名师一号

No.1 famous teachers

名师的视野
总比常人看得高远
一号的脚步
总比他人遥遥领先

2006高中新课标十省区教材

配人民教育A版

丛书策划 梁大鹏
丛书主编 王俊杰

刮涂层 输密码 辨真伪
河北考源书业有限公司

高中数学（必修1）

本地版专用

光明日报出版社

NO.1

名师的视野
总比常人看得高远
一号的脚步
总比他人遥遥领先

名师一号

famous teachers NO.1

2006 高中新课标十省区教材

丛书策划：梁大鹏
丛书主编：王俊杰
本册主编：王应祥　刘锦贤　李志伟
　　　　　邵　滨
编　　委：孙广云　陶　冶　陈　新
　　　　　杨志文　郭惠生　李新改
　　　　　吕　新

高中数学（必修1）

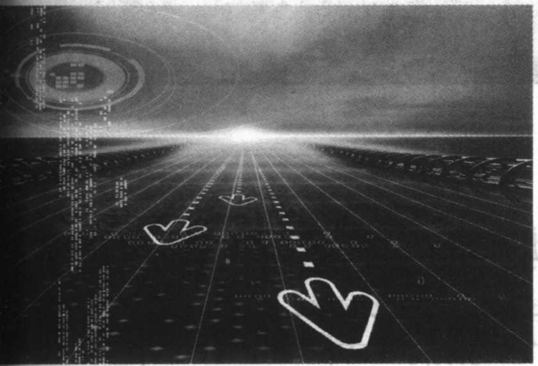
光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

名师一号.高中新课标.数学/王俊杰主编.—北京:光明日报出版社,2006
(名师一号)
ISBN 7-80206-173-3
Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料Ⅳ.G633
中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第141709号

书　　名:名师一号　高中新课标　数学
著　　者:梁大鹏　王俊杰
责任编辑:曹　杨
封面设计:考源文化　　版式设计:梁大鹏
责任校对:田建林　　责任印刷:李新宅
出版发行:光明日报出版社
地　　址:北京市崇文区珠市口东大街5号,100062
电　　话:010-67078945　67078235
网　　址:http://book.gmw.cn
Email:gmcb@gmw.cn
法律顾问:北京盈科律师事务所郝惠珍律师
总 经 销:新华书店总店
经　　销:各地新华书店
印　　刷:保定虹光印刷有限公司
版　　次:2006年8月第1版
印　　次:2006年8月第1次印刷
开　　本:880×1230　1/16
印　　张:254
印　　数:1-10000
书　　号:ISBN 7-80206-173-3
全套定价:458.00元

高中新课标



理念新—洗刷教辅新时代

思路新—开创课标新纪元

结构新—确立编写新框架

取材新—启动原创新界面

课案新—揭开教改新篇章

教法新—实现课堂新目标

名师的视野 总比常人看的高远
一号的脚步 总比他人遥遥领先

Famous teachers NO.1

新课标 实验省区标准范本

新课改 师生互动诱思探究

新课程 情景导入合作讨论

新课案 教室内外知能贯通

FAMOUS TEACHERS NO.1

书目

名师一号系列丛书

2006 年秋季用书(课标版)

《名师一号》高中新课标 必修 1

科目	教材版本	必 修	规 格	出版时间	出版社
语文	人民教育版	1	大16开精装	2006.8	光明日报出版社
	山东人民版	1		2006.8	
	江苏教育版	1		2006.8	
	广东教育版	1		2006.8	
数学	人民教育 A 版	1		2006.8	
	人民教育 B 版	1		2006.8	
	北 师 大 版	1		2006.8	
	江苏教育版	1		2006.8	
英语	人民教育版	1		2006.8	
	外语教研版	1		2006.8	
	译林牛津版	1		2006.8	
物理	人民教育版	1		2006.8	
	山东科技版	1		2006.8	
	上海科技版	1		2006.8	
	广东教育版	1		2006.8	
化学	人民教育版	1		2006.8	
	山东科技版	1		2006.8	
	江苏教育版	1		2006.8	
生物	人民教育版	1		2006.8	
	中国地图版	1		2006.8	
	江苏教育版	1		2006.8	
历史	人民教育版	1		2006.8	
	岳麓书社版	1		2006.8	
	人民出版社版	1		2006.8	
地理	人民教育版	1		2006.8	
	山东教育版	1		2006.8	
	中国地图版	1		2006.8	
	湘 教 版	1		2006.8	
政治	人民教育版	1		2006.8	

《名师一号》高中新课标 必修 2

科目	教材版本	必 修	规 格	出版时间	出版社
语文	人民教育版	2	大16开精装	2006.10	光明日报出版社
	山东人民版	2		2006.10	
	江苏教育版	2		2006.10	
	广东教育版	2		2006.10	
数学	人民教育 A 版	2		2006.10	
	人民教育 B 版	2		2006.10	
	北 师 大 版	2		2006.10	
	江苏教育版	2		2006.10	
英语	人民教育版	2		2006.10	
	外语教研版	2		2006.10	
	译林牛津版	2		2006.10	
物理	人民教育版	2		2006.10	
	山东科技版	2		2006.10	
	上海科技版	2		2006.10	
	广东教育版	2		2006.10	
化学	人民教育版	2		2006.10	
	山东科技版	2		2006.10	
	江苏教育版	2		2006.10	
生物	人民教育版	2		2006.10	
	中国地图版	2		2006.10	
	江苏教育版	2		2006.10	
历史	人民教育版	2		2006.10	
	岳麓书社版	2		2006.10	
	人民出版社版	2		2006.10	
地理	人民教育版	2		2006.10	
	山东教育版	2		2006.10	
	中国地图版	2		2006.10	
	湘 教 版	2		2006.10	
政治	人民教育版	2		2006.10	

适用区域:山东、广东、海南、宁夏、江苏、安徽、浙江、福建、辽宁、天津。

新课标 新理念
新设计 新教案

2004 年，广东、山东、海南和宁夏四省区率先使用新课标。

2005 年，江苏省全面启动高中新课标实验。

2006 年，福建、浙江、安徽、辽宁和天津四省一市投入新课标改革。

2007 年，权威消息报道：全国统一新课标。

届时，新课程改革将覆盖中国半壁江山。

随着新课标在全国范围内的普遍推广，以打造教辅旗舰，造就千万学子为己任的河北考源书业，深深感到：与时俱进，跟踪新课标，责无旁贷，义不容辞。为此，考源书业邀请具有丰富经验的一大批特、高级教师，吸收各实验省区近千名一线名师的教案、课件和讲义中的精华部分，融汇发表在各大权威教学期刊上的最新课改成果，秉承“把教材读厚，把教辅编薄”的设计理念，重磅推出《名师一号》高中新课标系列丛书。

“芳林新叶催陈叶，流水前波让后波”。《名师一号·高中新课标》系列丛书，以思维为焦点，以方法为主线，以课堂为核心，以能力为宗旨，深入探究新课改教学规律，在题材选取上，更多考虑到未来高考的需要，更深更广地与新课标命题接轨，因此，本套丛书名副其实地代表着新一轮新课标教辅的颠峰和方向。

名师专家，以最独特的视角，最鲜活的素材，最科学的理念，最巧妙的设计和最灵活的思维启迪，把《名师一号·高中新课标》系列丛书演绎得尽善尽美，把新课标的精神表现得淋漓尽致，本套丛书的前卫和实用的特色，将使其成为新课标理念实践化的卓越的教辅典范。

《名师一号·高中新课标》系列丛书，是一套展现课改实验省区优秀教案的研究性教材，值得向各省区走向新课标的广大师生特别推荐。

河北考源书业有限公司
2006 年 8 月于北京

目录

第1章 集合与函数概念

§1.1.1 集合的含义与表示

No·1 第一课时 沧海横流，方显英雄本色。

课标三维要点

1. **知识与技能**

通过本节课的学习，领会集合的概念，理解其含义及集合的三要素.

2. **过程与方法**

通过本节课的含义，能正确使用集合及其元素的记号，熟练掌握常见集合的记号，会使用符号$\in$、$\notin$来表示元素与集合的关系.

3. **情感、态度与价值观**

通过本节课的学习，感受集合的语言特征，培养学生的缜密思维及逻辑思维能力.

知识要点扫描

1. 一般地，我们把研究对象统称为________，把______________________________叫集合.

2. 集合具有三个性质______、______、______.

3. 常用数集的记法：**N**表示________、$\mathbf{N}^*$表示________、**Z**表示________、**Q**表示有理数集、________表示实数集.

疑难诠译

(1)元素与集合的关系用"$\in$"或"$\notin$"表示，如：$a\in\{a\}$.

(2)常见的数集符号：自然数集：**N**；正整数集：$\mathbf{N}^*$；整数集：**Z**；有理数集：**Q**；实数集：**R**.

(3)集合的概念：某些指定的对象集在一起就成一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合中元素的性质(或称三要素)：①确定性：$x\in A$与$x\notin A$，二者必居其一；②互异性：$x_1\in A$，$x_2\in A$，则$x_1\neq x_2$③无序性：$\{a,b\}=\{b,a\}$.

典例剖析

例1：给出下面五个关系：$\sqrt{3}\in\mathbf{R}$，$0.7\notin\mathbf{Q}$，$0\in\{0\}$，$0\in\mathbf{N}$，$3\in\{(2,3)\}$，其中正确的个数是 ( )

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 1

解析：0.7为有理数，故$0.7\notin\mathbf{Q}$不正确；因集合$\{(2,3)\}$中的元素是一个点$(2,3)$，而不是两个元素2和3，故$3\in\{(2,3)\}$不正确. 故正确的有3个，选C.

答案：C

点评：研究元素与集合的关系，应首先明确集合是怎样的元素组成，然后再判断所给对象是否为集合中的元素.

例2：已知$x^2\in\{1,0,x\}$，求实数x的值.

解析：由确定性可知$x^2=0,1$或x，由互异性可知$x\neq0,1$.

解：若$x^2=0$，则$x=0$，此时集合为$\{1,0,0\}$，不符合集合中元素的互异性，舍去.

若$x^2=1$时，则$x=\pm1$.

当$x=1$时，集合为$\{1,0,1\}$，舍去；当$x=-1$时，集合为$\{1,0,-1\}$，符合.

集合概念和是非关系(一)

集合为数学概念之源，逻辑为数学思维之端，集合与逻辑，神形相依，互为表里.

研究数集间的映射便有了函数，函数的定义域、值域和有关参数的取值范围以及由此产生的方程、不等式的解集，就是对实数进行子集划分.

若 $x^2=x$，则 $x=0$，或 $x=1$，不符合互异性，都舍去.

点评：由于集合中元素的互异性，因而对于求集合中参数的值的问题，必须具有检验的意识.

变式引申：若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，求实数 a.

例 3：数集 A 满足：若 $a\in A$，$a\neq1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

证明：(1)若 $2\in A$，则在 A 中还有另外两个数，求出这两个数；

(2)集合 A 不可能是单元素实数集.

解析：根据题干给出的信息，若 $a\in A$，$a\neq1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$ 来突破.

证明：(1)$\because 2\in A$，$2\neq1$，$\therefore \frac{1}{1-2}=-1\in A$.

$\because -1\in A$，$-1\neq1$，$\therefore \frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$.

$\because \frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\neq1$，$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.

$\therefore -1$，$\frac{1}{2}\in A$，即集合 A 中另外两个数为 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)若 A 是单元素的实数集，则 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，又方程 $a^2-a+1=0$ 无解，

$\therefore a\neq\frac{1}{1-a}$. $\therefore$ 集合 A 不可能是单元素的集合.

点评：信息类题，只需依据题中给出的信息，耐心去做便能成功.

变式引申：数集 M 满足条件：若 $a\in M$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in M(a\neq\pm1$，且 $a\neq0)$，已知 $3\in M$，试把由此确定的 M 的元素求出来.

例 4：若集合 $M=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 只有一个元素，求实数 a 的值.

解析：该题将集合中元素的个数转化为方程的解的个数问题.

解：当 $a=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$，则 $M=\{-\frac{1}{2}\}$，M 中只有一个元素.

当 $a\neq0$ 时，$ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实数根，则 $\Delta=0$，即 $2^2-4a=0$，$\therefore a=1$.

因此 $a=0$，或 $a=1$.

点评：对二次项系数 a 的讨论是本题的关键.注意分 $a=0$，$a\neq0$ 两种情况.

自我评价

1. 下列各组对象不能形成集合的是 ( )
   A. 所有直角三角形
   B. 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点
   C. 高一年级开设的所有课程
   D. 充分接近 $\sqrt{2}$ 的所有实数

2. 方程组 $\begin{cases}2x+y+6=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是 ( )
   A. $\{(-3,0)\}$　　B. $\{-3,0\}$
   C. $(-3,0)$　　D. $\{(0,-3)\}$

3. 若以集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的三个元素为边长可构成一个三角形，那么这个三角形一定不是 ( )
   A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形
   C. 直角三角形　　D. 等腰三角形

4. 集合{方程 $(x-2)^2=0$ 的解}为 ( )
   A. $\{0\}$　　B. $\{2,2\}$
   C. $\{2\}$　　D. $\{4\}$

5. 设 a、b、c 为非零实数. 则 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为 ( )
   A. $\{4\}$　　B. $\{-4\}$
   C. $\{0\}$　　D. $\{0,-4,4\}$

6. 已知 $3\in A$，且 $A=\{1,a^2+a+1\}$ 则 $a^3=$________

7. 数集 $\{x,x^2-x\}$ 中 x 的取值范围________.

8. 设 $-5\in\{x|x^2-ax-5=0\}$，则集合 $\{x|x^2-4x-a=0\}$ 中所有元素之和为________.

9. 说出下面集合中的元素.
   (1)小于 12 的质数构成的集合
   (2)倒数等于其本身的数组成的集合
   (3)由 6 的所有约数组成的集合
   (4)方程 $2x^2-3x-2=0$ 的解组成的集合.

集合概念和是非关系（二）

空间图形研究点集间的关系；排列、组合、概率、统计等抽象概念，只要用集合来解释，就变得非常形象和亲近.

方程 $3x-6=0$ 的解还是一个方程 $x=2$；不等式 $3x-6>0$ 的解还是一个不等式 $x>2$. 所谓解题，就是化繁为简，化生为熟，关键在于是否"等价". 只有逻辑(条件的充要性)能为数学的等价变换保驾护航.

10. 设 $y=x^2+mx+n(m、n\in\mathbf{R})$，当 $y=0$ 时，对应 x 值的集合为 $\{-2,-1\}$.
(1)求 m、n 的值；
(2)当 x 为何值时，y 取最小值，并求此最小值.

No·1 第二课时　沧海横流，方显英雄本色。

课标三维要点

1. **知识与技能**

通过本节课的学习，我们能掌握集合的两种表示方法：列举法与描述法，并能领会这两种表示方法的简单应用.

2. **过程与方法**

通过本节课的学习，体会两种表示方法的优劣，能够根据具体需求在两种方法中选择最佳.

3. **情感、态度与价值观**

通过本节课的学习，在方法选择上体会辨证法思想，可以增强我们的理性思维能力及思考探究能力.

知识要点扫描

1. 含有有限个元素的集合叫做________；含有无限个元素的集合叫做________.

2. 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法叫________.

3. 把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫________.

4. 对给定的集合用图形(常见的有圆和矩形)表示，图形上或图形内的点表示该集合的元素，图形外的点表示集合外的元素，这种表示集合的方法叫____________.

疑难诠译

1. **列举法**

在用列举法表示集合时应注意以下四点：
(1)元素间用分隔号“,”；
(2)元素不重复；
(3)不考虑元素顺序；
(4)对于含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但是必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号.

如“中国的直辖市”构成了一个集合，用列举法表示为{北京，天津，上海，重庆}. “book”中的字母也构成一个集合，用列举法表示为{b,o,k}.

2. **描述法**

在集合 I 中，属于集合 A 的任一元素 x，都具有性质 $p(x)$，而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$，则性质 $p(x)$叫做集合 A 的一个特征性质. 于是，集合 A 可用它的特征性质 $p(x)$描述为 $\{x\in I\mid p(x)\}$，它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$的所有元素构成的. 其中 x 为该集合中元素的代号，它表明了该集合中的元素是“谁”，是“什么”；I 是特定条件，$p(x)$为该集合中元素特有的公共属性、特征.

在使用该法时，应注意以下六点：
①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号)；
②说明该集合中元素的特征；
③不能出现未被说明的字母；
④多层描述时，应当准备使用“或”、“且”、“非”；
⑤所有描述的内容都要写在集合括号内；
⑥用于描述的语句力求简明、确切.
如 $\{x\mid x$ 为中国的直辖市$\}$.

典例剖析

例 1：已知集合 $A=\{$小于 6 的正整数$\}$　$B=\{$小于 10 的质数$\}$　$C=\{$24 和 36 的公约数$\}$　$M=\{x\mid x\in\mathbf{A}$ 且 $x\in\mathbf{C}\}$　$N=\{x\mid x\in\mathbf{B}$ 且 $x\notin\mathbf{C}\}$用列举法表示 M、N.

解析：集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$　$B=\{2,3,5,7\}$　$C=\{1,2,3,4,6,12\}$

(1) $\because x\in A$ 且 $x\in C$　$\therefore x=1,2,3,4$

$\therefore M=\{1,2,3,4\}$

(2) $\because x\in B$ 且 $x\notin C$　$\therefore x=5,7$

反证法　反证法是一种间接证法. 它是先提出一个与命题结论相反的假设，然后从这个假设出发，经过正确的推理，导致矛盾，从而否定相反的假设，达到肯定原命题正确的一种方法. 反证法可以分为归谬反证法(结论的反面只有一种)与穷举反证法(结论的反面不只一种).

$N=\{5,7\}$

点评:列举法是把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.列举时,元素不重复,不计次序,不遗漏,且元素与元素之间用“,”隔开.其优点是集合中的元素清晰可见,一目了然.

变式引申:改用列举法表示下列各集合.

1:{自然数中五个最小的完全平方数}

2.$\{x|(x-1)^2(x-2)=0\}$

3:$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x+y=8\\x-y=1\end{cases}\right\}$

例 2:下面三个集合①$\{x|y=x^2+1\}$ ②$\{y|y=x^2+1\}$ ③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$

(1)它们是不是相同的集合?

(2)它们的各自含义是什么?

解析:对于用描述法给出的集合,首先要清楚集合中的代表元素是什么,元素满足什么条件.

解.(1)是互不相同的集合.

(2)集合①$\{x|y=x^2+1\}$的代表元素是 x,满足条件 $y=x^2+1$ 中的 $x\in\mathbf{R}$,

∴实质上$\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$;

集合②$\{y|y=x^2+1\}$的代表元素是 y,满足条件 $y=x^2+1$ 的 y 的取值范围是 $y\geqslant 1$

集合③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$的代表元素是(x,y),可以认为是满足 $y=x^2+1$ 的数对(x,y)的集合;也可以认为是坐标平面内的点(x,y),由于这些点的坐标满足 $y=x^2+1$,

∴$\{(x,y)|y=x^2+1\}=$\{抛物线 $y=x^2+1$ 上的点\}.

点评:用描述法表示的集合,认识它一要看集合的代表元素是什么,它反映了集合元素的形式;二要看元素满足什么条件,对符号语言所表达含义的理解在数学中要求是很高的,希望同学们能逐步提高对符号语言的认识.

变式引申:用适当的方法表示下列各集合

(1)由所有非负偶数组成的集合.

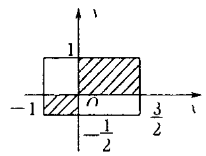
(2)由所有小于 20 的既是奇数又是质数的正整数组成的集合

(3)x^2-9 的一次因式组成的集合.

(4)方程$(x-1)(x-2)(x^2-5)=0$ 的解组成的集合

(5)以 O 为圆心 m 为半径的圆上所有点组成的集合.

例 3:用描述法表示下图中阴影部分(含边界)的坐标.的集合



答案:$\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$,且 $xy\geqslant 0\}$

点评:(1)本题给出的集合是图形语言、直观、清楚,解答时用符号语言、简练、严谨.本题也可用文字语言表示,要力求准确、简练.

(2)数学中文字语言、符号语言、图形语言互译是正确理解题意和解题的关键.在平时学习中要重视各种数学语言形态的互译,这对提高解题能力大有裨益.

例 4:集合 M 的元素为自然数,且满足.如果 $x\in M$,$8-x\in M$,试回答下列问题:(1)写出只有一个元素的集合 M;(2)写出元素个数为 2 的所有集合 M;(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个?

解析:从集合中两元素之和等于 8 知,两元素成对出现或相同,结合集合中元素的互异性知答案.

解:(1)∵M 中只有一个元素,根据已知必须满足 $x=8-x$,∴$x=4$,故含一个元素的集合 $M=\{4\}$.

(2)当 M 中只含两个元素时,其元素只能是 x 和 $8-x$,从而全部含两个元素的集合 M 应为$\{0,8\}$,$\{1,7\}$,$\{2,6\}$,$\{3,5\}$.

(3)满足条件是 M 是由集合$\{4\}$,$\{0,8\}$,$\{1,7\}$,$\{2,6\}$,$\{3,5\}$中的元素组成,以上五个集合任取 1 个有 5 种,任取 2 个有 10 种,任取 3 个有 10 种,任取 4 个有 5 种,任取 5 个有 1 种,共有 $5+10+10+5+1=31$(个).

点评:由集合元素的互异性,及两元素之和为 8 的特点出发,在(3)问中,从 M 中元素的特点着手,满足条件的集合可含$\{4\}$,$\{0,8\}$,$\{1,7\}$,$\{2,6\}$,$\{3,5\}$中的一个、二个、三个、四个、五个,分类数之,最后求其个数的和.

反证法(二) 用反证法证明一个命题的步骤大体上可分为 (1)反设;(2)归谬;(3)结论 其中反设是反证法的基础,归谬是反证法的关键 导出矛盾的过程没有固定的模式,但必须从反设出发,否则推导将成为无源之水,无土之木.

变式引申：如果对于一个集合中的任意两个元素，它们相加和相乘后的结果仍在这个集合中，称该集合对加乘运算自封闭，试举出加乘运算自封闭的两个集合．

自我评价

1. 下列集合表示法正确的是　（　　）
   A. $\{1,2,3,3\}$
   B. {全体有理数}
   C. {实数}
   D. 不等式 $x-3>2$ 的解集是 $\{x|x>5\}$

2 下列命题中真命题的个数是　（　　）
   (1) $0\in\varnothing$　　(2) $\varnothing\in\{\varnothing\}$
   (3) $0\in\{0\}$　　(4) $\varnothing\notin\{a\}$
   A. 1　　B. 2
   C. 3　　D. 4

3. 下列命题　（　　）
   ①方程 $\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$ 的解集是 $\{\frac{1}{2},-1\}$
   ②方程 $x^2+x-6=0$ 的解集为 $\{(-3,2)\}$
   ③集合 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，与集合 $P=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示同--集合．
   ④方程组 $\begin{cases}2x+y=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是 $\{(x,y)|x=-1$，或 $y=2\}$
   其中为真命题的个数为　（　　）
   A. 0 个　　B. 2 个
   C. 3 个　　D. 4 个

4. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}\}$，用列举法表示为　（　　）
   A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-3,-1,0,1,2\}$
   C. $\{-3,0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,1,2\}$

5. 集 $P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z},\}$，$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x|x|=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$a\in P$，$b\in Q$，则有　（　　）
   A. $(a+b)\in P$
   B. $(a+b)\in Q$
   C. $(a+b)\in R$
   D. $(a+b)$ 不属于 P、Q、R 中的任意一个

6. $\{(x,y)|x+y=6\quad x,y\in\mathbf{N}\}$ 用列举法表示为________

7. 集合 $A=\{m|m+1\geqslant5\}$，$B=\{y|y=x^2+2x+5,x\in\mathbf{R}\}$，则 A、B ________（填"是"或"否"）表示同一集合．

8. 用描述法表示下列集合：
   (1)直角坐标平面内第二象限内的点集；
   (2)抛物线 $y=x^2-2x+2$ 上的点组成的集合

9. 约定 $\otimes$ 与 △⃝ 是两个运算符号，其运算法则如下：对任意的实数 a,b 有，$a\otimes b=ab$，a △⃝ $b=b(a^2+b^2+1)$，且 $-2<a<b<2$，$a,b\in\mathbf{Z}$，用列举法表示集合 $A=\left\{x|x=2(a\otimes b)+\frac{a △⃝ b}{b}\right\}$．

10. 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}^*\}$，若 $a\in A$，试判断 a 与集合 B 的关系．

集合论的创始人（一）

疯人数学家康托尔（1845～1918），德国人，集合论的创始人，他引入了基数的概念，定义了聚点、闭集、开集等的概念．他是维数理论的开拓者，维数理论是点集理论的起源，而点集理论又促使一般拓扑学的发展，因此他为拓扑空间理论开辟了道路．

§1.1.2 集合间的基本关系

课标三维要点

1. **知识与技能**

通过本节课的学习，理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.会写出给定集合的所有子集和真子集.

2. **过程与方法**

通过本课的学习，体验子集概念的形成过程，逐渐学会观察、比较、抽象、概括的思维方法，训练思维的条理性.

3. **情感、态度与价值观**

通过本节的学习，增强自己的数学理性思维能力，培养良好的数学思维品质.

知识要点扫描

1. 对于两个集合 A、B，如果______________________________，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的________，记作________，或________.

2. 如果集合 A 是集合 B 的子集($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$)，此时集合 A 和集合 B 中的元素________，因此，集合 A 与集合 B ________，记作________.

3. 如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素________且________，我们称集合 A 是集合 B 的________，记作________.

4. 我们把________叫做空集，记为________，并规定：空集是任何集合的________.

5. 任何一个集合是它本身的________，即 A ________ A. 对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 A ________ C.

疑难诠译

1. **子集概念的理解**

(1)子集的概念是由讨论集合与集合间的关系引出的，两个集合 A 与 B 之间的关系如下：

$$\begin{cases} A\subseteq B \begin{cases} A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A \\ A\neq B \Rightarrow A\subsetneqq B \end{cases} \\ A\nsubseteq B \end{cases}$$

其中记号 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsubseteq A$)表示集合 A 不包含于集合 B(或集合 B 不包含集合 A).

(2)子集具有以下性质：

①$A\subseteq A$，即任何一个集合都是它本身的子集.

②如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$.

③如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

④如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

(3)包含的定义也可以表述成：如果由任一 $x\in A$，可以推出 $x\in B$，那么 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

不包含的定义也可以表述：成对的两个集合 A 与 B，如果集合 A 中存在至少一个元素不是集合 B 的元素，那么 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$).

(4)有限集合的子集个数：

①n 个元素的集合有 2^n 个子集.

②n 个元素的集合有 2^n-1 个真子集.

③n 个元素的集合有 2^n-1 个非空子集.

④n 个元素的集合有 2^n-2 个非空真子集.

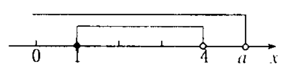
2. **正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系**

元素与集合的关系是属于与不属于的关系，集合与集合之间的关系是包含、真包含、相等的关系，要按照定义仔细区别.

典例剖析

例1：已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值集合.

解析：将数集 A 表示在数轴上(如下图所示)，要满足 $A\subsetneqq B$，表示数 a 的点必须在表示4的点处或在表示4的点的右边，所以所求 a 的集合为 $\{a|a\geqslant 4\}$.



点评：这类问题，要利用数轴，数形结合，以形定数. 同时要注意验证端点值，做到准确无误.

变式引申：设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 组成的集合，并写出它的所有非空真子集.

集合论的创始人(二)

康托尔的老师克隆尼克、法国数学家彭加勒、德国数学家魏尔、康托尔的好友数学家施瓦兹等都强烈反对集合论，攻击他、阻止他，或同他断交，使之在患34年的精神病之后去世.

例 2:已知 $M=\{2,a,b\}$,$N=\{2a,2,b^2\}$,且 $M=N$,求 a、b 的值.

解析:由 $M=N$ 可知,两个集合中的元素应该完全相同,由此,可用集合中元素的性质解题.

解法 1:根据集合中元素的互异性,有

$\begin{cases}a=2a\\b=b^2\end{cases}$;或 $\begin{cases}a=b^2\\b=2a.\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}a=0,\\b=0;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\b=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

再根据集合中元素的互异性,得 $\begin{cases}a=0,\\b=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

解法 2:$\because M=N$,$\therefore M$、N 中元素分别对应相同.

$\therefore \begin{cases}a+b=2a+b^2,\\a\cdot b=2a\cdot b^2.\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+b(b-1)=0, & ①\\ab(2b-1)=0. & ②\end{cases}$

$\because$ 集合中元素互异,$\therefore a$、b 不能同时为 0,

$\therefore b\neq 0$,由②得,$a=0$ 或 $b=\frac{1}{2}$.

当 $a=0$ 时,由①知,$b=1$,或 $b=0$(舍去);

当 $b=\frac{1}{2}$ 时,由①知,$a=\frac{1}{4}$.

$\therefore \begin{cases}a=0,\\b=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

点评:集合中元素的互异性在解决此类问题时至关重要,要引起足够的重视.

变式引申:已知集合 M、N,$M=\{1,x,y\}$,$N=\{x,x^2,xy\}$

若 $M=N$ 求实数 x、y 的值.

例 3:设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 的值.

解析:$B\subseteq A$ 可分 $B=\varnothing$,$B\subsetneqq A(B\neq\varnothing)$,$B=A$ 三种情况,所以此题需分类讨论并结合一元二次方程根的情况加以解决.

解:$A=\{0,-4\}$,$B\subseteq A$,

(1)当 $B=\varnothing$ 时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无解,$\therefore \Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,$\therefore a<-1$.

(2)当 $B\subsetneqq A(B\neq\varnothing)$ 时,则 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$,

即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 只有一解,

$\therefore \Delta=8a+8=0$,$a=-1$,此时 $B=\{0\}$ 满足条件.

(3)当 $B=A$ 时,方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两实根 $0,-4$.

$\therefore \begin{cases}-4=-2(a+1),\\0=a^2-1.\end{cases}$ $\quad\therefore a=1$.

综上可知 $a\leqslant -1$,或 $a=1$.

点评:在集合单元中含有丰富的分类讨论内容,注意培养分类意识,掌握分类方法.

变式引申:(1998·全国高考题)设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,$N=\{x\mid x-k\leqslant 0\}$,若 $M\cap N\neq\varnothing$,则 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,2]$ B. $[-1,+\infty)$

C. $(-1,+\infty)$ D. $[-1,2)$

例 4:写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集,并指出其中哪些是它的真子集.

解析:子集 $\varnothing$ $\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$ 其中真子集有 $\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$

拓展:若集合 M 中含有 n 个元素,则其子集的个数为 2^n

真子集的个数为 2^n-1

变式引申:已知集合 $A=\{2,4,6,8,9\}$,$B=\{1,2,3,5,8\}$,又知非空集合 C 是这样一个集合:其各元素都加 2 元,就变为 A 的一个子集,若各元素都减 2 后,则变为 B 的一个子集,求集合 C.

自我评价

1. 已知集合 $P=\{x|x^2=1\}$集合 $v=\{x|ax=1\}$若 $v\subseteq P$,那么 a 的值是 ( )

A. 1　　B. -1

C. 1 或-1　　D. 0,1 或-1

2. 集合 $M=\{x|x=1+a^2,a\in\mathbf{N}^*\}$　$P=\{x|x=a^2-4a+5\ \ a\in\mathbf{N}^*\}$下列关系中正确的是 ( )

A. $M\subsetneqq P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M=P$　　D. $M\nsubseteq P$ 且 $P\nsubseteq M$

3. 设 $A=\{x|1<x<2\}$,$B=\{x|x<a\}$若 $A\subsetneqq B$,则 a 的取值范围是 ( )

A. $\{a|a\geqslant 2\}$　　B. $\{a|a\leqslant 1\}$

C. $\{a|a\geqslant 1|\}$　　D. $\{a|a\leqslant 2\}$

4. 非空数集 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$且 S 还满足条件:若 $a\in S$,$6-a\in S$,则符合上述条件的集合 S 的个数是 ( )

A. 4　　B. 5

C. 7　　D. 3

5. 数集 $M=\{x|x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$数集 $N=\{x|x=(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是 ( )

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M=N$

C. $N\subsetneqq M$　　D. $M\supset N$

6. 若$\{1,2,3\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4\}$,则 $A=$________.

7. 设集合 $A=\{1,3,a\}$,$B=\{1,a^2-a+1\}$,且 $A\supseteq B$,求 a 的值为________.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|(x+1)(x^2+3x-4)=0,x\in\mathbf{R}\}$又 $A\subsetneqq P\subseteq B$,求满足条件的集合 P

9. 若 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x|2m-1\leqslant x\leqslant m+1\}$,$B\subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

10. 若方程 $x^2+x+a=0$ 至少有一根为非负实数,求实数 a 的取值范围.

数学名言(二)

正如俗话所说:“条条大路通罗马”一样,我认为,至少在我自身的情况下,所有的代数问题或迟或早都要归结到近世代数的首府上,而在首府的光照夺目的入口处所铭刻着的却是“不变式理论”——J·J·西尔维斯特

§1.1.3 集合的基本运算

No·1 第一课时 沧海横流,方显英雄本色。

课标三维要点

1. 知识与技能

通过本节课的学习,理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

2. 过程与方法

通过运用韦恩图解释概念,体验数形结合的思想在数学中的应用.

3. 情感、态度与价值观

学习集合的运算后,提高用集合的思想分析问题、解决问题的能力,增强学习数学的兴趣.

知识要点扫描

1. 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的________,记作________.

2. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的________记作________.

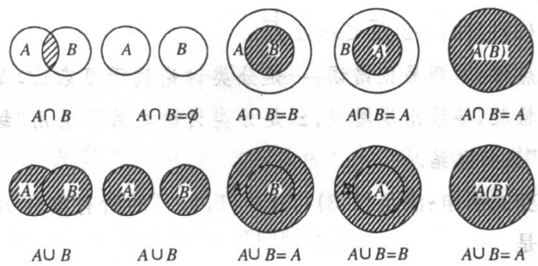
3. 对于任意的集合 A、B,有 $A\cup A=$________,$A\cap A=$________;$A\cup\varnothing=$________,$A\cap\varnothing=$________.若 $A\cup B=B$,则 A________B;若 $A\cap B=B$,则 B________A.

疑难诠译

1. 用定义求两集合的交集与并集时,要注意"或""且"的意义,"或"是两者皆可的意思,"且"是两者都有的意思,在使用时不要混淆.

2. 用韦恩图表示交集与并集.

已知集合 A 与 B,用阴影部分表示 $A\cap B$,$A\cup B$,如图所示:



典例剖析

例 1:已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{a-5,1-a,9\}$,分别求适合下列条件的 a 的值.

(1)$9\in A\cap B$;(2)$\{9\}=A\cap B$.

解析:(1)$9\in A\cap B$ 且 $9\in B$,$\therefore 9\in A$.

$\therefore 2a-1=9$ 或 $a^2=9$,$\therefore a=5$ 或 $a=\pm3$.

而当 $a=3$ 时,$a-5=1-a=-2$,故舍去.

$\therefore a=5$ 或 $a=-3$.

(2)$\because\{9\}=A\cap B$,$\therefore 9\in A\cap B$,

$\therefore a=5$ 或 $a=-3$,

而当 $a=5$ 时,$A=\{-4,9,25\}$,$B=\{0,-4,9\}$,

此时 $A\cap B=\{-4,9\}\neq\{9\}$,故 $a=5$ 舍去.

$\therefore a=-3$.

点评:$9\in A\cap B$ 与 $\{9\}=A\cap B$ 意义不同,$9\in A\cap B$ 说明 9 是 A 与 B 的一个公共元素,但 A 与 B 允许有其他公共元素.而 $\{9\}=A\cap B$ 说明 A 与 B 的公共元素有且只有一个 9.

变式引申:已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$,$N=\{(x,y)|x-y=4\}$,那么集合 $M\cap N$ 为 ( )

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

例 2:设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2-ax+2=0\}$,若 $A\cup B=A$,求实数 a 的值组成的集合.

解析:由 $A\cup B=A$ 可知 $B\subseteq A$,化简集合 A 得 $A=\{1,2\}$.

$\therefore B$ 可为 $\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$四种情形

当 $B=\varnothing$ 时，方程 x^2-ax+2 无实根故 $\Delta=a^2-8<0$，解得 $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$，当 $B=\{1\}$ 或 $\{2\}$ 时，方程 x^2-ax+2 有等根.

由韦达定理可知 $x_1\cdot x_2=2$，故等根为 $\pm\sqrt{2}$，故 B 不可能为 $\{1\}$ 或 $\{2\}$. 当 $B=\{1,2\}$ 时，此时 $B=A$，

方程 $x^2-ax+2=0$ 有两个不同的实数根为 1，2.

由韦达定理得 $1+2=x_1+x_2=a$，$\therefore a=3$.

综上所述，实数 a 的值组成的集合为

$\{3\}\cup\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$.

点评：本题易犯错误：一是分类讨论过于复杂；二是不进行检验，导致出现增根；三是分类讨论之后没有用“综上所述”进行总结.

变式引申：满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的所有集合 A 的个数是 （　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

例 3：已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2-y^2-y=4\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-xy-2y^2=0\}$，$C=\{(x,y)\mid x-2y=0\}$，$D=\{(x,y)\mid x+y=0\}$.

(1)判断 B、C、D 间的关系；

(2)求 $A\cap B$.

解析：集合 C、D 间的关系比较明确，从代数角度看，它们分别是方程 $x-2y=0$ 和 $x+y=0$ 的解集；从几何角度看，它们分别是直线 $x-2y=0$ 和直线 $x+y=0$ 上的点集. 所以要判断 B、C、D 间的关系，只有将集合 B 变换形式，明确意义，即将 $x^2-xy-2y^2=0$ 进行化简转换，看与 $x-2y=0$ 和 $x+y=0$ 的关系，对于第(2)问，从代数角度看，即为解方程组 $\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x^2-xy-2y^2=0.\end{cases}$

解：(1) $\because x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$，

$\therefore B=\{(x,y)\mid x^2-xy-2y^2=0\}$

$=\{(x,y)\mid (x-2y)(x+y)=0\}$

$=\{(x,y)\mid x-2y=0$ 或 $x+y=0\}$

$=\{(x,y)\mid x-2y=0\}\cup\{(x,y)\mid x+y=0\}$

$=C\cup D$.

(2) $A\cap B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x^2-xy-2y^2=0.\end{cases}\right\}$

$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2-y^2-y=4\\(x-2y)(x+y)=0.\end{cases}\right\}$

$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x-2y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x+y=0\end{cases}\right\}$

$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x-2y=0\end{cases}\right\}\cup\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2-y^2-y=4,\\x+y=0\end{cases}\right\}$

$=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),(-2,-1)\right\}\cup\{(4,4)\}$

$=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),(-2,-1),\{(4,4)\right\}$.

点评：(1)不能从代数或几何意义去分析题目隐含的关系.

(2)没有明确集合中各点的形式.

变式引申：已知 $M=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$P=\{x\mid x$ 是梯形$\}$则 $M\cap P$ 等于 （　　）

A. M　　B. P

C. $\{x\mid x$ 是平行四边形且梯形$\}$　　D. $\varnothing$

例 4：学校先举办了一次田径运动会，某班有 8 名同学参赛，又举办了一次球类运动会，这个班有 12 名同学参赛，两次运动会都参赛的有 3 人. 两次运动会中，这个班共有多少名同学参赛？

解析：设 A 为田径运动会参赛的学生的集合，B 为球类运动会参赛的学生的集合，那么 $A\cap B$ 就是两次运动会都参赛的学生的集合，card(A)，card(B)，card(C)，card($A\cap B$)是已知的，于是可以根据上述内容求出 card($A\cap B$).

解：设 $A=\{x\mid x$ 是参加田径运动会比赛的学生$\}$，$B=\{x\mid x$ 是参加球类运动会比赛的学生$\}$，

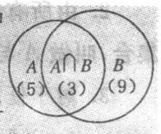
$A\cap B=\{x\mid x$ 是两次运动会都比赛的学生$\}$，

$A\cup B=\{x\mid x$ 是参加所有比赛的学生$\}$.

因此 card($A\cap B$)＝card(A)＋card(B)－card($A\cap B$)＝8＋12－3＝17.

答案：两次运动会中，这个班共有 17 名同学参赛.

点评：我们也可以用 Venn 图来求解(如右图所示).



在右图中相应于 $A\cap B$ 的区域里先填上 3(card($A\cap B$)＝3)(这里的 3 是表示元素的个数，而不是元素. 图中我们特别加上括号，另外两个数 5，9 也一样)，再在 A 中不包括 $A\cap B$ 的区域里填上 5(card(A)－card($A\cap B$)＝5)，在 B 中不包括 $A\cap B$ 的区域里填上 9(card(B)－card($A\cap B$)＝9).

$\therefore$ card($A\cap B$)＝5＋3＋9＝17.

自我评价

1. 设 $X=\{0,1,2,4,5,7\}$，$Y=\{1,4,6,8,9\}$，$Z=\{4,7,9\}$，则 $(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$ 等于 （　　）

A. $\{1,4\}$　　B. $\{1,7\}$

C. $\{4,7\}$　　D. $\{1,4,7\}$

药剂师的砝码(二)

答案：分两步，第一步将 30 克砝码放一盘上，再把 300 克药粉分别倒在两个盘上，使天平平衡. 于是，一盘有药粉 165 克，另一盘 135 克；第二步利用 35 克砝码，从 135 克药粉中称出 35 克，加到 165 克药粉中.