总主编/蔡上鹤

特别合作 sina新浪网 中学生学习报

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

三角函数

高中版

体验征服学习考试精彩感觉！

丛书主编/严文科

请认准此防伪标识

补上你知识木桶上最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置

所名校联盟·缔造世纪精品工程

获梦幻惊喜

Magic

著名节目主持人
魔法机辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

主编/蔡上鹤

Magic

魔力！高效！经典！权威！

MAGIC MATH
魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

三角函数

高中版

丛书主编/ 严文科
本册主编/ 李 慧 杜敦杰
编 委/ 关清波 朱 林 邵承青
孙炳木 周正实 于文君
于春明 张 筠 孙江昆

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学专题突破. 高中：三角函数/李慧，杜敦杰主编. —北京：长征出版社，2004

ISBN 7-80015-814-4

Ⅰ. 魔… Ⅱ. ①李… ②杜… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 044317 号

魔法数学专题突破高中版

主创设计 / 魔法教育发展研究中心
电　　话 / 010—80602977
网　　址 / http：//www.magic 365.com.cn

出　　版 / 长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010—80602977）
经　　销 / 全国新华书店
印　　刷 / 保定市印刷厂
开　　本 / 880×1230　　1/32
字　　数 / 4160 千字
印　　张 / 130 印张
版　　次 / 2004 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 7-80015-814-4/G・313
全套定价 / 192.00 元

Magic

魔法系列丛书

Magic

致读者

在新的世纪，国内基础教育正发生着日新月异的变化，广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏：中学教辅需要精品，需要品牌，需要从更远、更新的角度重新打造！在这一大背景下，魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可，应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到：中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了！

数以万计的中学教师和学生问我们：你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书？

肩负着社会的责任，带着广大中学师生的期盼，我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构，邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻！”是魔法系列图书最基本的理念，我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书，已经走在中学教辅图书的最前沿，成为一个全新的中学教辅品牌！一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌！

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台，为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力，让魔法系列图书解放中学生的学习，解放中学生的考试，让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者！

我们与读者的心是相通的，同广大一线教师的心是相通的。现在，我们付出的每一份努力，都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀，我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好，这是我们的目标，也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手，最贴心的朋友！让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆，一起成长！

魔法教育发展研究中心

2004.6

前 言

Preface

根据教育专家多年的研究发现，几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科，每一学科中都有薄弱的专题，而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢，未为迟也。”为了帮助更多中学生在高考中走向成功，我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员，在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，精心编写了本系列图书。

本丛书在编写过程中秉承“科学划分、高效实用”的编写理念，尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试大纲，结合近几年数学命题实践及课堂教学实际，将高中数学专题科学地设置为：《集合与简易逻辑》《函数》《数列》《三角函数》《平面向量》《不等式》《直线与圆的方程》《圆锥曲线方程》《空间直线与平面》《空间向量与简单几何体》《排列、组合、二项式定理》《概率统计（理）》《概率统计、导数（文）》《极限、导数、复数（理）》《高中数学思想方法》十五个分册。

本书具备如下特点：

细分专题，针对性强：适合高中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中复习，不受年级、教材限制。

内容详尽，重点突出：以大纲为面，考纲为线，所有该专题的内容全面详尽，重点难点内容突出。

表述灵活，直观高效：本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述，使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐，材料新颖：本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料，结合最新的高考信息和命题趋势，从最新的角度组织学习和复习，具有很强的实用性和超前性。

Magic

前　言

Preface

丛书栏目功能定位如下：

【教考动态】紧扣教学大纲和考试大纲，总结分析中学教学教材改革的新趋势、新动向，突出最新考试信息和对未来高考命题走向的预测，有很强的指向性。

【知识精讲】对所涉及科目的知识点，高度集中地作全面、详尽地分析，以利学生在有限的时间里，集中补差、补弱，系统有效地提高自己的知识能力，补上自己知识木桶上最短的那一块。

【经典例题】针对【知识精讲】中的内容，重点精选一线教师多年积累的最典型例题进行分析，与知识精讲栏目形成互动，总结规律，点拨技巧，使学生融会贯通，举一反三，触类旁通。

【思维跨越】对重点、难点和热点延伸，使学生既从点上把握，又能够纵横扩展，最终对所学知识能够达到点面结合，灵活运用。

【范例剖析】针对【思维跨越】中的内容，对综合性强的拓展题作解析，结合最新的《考试大纲》，评价每道题的命题角度和能力层级要求，分析解题过程，点拨解题技巧。

【高考连线】收集了与本节内容相关的近几年的高考题并进行简要解析，使学生了解高考，感受高考，为决胜高考做准备。

【专题训练】专题训练由三个层次组成，第一层次的基础训练，重在基础；第二层次的拓展训练，重在提高；第三层次的综合训练，重在运用。通过这三个层次的练习从而使知识的训练由浅入深，阶梯形提高，最终达到把握基础知识，培养和提高学生的综合素质和应考能力。

尽管我们在编写过程中，本着对学生高度负责的态度，处处把关，但如果还有疏漏，诚请读者指正。

编　者

2004 年 6 月于北京

魔法数学 MAGIC MATH

Magic

目　录

Contents

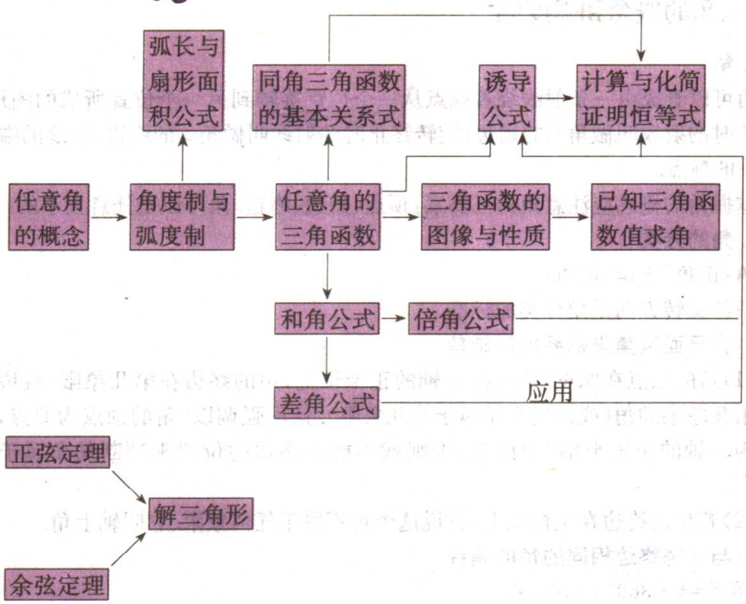
Magic

目　　录

Contents

三角函数

知识网络构建



第一讲 任意角的三角函数

教考动态

1. 教考要求

(1)理解任意角的概念、弧度的意义，能正确进行弧度与角度的换算. 考纲要求较低.

(2)掌握任意角的三角函数的定义、三角函数的符号，会利用单位圆中的三角函数线表示正弦、余弦和正切. 考纲要求较低.

2. 命题动向

这部分内容属于三角函数的基础知识，一般不会单独出题，有可能考查的是任意角的三角函数(包括三角函数的定义、三角函数的符号、直角三角形中锐角的三角函数).

知识精讲

一、角的概念和弧度制

1. 角

角可以看成由一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 旋转开始时的射线叫做角 α 的始边；旋转终止时的射线叫做角 α 的终边；射线的端点叫做角 α 的顶点.

掌握角的概念应注意角的三要素：顶点、始边、终边. 角可以是任意大小的.

2. 角的分类

角：正角、零角、负角.

角的旋转方向是角分类的标准.

3. 在平面直角坐标系内讨论角

(1)角的顶点在原点，始边在 x 轴的正半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角(或说这个角属于第几象限). 这里强调以“角的顶点为原点，角的始边为 x 轴的非负半轴”为前提，否则就不能从终边的位置来判断某角属于第几象限.

(2)若角的终边在坐标轴上，就说这个角不属于任何象限. 它叫轴上角.

4. 与 α 角终边相同的角的集合

$\{\beta|\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha, k\in \mathbf{Z}\}$

这里应明确：(1)k 是整数；(2)α 是任意角；(3)$k\cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”号. 如 $k\cdot 360^\circ-30^\circ$ 应看成 $k\cdot 360^\circ$ 与 $+(-30^\circ)$　$(k\in \mathbf{Z})$；(4)终边相同的角不一定相等，但相等的角，终边一定相同；(5)终边相同的角有无数多个，它们相差 360° 的整数倍.

5. 弧度制

(1)规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零. 任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$，其中 l 为以角 α 作为圆心角时所对圆弧的长，r 为圆的半径.

(2)这种用“弧度”做单位来度量角的制度叫做弧度制.

(3)比值$\frac{l}{r}$与所取的圆的半径大小无关，而仅与角的大小有关.

6. 弧度与角度的换算

(1)$360°=2\pi$；

$180°=\pi$；

$1°=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745$；

1 弧度$=\left(\frac{\pi}{180}\right)°\approx 57.30°=57°18'$

(2)以弧度为单位表示角的大小时，"弧度"两字可以省略不写，但以度(°)为单位表示角时，度(°)就不能省去.

用弧度为单位表示角时，常常把弧度数写成多少π的形式，如：$45°=\frac{\pi}{4}$

7. 弧长公式、扇形面积公式

$l=|\alpha|\cdot r$

$S_{扇形}=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

二、任意角的三角函数

1. 任意角的三角函数定义

设α是一个任意大小的角. 角α的终边上任意一点P的坐标是(x,y)，它与原点的距离是$r(r>0)$，那么角α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是：

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$；

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别可看成是从一个角的集合到一个比值的集合的映射，它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，这六个函数统称为三角函数.

2. 三角函数的定义域

三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$	$y=\sec x$	$y=\csc x$
定义域	**R**	**R**	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

注：确定三角函数的定义域时，主要应抓住分母为零时比值无意义这一关键. 当且仅当角的终边在坐标轴上时，点P的坐标中必有一个为 0.

3. 三角函数值的符号

各三角函数值在每个象限的符号如图 1—1(各象限注明的函数为正,其余为负).

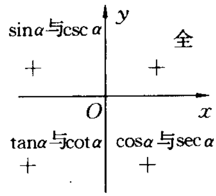


图 1—1

4. 三角函数线

设角 α 的终边与以原点为圆心的单位圆交于点 P(图 1—2),则有向线段 MP、OM、AT 的数量分别等于角 α 的正弦、余弦、正切的值,分别称为角 α 的正弦线、余弦线、正切线.

当角 α 的终边在 x 轴上时,正弦线、正切线分别变成一个点;当角 α 的终边在 y 轴上时,余弦线变成一点,正切线不存在.

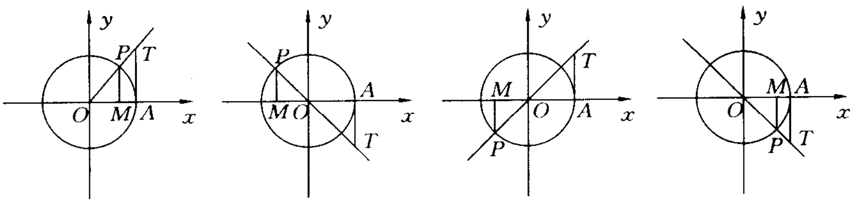


图 1—2

例 1　集合 $M=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 则　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

解法一:集合 M 表示的是终边落在四个象限的角平分线上的角的集合,而集合 N 表示的是终边落在坐标轴上或四个象限的角平分线上的角的集合,故选 C.

解法二:对集合 N,当 k 为奇数时,即 $k=2n+1$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$x=\frac{(n+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,$n\in\mathbf{Z}$,这说明集合 M 为集合 N 的子集;而 k 为偶数时,$x\notin M$,故选 C.

记住以下表达式对解题有利(n、$k\in\mathbf{Z}$):终边在 x 轴上的角:$\alpha=k\pi$;终边在 y 轴上的角:$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$;终边在坐标轴上的角:$\alpha=\frac{n\pi}{2}$;终边在各象限的角平分线上的角:$\alpha=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$.

例 2 若 α 是第一象限角，那么 $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$ 中必定能取正值的有哪些？

解：$\because 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\therefore k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi, 4k\pi < 2\alpha < \pi + 4k\pi (k \in \mathbf{Z})$

$\therefore \sin 2\alpha$ 必定取正值，其他的均不一定.

你知道原因吗？

例 3 已知角 α 的终边上有一点 $P(-a, \sqrt{3}a)(a>0)$，求 α 的各三角函数值.

解：$\because x = -a, y = \sqrt{3}a$

$\therefore r = \sqrt{(-a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = 2a(a>0)$

$\therefore \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$；

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}, \cot\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$；

$\sec\alpha = \frac{r}{x} = -2,\ \csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

如果将 $a>0$ 改为 $a<0$，哪些三角函数的值会变化？

1. 要正确理解“0°～90°间的角”、“第一象限的角”、“锐角”和“小于 90°的角”，这里应明确“0°～90°间的角”指的是一个前闭后开的区间 $0° \leqslant \theta < 90°$，后面三种角的集合可分别表示为

$\{\theta | k \cdot 360° < \theta < k \cdot 360° + 90°, k \in \mathbf{Z}\}, \{\theta | 0° < \theta < 90°\}, \{\theta | \theta < 90°\}$

2. 在掌握角的概念的同时，还要注意几个问题：

(1)终边相同的角与相等的角的区别：终边相同的角不一定相等，相等的角终边一定相同.

(2)象限角、轴上角与区间角的区别：

例如：区间 $[2k\pi, 2k\pi + \pi](k \in \mathbf{Z})$ 实质上包括第一、二象限和 y 轴的正半轴及 x 轴.

(3)熟悉角的终边落在“射线上”、“直线上”、“两条互相垂直的直线上”等角的一

般表达式.

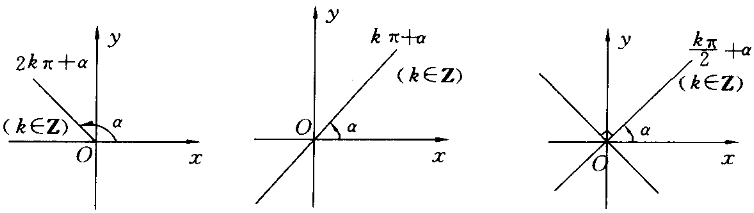
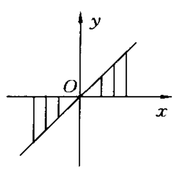
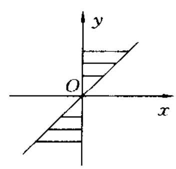
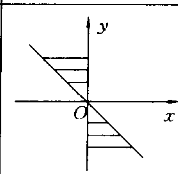
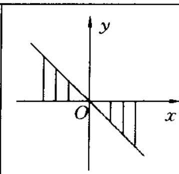


图 1—3

(4)已知角 α 所在象限，应熟练地确定$\frac{\alpha}{2}$所在象限：

α	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\frac{\alpha}{2}$	第一或三象限		第二或四象限	
区域				

3. 根据定义，可以得出角度与弧度的互化关系：角度化为弧度，只需将角 α 乘以$\frac{\pi}{180^\circ}$；弧度化为角度，则只需将 α 乘以$\frac{180^\circ}{\pi}$.

注意角度与弧度的换算，掌握弧长和扇形面积的计算公式，重视利用三角函数曲线解决问题.

4. 根据三角函数的定义可知：(1)一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关，即角 α 与 $\beta=2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的同名三角函数值相等；(2) $|x|\leqslant r$，$|y|\leqslant r$，故有 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，$|\cos\alpha|\leqslant 1$，这是三角函数中最基本的一组不等关系.

5. 在计算或化简三角函数关系式时，常需要对角的范围以及相应的三角函数值的正负情况进行讨论. 因此，在解答这类问题时要三思而行：(1)角的范围是什么？(2)对应的三角函数值是正还是负？(3)与此相关的定义、性质或公式有哪些？

例 1　(1)如果 α 为第一象限的角，试问$\frac{\alpha}{2}$为第几象限角？

(2)设 α 为第二象限的角，试问：$-\alpha$、$\pi-\alpha$、$\pi+\alpha$ 分别是第几象限的角？

分析：(1)α是第一象限角，由于$k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，不易直接看出$\frac{\alpha}{2}$的范围，此时应讨论$k$：

当$k=2n(n\in\mathbf{Z})$时，$2n\pi<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$\frac{\alpha}{2}$在第一象限.

当$k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$(2n+1)\pi<\frac{\alpha}{2}<(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$，$\frac{\alpha}{2}$在第三象限.

(2)$-\alpha$、$\pi-\alpha$、$\pi+\alpha$的象限数可以根据α的象限数直接判断，也可以利用角$-\alpha$、$\pi-\alpha$、$\pi+\alpha$的终边与角α的终边的位置关系来判断.

这种题都要讨论k的奇偶性.

解：(1)$\because\alpha$为第一象限角

$\therefore 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

你知道$2k\pi$与$k\pi$的含义吗？

$\therefore$当k为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$在第一象限；当k为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$在第三象限. 因此，$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

α为一个象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$一般应在两个象限.

(2)解法一：$\because\alpha$为第二象限的角

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

则$-2k\pi-\pi<-\alpha<-2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\because k$是整数，$\therefore-\alpha$为第三象限的角.

$-2k\pi<\pi-\alpha<-2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\pi-\alpha$为第一象限的角.

$2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\pi+\alpha<2k\pi+2\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \pi+\alpha$ 为第四象限的角

解法二：因为角 $-\alpha$ 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称，所以由 α 为第二象限角可知 $-\alpha$ 为第三象限的角（如图 1—4(1)）.

看明白 $-\alpha$、$\pi-\alpha$、$\pi+\alpha$ 的终边与 α 的终边的对称关系吗？

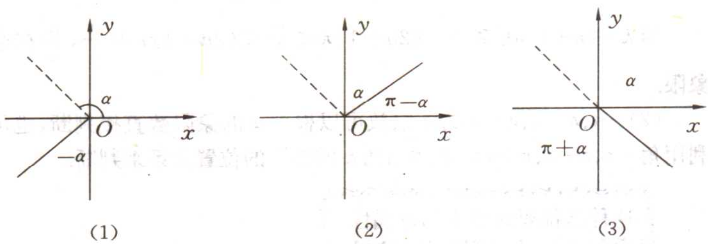


图 1—4

$\because \pi-\alpha$ 的终边与 α 的终边关于 y 轴对称，由 α 在第二象限知，$\pi-\alpha$ 为第一象限的角（如图 1—4(2)）.

$\because \pi+\alpha$ 的终边是 α 的终边的反向延长线，由 α 为第二象限的角知，$\pi+\alpha$ 为第四象限的角（如图 1—4(3)）.

探究提升

角的概念的推广和弧度制，是三角函数的预备知识，并带来一些观念上的转变，如"第一象限的角都是锐角"、"小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角都是锐角"、"始边相同终边也相同的角相等"等命题都不全是正确的，应引起注意.

变式题：若 α 是第二象限的角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，问 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

分析：本题依据 α 的范围，会得出 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围有两部分，再根据 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$ 来求 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围.

例 2　设角 $\alpha_1=-570^\circ$，$\alpha_2=750^\circ$，$\beta_1=\frac{3}{5}\pi$，$\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$.

(1)将 α_1、α_2 用弧度制表示出来，并指出它们各自所在的象限；

(2)将 β_1、β_2 用角度制表示出来，并在 $-720^\circ\sim0^\circ$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.