高等数学

（工本/上）

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

主编/郭洪芝　王升瑞

（公共课程）

M F E B

TARGET 目标自考系列

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

高 等 数 学

（工本/上册）

主　编　郭洪芝　王升瑞
副主编　戴一明　胡　克

东方出版社

责任编辑：任　方
封面设计：田　健
责任校对：龚会萍
组　　稿：李三三

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上
郭洪芝　等编
北京：东方出版社，2000.7
ISBN 7－5060－1375－4
Ⅰ.高…
Ⅱ.郭…
Ⅲ.高等数学
Ⅳ.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 64462 号

东方出版社出版发行
100706　北京朝阳门内大街 166 号
山东新华印刷厂印刷

开本：880×1230 毫米　1/32　印张：8　字数：220 千字
版次：2000 年 7 月第一版　2001 年 4 月第二次印刷
印数：15001－20000 册
定价：12.50 元

说　明

本书是全国高等教育自学考试《高等数学(工本)》的配套辅导用书。

编写依据：

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(工本)自学考试大纲》；

2. 指定教材《高等数学(工本)》(上册)(陆庆乐主编，西安交通大学出版社出版)。

本书特点：

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索，按指定教材分章辅导，每章均列有基本要求、重点和难点、例题与例题分析，同时将自学考试中每一章节可能出现的所有考核知识点按考试题型编写练习题和自测题，并配有参考答案。

本书在突出重点、难点，准确解答疑点的同时，兼顾学科的系统性，对于考生深入学习指定教材的内容，深刻领会考试大纲、教材的精髓，掌握重点、难点，正确解答各种题型，具有切实的指导意义。

本书由郭洪芝、王升瑞主编，编者均在高校长期从事本学科的研究工作与教学工作，并具有丰富的自学考试辅导经验。

一分耕耘，一分收获。祝有志于自学的朋友能在考试中取得优异成绩。

编　者

2000年7月

目　录

△ 注意、

? 问题

第一章　函　数

基本要求

1. 正确理解函数的定义，要弄清楚定义中的两个要素、定义域和对应法则；要能区分 $f(x)$ 与 $f(a)$，要会计算函数值(包括分段函数).

2. 要牢记基本初等函数的定义域，会求比较简单的函数的定义域.

3. 要弄清楚反函数的概念，以及它与原函数在表示式上、几何图形上的关系；要牢记反三角函数的主值范围.

4. 要弄清复合函数的概念，并能将几个函数正确地复合成一个函数，更为重要的是把一个函数分解成几个简单函数的复合.

5. 能判定一些比较简单函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性(如果函数存在这些性质).

6. 要熟悉基本初等函数的图形与形态.

重点与难点

重点：函数概念、初等函数.

难点：复合函数.

例题与例题分析

一、填空题

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 (-1, 1)

解 $(-1,1)$.

由$\frac{1-x}{1+x}>0$、$1-x^2\geqslant 0$、$x\neq -1$，得$-1<x<1$，即定义域为$(-1,1)$.

2. 设$f(x)=\begin{cases} x+1 & |x|<2 \\ 1 & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$，则$f(x+1)$的定义域为 $(-3,2]$

解 $(-3,2]$.

因为$f(x)$的定义域为$(-2,3]$，故$-2<x+1\leqslant 3$，即$-3<x\leqslant 2$，所以$f(x+1)$的定义域为$(-3,2]$.

3. 设$y=f(x-2)$的定义域为$[1,4)$，则$f(x)$的定义域为 $[-1,2)$

解 $[-1,2)$.

因为$f(x-2)$的定义域为$[1,4)$，故$-1\leqslant x-2<2$，即$f(x)$的定义域为$[-1,2)$.

4. 设$f(x+2)=x^2+1$，则$f(x-1)$ $x^2-6x+10$

解 $x^2-6x+10$.

因为$f(x+2)=(x+2-2)^2+1$，故$f(x-1)=(x-1-2)^2+1=(x-3)^2+1=x^2-6x+10$.

5. 如果$f(x)=\sin x$，则$f(-\sin\frac{\pi}{4})=$________.

解 $-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(-\sin\frac{\pi}{4})=\sin(-\sin\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$=-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. 函数$f(x)=\mathrm{tg}(4\pi x+3)$的最小正周期是________.

解 $\frac{1}{4}$.

因为$\mathrm{tg}(4\pi x+3+\pi)=\mathrm{tg}[4\pi(x+\frac{1}{4})+3]=\mathrm{tg}(4\pi x+3)$，故最小正周期是$\frac{1}{4}$.

设 $t=x+2$　　$x=t-2$

7. 如果 $\phi(x)=x+2$，且 $f[\phi(x)]=\dfrac{x-3}{x+1}(x\neq -1)$，则 $f(\dfrac{5}{2})$ $=$ ________.

$f(t)=\dfrac{t-2-5}{t-2+1}=\dfrac{t-5}{t-1}$

解　$-\dfrac{5}{3}$.

因为 $f(x+2)=f[\phi(x)]=\dfrac{x+2-5}{x+2-1}$,

$f(x)=\dfrac{t-5}{x-1}$

所以 $f(x)=\dfrac{x-5}{x-1}$,

故 $f(\dfrac{5}{2})=(\dfrac{5}{2}-5)\Big/(\dfrac{5}{2}-1)=-\dfrac{5}{3}$.

8. 函数 $y=\pi+\arcsin\dfrac{x}{2}$ 的反函数为________.

解　$y=2\sin(x-\pi)$，$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$.

因为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\pi+\arcsin\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}\pi$，由 $y=\pi+\arcsin\dfrac{x}{2}$，得 $x=2\sin(y-\pi)$，故所求反函数为 $y=2\sin(x-\pi)$，$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi]$.

9. 设 $f(x)=\ln x$，函数 $\phi(x)$ 的反函数 $\phi^{-1}(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$，则 $f[\phi(x)]=$ ________.

解　$\ln\dfrac{x+2}{x-2}$.

由 $y=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$，得 $x=\dfrac{y+2}{y-2}$，知 $\phi(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$，所以 $f[\phi(x)]=\ln\dfrac{x+2}{x-2}$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ -x^3 & x>0\end{cases}$ 的反函数是 $\phi(x)$，则 $\phi(4)=$ ________.

解　-2.

因为当 $x\leqslant 0$ 时，$y=x^2$，所以 $y\geqslant 0$，$x=-\sqrt{y}$，

又　因为当 $x>0$ 时，$y=-x^3$，所以 $y<0$，$x=-\sqrt[3]{y}$；

即 $\phi(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -\sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$，故 $\phi(4)=-\sqrt{4}=-2$.

二、单项选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant -2 \\ x+9 & -2<x<2 \\ 2^x & x\geqslant 2\end{cases}$，则下列各式中不成立的是(　　)

(A)$f(-2)=f(2)$　　(B)$f(1)=f(4)$

(C)$f(-1)=f(3)$　　(D)$f(0)=f(-3)$

解　选(B)

因为 $f(-3)=(-3)^2=9$、$f(-2)=(-2)^2=4$、$f(-1)=-1+9=8$、$f(0)=9$、$f(1)=10$、$f(2)=2^2=4$、$f(3)=2^3=8$、$f(4)=2^4=16$，显然 $f(1)\neq f(4)$。

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$，则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域为(　　)

(A)$[-3,0]$　　(B)$[-3,1]$

(C)$[-\frac{1}{2},1]$　　(D)$[-\frac{1}{2},0]$

解　选(D)

因为 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$，故有

$$\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2 \\ -1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}，即\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0 \\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

所以 $F(x)$ 的定义域为$[-\frac{1}{2},0]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0 \\ \lg x & x>0\end{cases}$，$\phi(x)=\begin{cases}2-\cos x & x\leqslant 0 \\ 1-\sqrt{x} & x>0\end{cases}$，则 $\phi[f(-1)]=$(　　)

(A)0　　(B)1

(C)$2-\cos 1$　　(D)$\ln(2-\cos 1)$

解　选(A)

因为 $f(-1)=1$、$\phi[f(-1)]=\phi(1)=1-\sqrt{1}=0$，故选(A).

4. 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a$ 是(　　)

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 奇偶性取决于 a 值

解　选(B)

因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a$

$=\ln\dfrac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}-\ln a=2\ln a-\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a$

$=-[\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a]=-f(x)$.

5. 使等式 $\arcsin(\sin x)=x$ 成立的所有 x 为(　　)

(A) $(-\infty,+\infty)$　　(B) $[-1,1]$

(C) $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$　　(D) $(-\pi,\pi)$

解　选(C)

因为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,令 $x=\arcsin y$,则 $y=\sin x$,于是得到 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$x=\arcsin y=\arcsin(\sin x).$$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　)

(A) 有界函数　　(B) 无界函数

(C) 上无界下有界　　(D) 上有界下无界

解　选(A)

因为 $(|x|-1)^2\geqslant 0$,即 $x^2+1\geqslant 2|x|$,$\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$. 所以 $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$,故 $f(x),(-\infty<x<+\infty)$ 是有界函数.

7. 函数 $y=\dfrac{1}{2}e^{1-x},(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　)

(A) 单调增函数　　(B) 单调减函数

(C) 非单调函数　　(D) 有界函数

解　选(B)

因为 $y=\dfrac{1}{2}e^{1-x}=\dfrac{e}{2}e^{-x}$,显然由图形可知为单调减函数.

8. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义,则对任意的 x、y,有

$f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(1)=2$,则 $f(2)=($　　$)$

(A) -2　　(B) -1　　(C) -4　　(D) 4

解　选(D)

由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

得 $f(1+1)=f(1)+f(1)=2+2=4$,即 $f(2)=4$.

9. 下列各对函数中,为相同函数的是(　　)

(A) $f_1(x)=x\sqrt{x-1}$,$f_2(x)=\sqrt{x^3-x^2}$

(B) $f_1(x)=\arcsin(\sin x)$,$f_2(x)=x$

(C) $f_1(x)=1-\cos 2x$,$f_2(x)=2\sin^2 x$

(D) $f_1(x)=\ln x^2$,$f_2(x)=2\ln x$.

解　选(C)

因(A)、(D)中两函数的定义域不同,(B)中两函数的对应规律不同,例如 $f_1(\frac{3}{2}\pi)=-\frac{\pi}{2}$、$f_2(\frac{3}{2}\pi)=\frac{3}{2}\pi$.

10. 设 $f(x)$、$\phi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且 $f(x)$ 为奇函数、$\phi(x)$ 为偶函数,则 $\phi[f(x)]$ 为(　　)

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 有界函数

解　选(B)

因为 $\phi[f(-x)]=\phi[-f(x)]=\phi[f(x)]$,故 $\phi[f(x)]$ 为偶函数.

11. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上是单调增函数,则 $f(-\pi)$ 与 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 的大小关系是(　　)

(A) $f(-\pi)<f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　(B) $f(-\pi)=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

(C) $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　(D) 不能确定

解　选(C)

因为 $f(x)$ 为偶函数且在 $[0,4]$ 上是单调增函数,故 $f(x)$ 在 $[-4,0]$ 上是单调减函数,又 $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-3}=-3>-\pi$,故 $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$.

12. 下列函数中为周期函数的是(　　)

(A) $y=\sin x^2$　　(B) $y=\arcsin 2x$

(C) $y = x|\sin x|$　(D) $y = \text{tg}(3x - 2)$

解　选(D)

因为 $\text{tg}[3(x + \frac{\pi}{3}) - 2] = \text{tg}(3x + \pi - 2)$

$$= \text{tg}[(3x - 2) + \pi] = \text{tg}(3x - 2),$$

故 $y = \text{tg}(3x - 2)$ 是以 $\frac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数.

13. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数，且 $f(-1) = -1$，则 $f(7) = (\quad)$

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

解　选(A)

因为 $f(7) = f(1 + 2 \times 3) = f(1) = -f(-1) = 1$.

14. 下列函数中为基本初等函数的是(　　)

(A) $y = 2x + \text{tg}x$　(B) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(C) $y = 1 + |x|$　(D) $y = \ln(1 + x^2)$

解　选(B)

由定义可得.

三、计算与证明题

1. 求下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{1 - |x - 1|}$　(2) $y = \sqrt{16 - x^2} + \ln\sin x$

解　(1) 由 $\begin{cases} 4x - x^2 \geqslant 0 \\ 1 - |x - 1| \neq 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2 \end{cases}$，所以函数的定义域为 $(0,2) \cup (2,4]$.

(2) 由 $\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2k\pi < x < (2k + 1)\pi \end{cases}$，其中 k 取整数.

借助于数轴，解此不等式组，得函数的定义域为 $[-4, -\pi) \cup (0,\pi)$.

2. 设函数 $y = f(3x - 2)$ 的定义域是 $[1,4]$，求函数 $y = f(3x + 1)$ 的定义域.

解　由 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 得　$1 \leqslant 3x - 2 \leqslant 10$，故函数 $f(x)$ 的定义

域是[1,10],由 $1 \leqslant 3x+1 \leqslant 10$ 解得 $0 \leqslant x \leqslant 3$,故函数 $y=f(3x+1)$ 的定义域为[0,3].

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x| \leqslant 1 \\ 1 & 1<|x| \leqslant 2 \end{cases}$,

且 $g(x)=f(x^2)+f(x-1)$,求 $g(x)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为[-2,2],所以

$$\begin{cases} 0 \leqslant x^2 \leqslant 2 \\ -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $[-1,\sqrt{2}]$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -1 & |x|>1 \end{cases}$,$g(x)=\ln x$,求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(\ln x)=\begin{cases} 1 & |\ln x|<1 \\ 0 & |\ln x|=1 \\ -1 & |\ln x|>1 \end{cases}$

即 $$f[g(x)]=\begin{cases} 1 & \frac{1}{e}<x<e \\ 0 & x=\frac{1}{e},e \\ -1 & 0<x<\frac{1}{e},e<x<+\infty \end{cases}$$

5. 设 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}+1$,求 $f(x)$.

解 $$f(1+\frac{1}{x})=(\frac{1}{x^2}-1)+2=(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)+2$$
$$=(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x}-2)+2$$
$$=(1+\frac{1}{x})^2-2(1+\frac{1}{x})+2,$$

故 $f(x)=x^2-2x+2$.

6. 设 $f(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}x+\sin 2x$,其中 $0<x<\frac{\pi}{2}$,求 $f(\mathrm{ctg}x)$.

解 令 $\mathrm{tg}x=t$.

由 $f(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}x+2\sin x\cos x$ 及图 1.1 得:

$$f(t)=t+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$=t+\frac{2t}{1+t^2}.$$

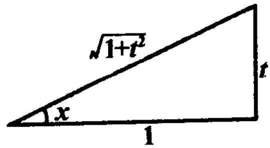

图 1.1

因此 $$f(\mathrm{ctg}x)=\mathrm{ctg}x+\frac{2\mathrm{ctg}x}{1+\mathrm{ctg}^2x}$$
$$=\mathrm{ctg}x+2\mathrm{ctg}x\sin^2x$$
$$=\mathrm{ctg}x+\sin 2x.$$

7. 设单值函数 $f(x)$ 满足关系式 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$,$(0<x\leqslant \mathrm{e})$ 且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 令 $\ln x=t$ 则 $x=\mathrm{e}^t$,故由原式得

$$f^2(t)-2\mathrm{e}^tf(t)+t\mathrm{e}^{2t}=0;$$
$$f(t)=\frac{2\mathrm{e}^t\pm\sqrt{4\mathrm{e}^{2t}-4t\mathrm{e}^{2t}}}{2}=\mathrm{e}^t(1\pm\sqrt{1-t}).$$

由 $f(0)=0$,得 $f(t)=\mathrm{e}^t(1-\sqrt{1-t})$,

故 $f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x})$.

8. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

(2) $f(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

(3) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & 0<x<+\infty\\ x^2-1 & -\infty<x<0\end{cases}$

(4) $f(x)=(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

解 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=\ln(\sqrt{1+(-x)^2}+x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$$
$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=(-x)\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=(-x)\frac{1-2^x}{1+2^x}$$
$$=x\frac{2^x-1}{2^x+1}=f(x),$$

故　$f(x)$ 为偶函数.

(3) 解法 1

任取 $x>0$,则 $-x<0$,于是

$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=-(-x^2+1)=-f(x)$.

再任取 $x<0$,则 $-x>0$,于是

$f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=-(x^2-1)=-f(x)$.

故对任意的 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,都有 $f(-x)=f(x)$. 因此,$f(x)$ 为奇函数.

解法 2

将 $f(x)$ 变形,$f(x)=|x|(-x+\frac{1}{x})$,$(x\neq 0)$.

于是　$f(-x)=|-x|(-(-x)+\frac{1}{-x})$

$$=-|x|(-x+\frac{1}{x})=-f(x),$$

所以　$f(x)$ 为奇函数.

(4) 因函数的定义域为 $(-1,1]$,由于此区间关于原点不对称,所以此函数为非奇非偶函数.

9. 求下列函数的反函数

(1) $y=1-\sqrt{1-x^2}$,　$(-1\leqslant x\leqslant 0)$

(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,　$(x\geqslant 1)$

(3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$

解　由　$-1\leqslant x\leqslant 0$　得　$0\leqslant x^2\leqslant 1$,于是

$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$,因此 $0\leqslant y\leqslant 1$.

由　$y=1-\sqrt{1-x^2}$ 解得 $x=-\sqrt{2y-y^2}$,

所以所求函数的反函数为:

$y=-\sqrt{2x-x^2}$,　$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 由已知 $x+\sqrt{x^2-1}=e^y$,

所以　$e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=x-\sqrt{x^2-1}$,

故　$x=\dfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})$.

因为 $x \geqslant 1$，有 $x^2-1 \geqslant 0$，于是 $x+\sqrt{x^2-1} \geqslant 1$，有 $y \geqslant 0$. 因此所求函数的反函数为：

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad x \geqslant 0.$$

(3) 令 $t=\sqrt{1+4x}$， 则 $y=\frac{1-t}{1+t}$. 所以 $t=\frac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$，故 $x=\frac{1}{4}[(\frac{1-y}{1+y})^2-1]=-\frac{y}{(1+y)^2}$. 由于 $t \geqslant 0$，故 $y \leqslant 1$. 因此所求函数的反函数为：

$$y=-\frac{x}{(1+x)^2}, \quad x \leqslant 1.$$

10. 设 $f(x)$ 满足方程，$2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$，试证明 $f(-x)=f(x)$.

证　令 $x=\frac{1}{t}$ 得　$2f(\frac{1}{t})+f(t)=t$，即

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=x.$$

于是得方程组：

$$\begin{cases} 2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x} \\ f(x)+2f(\frac{1}{x})=x \end{cases},$$

解此方程组得 $f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$.

所以 $f(-x)=\frac{2-(-x)^2}{3(-x)}=-\frac{2-x^2}{3x}=-f(x)$.

练 习 题 一

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是________.

2. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2a]$，则 $f(x+a)$ 的定义域为________.

3. 函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数是________.