其他例子，直接的証明却相当复杂。

習題 利用本节及 § 2 習題 2 的結果，証明超越数的存在。

§ 5. 势的概念

如果兩个有穷集相互等势，它們就是由个数相同的元素所組成的。如果 M, N 是任意兩个相互等势的集，我們就說 M 与 N 具有相同的势(одинаковая мощность)。这样，势就是一切相互等势的集所共有的①。对有穷集来說，势的概念簡直就与集的元素个数这一概念相重合。我們用記号 $\aleph_0$（讀做"阿列夫零"）来記自然数集的势（即任何可数集的势）。我們把与 0, 1 之間一切实数的集等势的那些集叫做具有連續統的势的集。这个势用記号 c 表示。

照例，在分析学里，一切有机会碰到的無穷集，或者可数，或者具有势 c。

如果集 A 与集 B 的某一部分（子集）等势，但不与整个的 B 等势，我們就說集 A 的势小于集 B 的势②。

---

① 在 § 3，我們根据中国科学院《数学名詞》(1956年版)把"эквивалентные"譯做"等势"。讀者可以把"等势"兩字整个地看成一个詞，它表示在兩集之間可以建立一一对应，并認为單音詞"势"所表示的概念只是在本节方始引入。——譯者

② 在邏輯上，除了已經指出的兩种可能[这就是，1) A 与 B 等势，2) A 与 B 的一部分等势，但不与整个的 B 等势]以外，还容許有以下兩种可能:

3) A 与 B 的某一部分等势，而 B 又与 A 的某一部分等势。

4) A 与 B 不等势，而其中任何一个又沒有任何部分，与另一集等势。

可以証明，在情形 3) 中，集 A 与集 B 等势[康托-貝恩史坦(Canton-Bernstein)定理]，而情形 4) 事实不可能[蔡美罗(Zermelo)定理]，但我們不准备在此証明这兩个頗为复杂的定理[参看，例如 П. С. 阿列克三德洛夫的"集与函数一般理論导引"，第一章，§ 6，及第三章，§ 6]。

在§2的末尾曾証明，可数集是"最小的"無穷集。在§4又曾証明，存在着無穷集，具有更高級的無穷性，这就是具有連續統的势的集。那末，有沒有比連續統的势更大的势？更一般地說，所謂"最高的"势是否存在？下面的定理可以回答这一問題。

定理 設M是一个势为m的集。更設$\mathfrak{M}$是这样的一个集，它的元素是集M的所有可能的子集。这样，$\mathfrak{M}$的势就大于原来集M的势。

証 容易看出，集$\mathfrak{M}$的势不能小于原来集M的势m；事实上，在集M的子集当中，考虑只由集M的一个元素所構成的；以所有这样的子集为元素，形成了集$\mathfrak{M}$的一个子集，它与集M等势。剩下需要証明，$\mathfrak{M}$与M的势不能相同。假定相反的情形成立；这时，$\mathfrak{M}$与M等势，在它們之間可以建立一一对应。設

$$a \longleftrightarrow A$$
$$b \longleftrightarrow B$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

是集M的元素与集M的一切子集（即集$\mathfrak{M}$的元素）之間的一一对应。現在，在集M里考虑这样的元素，它們不屬于自己所对应的子集；把这样元素的总体用X表示（例如，如$a\in A$，則$a\overline{\in}X$，如$b\overline{\in}B$，則$b\in X$，等等）。X是M的一个子集，因而是$\mathfrak{M}$的一个元素。按照假設，X必須对应着某一元素$x\in M$。我們看一下，元素x到底屬不屬于子集X？假定$x\overline{\in}X$。但按定义，X是由不屬于自己所对应的子集的一切元素所組成的，因此，元素x必須屬于X。反之，假定$x\in X$，我們又得到，x不能屬于X，因为，X只包含不屬于自己所对应的子集的那些元素。于是，与子集X对应的元素必須同时又屬于X又不屬于X。由此可見，这样的元素根本不存在，这就是說，在集M的元素与其一切子集之間的一一对应是建立不