六年制重点中学高中数学课本

微积分

（征求意见本）

人民教育出版社

六年制重点中学高中数学课本
微　积　分
（征求意见本）
人民教育出版社中小学数学编辑室编
•
人民教育出版社出版发行
北京市大兴县印刷厂印
•
开本787×1092　1/32　印张9.75　字数200,000
1982年3月第1版　　1983年4月第2次印刷
印数　15,001—55,000
书号　K7012·0301　定价　0.58元

说　明

一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，除在全国征求意见外，还将在部分省市少数重点中学试教．然后根据各地意见和试教经验进行修改，计划于1984年出版试用本．

二、本书为六年制重点中学高中三年级课本．可供下面两种情况的班级使用：

1．每周数学课为6课时的班级，其中微积分4课时，两个学期共112课时，讲完本书全部的内容；

2．每周数学课为5课时的班级，其中微积分3课时，两个学期共84课时，讲完本书中不附＊部分的内容，而将附＊内容可作为选学．

三、本书配有练习、习题、复习参考题．

1．练习　主要供课堂练习用．

2．习题　主要供课内课外作业用．

3．复习参考题　每章后配备*A*、*B*两组复习参考题，*A*组题主要供复习本章内容时选用；*B*组题综合性、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考选用．

为了使教学更有针对性和灵活性，本书习题和复习参考题数量多于实际教学所需数量，以利于因材施教．教学时可根据课时情况和学生接受水平选用一部分或大部分．

四、本书是征求意见本，热诚希望各地广大教师、教学研

究人员以及关心中学教材建设的同志，特别是用本书试教的同志，对教材内容和程度份量、体系的安排、例题习题的配备和其他方面，提出意见，以便修改定稿.

五、本书以中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第四册为基础编写的. 参加本书编写工作的有方明一、刘远图、曾宪源、于琛等. 全书由于琛同志校订.

目　　录

第一章　极限和连续……………………………………1
第二章　导数和微分……………………………………61
　一　导数概念……………………………………61
　二　求导方法……………………………………79
　三　微分……………………………………124
第三章　导数的应用……………………………………148
　一　中值定理……………………………………148
　二　一阶导数的应用……………………………………165
　三　二阶导数的应用……………………………………185
　四　方程的近似解……………………………………200
第四章　不定积分……………………………………214
第五章　定积分及其应用……………………………………254
　一　定积分的概念和计算……………………………………254
　二　定积分的应用……………………………………270
附表　简易积分表……………………………………295

第一章　极限和连续

1.1　数列的几何表示

我们知道，无穷数列可以看作是定义域为自然数集的函数依一定次序排列的函数值. 例如,无穷数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \tag{1}$$

可以看作是函数 $f(n)=a_n=\frac{1}{2^n}$ 当 n 从小到大依次取自然数时相应的一列函数值. 因此，我们可以用函数的图象表示无穷数列. 如图 1-1(1)，数列(1)是用坐标为 $\left(n, \frac{1}{2^n}\right)$ 的点集来表示的.

数列的另一种图象表示法是按照数列各项的值在数轴上描点,并注上相应的记号(图 1-1(2)).

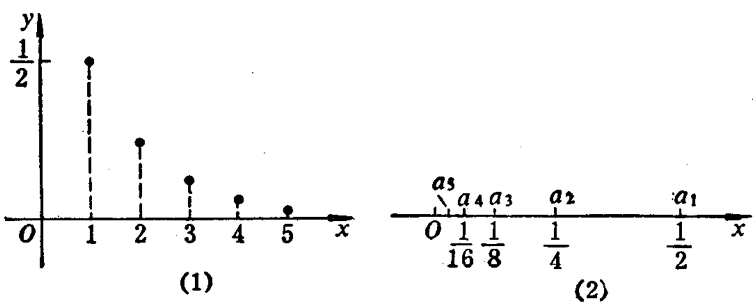

图　1-1

例 1　用两种方法作出数列

$$0.9, 1.01, 0.999, 1.0001, \cdots, 1+\frac{(-1)^n}{10^n}, \cdots \qquad (2)$$

的图象表示.

解: 图象表示如图 1-2.

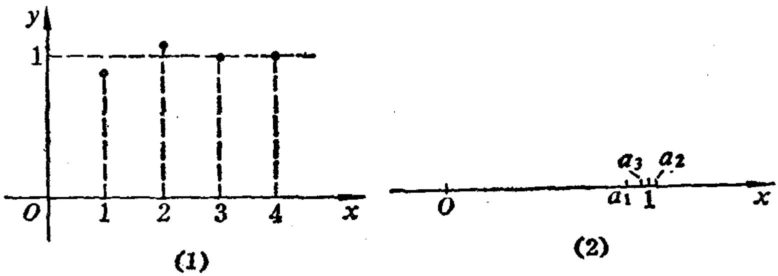

图　1-2

从上面的两个数列来看，在它们的第一种图象表示中，当 n 增大时，表示数列各项的点愈来愈接近某一水平直线 $y=a$. 这就是说，数列的项 a_n 愈来愈接近某一常数：当 n 增大时，数列(1)的项愈来愈接近 0，而数列(2)的项愈来愈接近 1. 在它们的第二种图象表示中，也可看到，表示数列各项的点愈来愈接近某一定点：表示数列(1)各项的点愈来愈接近 0，表示数列(2)各项的点愈来愈接近 1. 这时，我们说数列(1)无限趋近于 0，数列(2)无限趋近于 1.

当 n 增大时，有的无穷数列不趋近于任何常数.

例如，数列

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots \qquad (3)$$

的各项交替取 1 和 -1 的值，不趋近于同一常数. 从图 1-3 可以看出，表示数列各项的点分布在 $y=1$ 和 $y=-1$ 两条直线上. 当 n 增大时，表示数列的点不接近于同一水平直线.

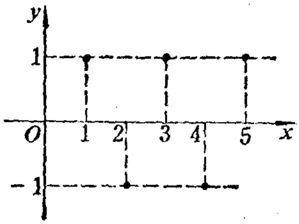

图 1-3

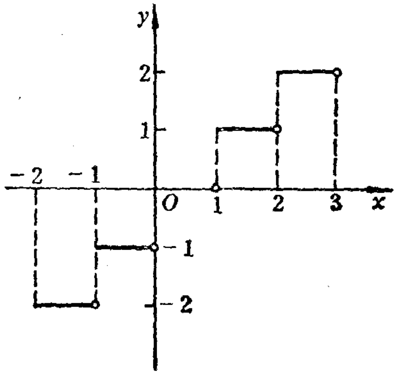

图 1-4

又如，数列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

的项随着 n 增大而增大，也不趋近于任何常数。

下面我们介绍以后常常要用到的函数 $N=[x]$（$N=[x]$ 叫做数 x 的整数部分）。

记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数。例如，

$$\left[\frac{10}{3}\right]=[3.333\cdots]=3, \quad [-2.5]=-3, [5]=5.$$

函数 $N=[x]$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，它的图象如图 1-4。

例 2 求$\left[-\frac{1}{5}\right]$, $[0]$, $[0.99]$, $[e]$.

解： $\left[-\frac{1}{5}\right]=[-0.2]=-1$，

$[0]=0$；

$[0.99]=0$；

$[e]=[2.71828\cdots]=2.$

练 习

1. 用两种方法作图表示下列无穷数列，并从图中看出当n增大时，数列是不是趋近于什么数：

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$；(2) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$；(3) $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$；(4) $\left\{\frac{10n}{n^2+1}\right\}$；

(5) $1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \cdots$；

(6) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, \cdots$.

2. 当x取下列各值时，写出函数$N=[x]$的值：

(1) $x=-10$；　　(2) $x=-3.01$；

(3) $x=0$；　　(4) $x=\pi$；

(5) $x=-\frac{10}{3}$；　　(6) $x=\frac{11}{3}$.

3. 填表：

ε	0.3	0.1	0.01	0.001
$N_1=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$				
$N_2=[-\lg\varepsilon]$				

1.2 数列的极限

在 1.1 节里，我们利用图象表示给出了“数列无限趋近于一个常数”的直观概念. 但是，为了判断一个数列是否趋近于一个常数，还需要对上述概念给出严格的数学定义. 因此，我们详细地研究数列

$$0.9, 1.01, 0.999, 1.0001, \cdots, 1+\frac{(-1)^n}{10^n}, \cdots$$

中各项与它趋近的数 1 之间的数量关系.

我们首先列出这个数列各项与 1 的差的绝对值如下表:

项　　号	项	这一项与 1 的差的绝对值
a_1	0.9	$\lvert 0.9-1\rvert=0.1$
a_2	1.01	$\lvert 1.01-1\rvert=0.01$
a_3	0.999	$\lvert 0.999-1\rvert=0.001$
a_4	1.0001	$\lvert 1.0001-1\rvert=0.0001$
a_5	0.99999	$\lvert 0.99999-1\rvert=0.00001$
a_6	1.000001	$\lvert 1.000001-1\rvert=0.000001$
a_7	0.9999999	$\lvert 0.9999999-1\rvert=0.0000001$
…	……	……

从上表可以看出，当 n 充分大时，数列中各项与 1 的差的绝对值(即 $|a_n-1|$)会变得任意地小. 例如，第 4 项后面各项与 1 的差的绝对值小于 0.0001，第 5 项后面各项与 1 的差的绝对值小于0.00001. 这一事实可以用数学语言精确地描述如下：对于预先指定的任意小的正数 ε，总能在数列中找到某一项，使得这一项后面所有的项与 1 的差的绝对值小于ε.

如果我们预先指定 $\varepsilon=0.001$，那么从表中可以看出，数列第 3 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε.

如果我们预先指定 $\varepsilon=0.000001$，那么从表中可以看出，数列的第 6 项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 ε.

一般地，如果我们预先指定的 ε 满足 $10^{-N}\leqslant\varepsilon<10^{-(N-1)}$，那么从数列的通项公式 $a_n=1+\frac{(-1)^n}{10^n}$ 可以看出，数列的第 N 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε. 这就是说，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总可以找到充分大的自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-1|<\varepsilon$ 恒成立.

上面我们对一个具体给定的数列无限趋近于一个常数的含义作了较仔细的分析. 现在，在以上的分析的基础上，我们一般地给出无穷数列 $\{a_n\}$ 无限趋近于某一常数 A 的精确定义如下：

对于无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，对于预先指定的任意小的正数 ε，总可以找到自然数 N，使得 a_N 后面所有的项都满足不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$（即当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立），那么就把常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A^*.$$

这个式子读作"当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A". "$\to$"表示"趋向于"，"∞"表示"无穷大"，"$n\to\infty$"表示"n 趋向于无穷大"，也就是 n 无限增大的意思.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 有时也可记作

$$当\ n\to\infty\ 时，a_n\to A.$$

有极限的数列叫做**收敛数列**. 数列 $\{a_n\}$ 有极限，有时也说成"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在".

---

* lim 是拉丁文 limis（极限）一词的前三个字母，一般按英文 limit（极限）一词读音. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 也可读作"limit a_n 当 n 趋于无穷大时等于 A".

例如，对于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，我们指定任意小的 ε 满足 $10^{-m}\leqslant\varepsilon<10^{-(m-1)}$，那么总可以找到自然数 $N=10^m$，使得第 10^m 项后面所有的项都满足不等式$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{10^m}\leqslant\varepsilon$，所以数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限是 0.

下面我们来说明数列的极限的几何意义.

数列的极限的定义中，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$ 可以写成

$$-\varepsilon<a_n-A<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon.$$

这个不等式说明，当数列$\{a_n\}$的极限是A时，对于预先指定的任意小的正数 ε，总可以找到自然数N，使得 a_N 后面所有的项，即 $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$都落在开区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内（图 1-5）. 这个区间叫做点$A$的 ε 邻域.

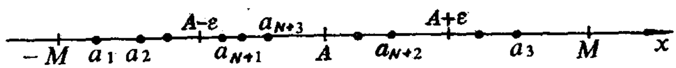

图 1-5

因此，如果数列$\{a_n\}$的极限是 A，那么对于任意小的正数 ε，除了前面有限项以外，其余的项全部落在点 A 的 ε 邻域内.

从上面讲的可以知道，如果数列$\{a_n\}$有极限，那么存在 N，使得 a_{N+1}，a_{N+2}，$\cdots$都在区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内. 而数列前面只有有限项（$N$ 项），所以一定可以找到一个正数 M，使得数列$\{a_n\}$所有的项都落在开区间$(-M, M)$内（图 1-5），即对于一切 n，都有$|a_n|<M$.

这一性质称为收敛数列的有界性，完整叙述如下：

如果数列$\{a_n\}$有极限，那么数列$\{a_n\}$有界，即存在正数M，使得对于一切自然数n，有$|a_n|<M$。

练　习

1. 已知数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots.$$

(1) 列表写出数列前 7 项与 0 的差的绝对值。

(2) 数列第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.1？都小于 0.01？都小于 0.004？

(3) 如果预先指定的任意小的正数 $\varepsilon=10^{-k}$（k是自然数），那么数列第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于ε？

2. 下面两个数列的极限都是 1，按照数列极限的定义，分别对给定的正数 ε，找出相应的 N，填入下表：

$$\{a_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\};$$

$$\{b_n\}=\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}.$$

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-10}	10^{-100}	10^{-2000}
N_1（数列$\{a_n\}$）					
N_2（数列$\{b_n\}$）					

3. 已知数列:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots; \tag{1}$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots; \tag{2}$$

(1) 对上面两个数列分别找出正数 M，使得数列的各项都落在开区间$(-M, M)$内.

(2) 上面两个数列是收敛数列吗？如果是，数列的极限是什么数？

(3) 有界数列一定是收敛数列吗？收敛数列一定是有界数列吗？

1.3 数列极限的证明方法

根据数列的定义，可以证明某数是已知数列的极限. 举例如下.

例 1 证明数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \tag{1}$$

的极限是 0.

分析: 证明一个数列的极限是 A, 只需证明对于任意小的正数 ε, 总能找到自然数 N, 使得当 $n>N$ 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立. 为此，解不等式$|a_n-A|<\varepsilon$ 就可求出 N 来. 在本题中, 就是要解不等式$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 求出 N 来.

证明: 对于任意小的正数 ε, 要使

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

只须

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

由于数列极限定义中的 N 是自然数，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

由上面的推导过程可以看出，当 $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$时，$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立. 因此，根据数列极限的定义得出，数列(1)的极限是 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

例 2　证明数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots \tag{2}$$

的极限是 1.

证明：对于任意小的正数 ε，要使

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon,$$

只须

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$. 那么由上面的推导过程可以看出，当

$n>N$ 时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立. 因此，根据数列极限的定义得出，数列(2) 的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

例 3 证明数列

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \cdots \tag{3}$$

的极限是 0.

证明： 这个数列的通项可以写成

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 是偶数时;}\\ \frac{2}{n+1}, & \text{当 } n \text{ 是奇数时.}\end{cases}$$

下面按 n 是偶数和奇数两种情况分别寻找 N.

当 n 是偶数时，

$$|a_n-0|=|0-0|=0.$$

所以无论取哪个自然数作为 N，当 n 是偶数而且大于 N 时，$|a_n-0|=0<\varepsilon$ 恒成立.

当 n 是奇数时，

$$|a_n-0|=\left|\frac{2}{n+1}-0\right|=\frac{2}{n+1}.$$

要使

$$|a_n-0|=\frac{2}{n+1}<\varepsilon,$$

只须

$$n>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$. 那么由上面的推导过程可以看出，当 $n>N$ 时，不论 n 是奇数还是偶数，$|a_n-0|<\varepsilon$ 恒成立. 因此，根据数列极限的定义得出，数列(3) 的极限是 0 .

从例 3 当 n 是偶数的情况的证明过程，可以得出:

任何常数数列的极限就是这个常数.

例如，数列 $-7, -7, -7, \cdots$ 的极限是 -7. 一般地，数列 $C, C, C, \cdots$ 的极限是 C，即 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$.

证明: 对于任意小的正数 ε，要使

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

只须

$$|q|^n<\varepsilon,$$

即只须

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon.$$

由于 $|q|<1$，所以 $\lg|q|<0$. 因此，上式成为

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}.$$

取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$. 那么由上面的推导过程可以看出，当 $n>N$ 时，$|q^n-0|<\varepsilon$ 恒成立. 因此，根据数列极限的定义得出，当 $|q|<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

由例 4 可以看出，1.1节中提到的数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$