

名师大讲堂

高中数学

刘勋 著

解题思路23讲

特级教师 教学经验完全总结
轻松解题 思维技巧精析精讲
经典训练 印证理论吃透方法

刘勋 数学特级教师，天津市育红中学副校长，天津师范大学硕士研究生导师。全国中学数学教育最高奖——“苏步青数学教育奖”获得者。天津市模范教师。天津市“十五”立功奖章获得者。天津市南开区首届十佳名师，首届十佳学科带头人，首届拔尖人才。《天津日报》评选的“最受欢迎的十佳名师”。

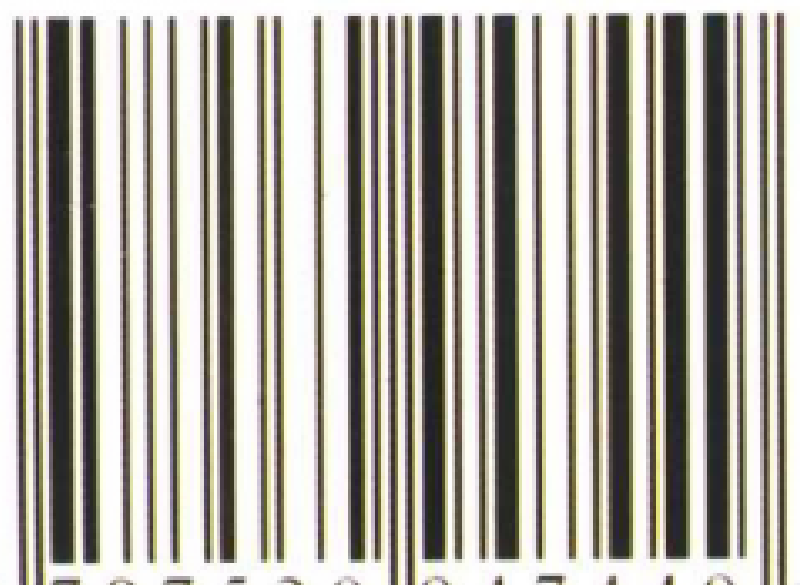
教育思想及治学名言曾入选《中国基础教育论文大典》，《全国中小学校长治学名言大典》，《人生智慧宝典》。主编及合著图书五十余册，专著《激趣导思教学法》被天津市教委向全市推广。发表论文二百余篇，学法指导和思维训练论文四十余篇。

曾任天津市人大代表，现任南开区政协委员，南开区教育局局长教学顾问，兼职督学。

ISBN7-5309-4744-3

G·3983 定价:13.00元

ISBN 7-5309-4744-3



9 787530 947449

选题策划·李勃洋
责任编辑·吕
装帧设计·张丽丽

名师大讲

高中数学

刘勋 著

解题思路 23 讲



天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题思路 23 讲/ 刘勋著. —天津: 天津教育出版社, 2006. 9

(名师大讲堂)

ISBN 7-5309-4744-3

I. 高... II. 刘... III. 数学课—高中—解题

IV. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 092557 号

高中数学解题思路 23 讲

出 版 人 肖占鹏

选题策划 李勃洋

作 者 刘 勋

责任编辑 吕 焱

装帧设计 张丽丽

出版发行 天津教育出版社

天津市和平区西康路 35 号

邮政编码: 300051

经 销 全国新华书店

印 刷 廊坊市科通印业有限公司

版 次 2006 年 9 月第 1 版

印 次 2006 年 9 月第 1 次印刷

规 格 32 开(890×1240 毫米)

字 数 200 千字

印 张 9.5

印 数 1-5000

书 号 ISBN 7-5309-4744-3 / G·3983

定 价 13.00 元

CONTENTS

打好数学功底	001
前言	003

绪论

第1讲 学习兴趣须品尝	006
第2讲 学会“数学地思考”	013
第3讲 学会“三思”	017

概念是思维的细胞

第4讲 数学概念与数学思维	026
第5讲 学习数学概念“十要”	029

系统思考与整体把握知识

第6讲 函数	045
第7讲 三角函数——最有规律的函数	063
第8讲 数列——发现、运用整标函数的规律	074
第9讲 解析几何研究什么?	089
第10讲 概率与统计——模式识别与理论思维	109
第11讲 用整体法解数学题	119
第12讲 怎样解数学选择题	126
第13讲 导数——研究现代数学的基础工具	136

方法、策略靠思维把握

第14讲	数学方法、策略简介	145
第15讲	解题的十大策略举例	147
第16讲	数学基本方法	163

学会思维操作

第17讲	思维操作方法简介	228
第18讲	归纳利于发现	233
第19讲	联想利于举一反三	241
第20讲	多做类比、化难为易	249
第21讲	探索利于思维创新	257
第22讲	四大数学思想方法选讲	270
第23讲	提高高考数学复习效率的几点思考	298

打好数学功底

孟庆松

我们常说,做任何事情都要具备一定的“功底”。数学的功底是什么?体现在哪儿?怎么才能培养出一个人的数学功底?我认为,数学功底应该是数学的思维方法,培养数学功底就是培养数学的思维方法!数学功底集中体现在理性思维和逻辑能力上,这两样东西能够告诉我们什么事情该做,什么事情不该做,该做的事情应采用什么的次序和方法来做。

打好数学功底,对于青少年的素质培养和终身发展,意义非凡,其意义有点像体育项目中的体能训练,往往是体力充沛的队伍才有可能赢得比赛的胜利。尤其在计算机改变了人类生活方式、思考方式和研究方式的今天,人们的计算能力、搜集和分析海量数据的能力、获取信息的能力极大提高,数学思维方法的潜在魅力越来越明显地展现在包括信息科学、经济学等学科在内的所有自然和人文科学领域,展现在人们的日常生活里,帮助普通人和科学家一样能够进行更深刻、更有价值的思考。

大家都知道,无论在中国还是外国,真正从事数学研究工作的人并不太多,但数学却是人人都要学的,其目的就是要通过学习数学,使人们初步学会运用数学的思维方式来观察、分析现实社会,去解决日常生活和一切科学的问题。譬如执简御繁,譬如化整为零,譬如从易至难,譬如证伪存真……科学的思维方法对处理工作、生活中的任何问题都有用。《数学新课程标准》提出“人人学有价值的数学,人人都能获得必需的数学,不同的人在教学上得到不同的发展”的理念,就是这个意思。

先进的教育理念只有化成教师的教育行为才能得以真正奏效。特级教师刘勋老师立足四十年教育实践,锤炼总结出高中数学思维方法指导书《高中数学解题思路 23 讲》一书,顺应了新课程

改革的要求。该书紧紧抓住培养学生数学思维能力这个学习知识的核心,用系统思考的眼光,依靠数学强大的逻辑力量,通俗易懂地把数学思维方法变成学生可以学习并容易接受的规律。刘老师不论选什么数学素材,都不忘赋予这些素材以鲜活的思想,着眼学生的发展,力求把抽象、深奥的数学通俗化、形象化、趣味化、条理化,充分考虑学生的“兴趣、乐趣、情趣、志趣”,引导学生学会“数学地思考”。

我之所以推崇这本凝聚刘先生心血的书,是因为它不是一般意义上的教辅读物,而是站在方法论的角度对初等数学内容进行深层次的思考与整理。什么是高观点下的初等数学?读者从中会有所感悟。

“数学地思考”是一种境界,仰之弥高,钻之弥深。教诲自在其中,道理自在其中,思想自在其中,悟性自在其中。由此立下根基,则无书不可读,无理不可通,成长便在其中。对于阅读此书的青少年学生,大多数人很可能在以后的工作和生活中,不会直接用到书中的一些公式、定理,以至于渐渐淡忘掉很多具体的数学知识,但我相信年轻的读者若能真正领会书中的数学思维方法,一定能受益终生!

(孟庆松博士现任天津市教委副主任)

前言

003

前言

数学,高度抽象概括了现实世界的“空间形式和数量关系”;数学,是一个优美壮观的符号世界;数学,它的内容、意义、方法和符号都有鲜明的层次性、结构性、系统性和严密的逻辑相关性;数学,靠它强大的逻辑力量和完美独特的思维方式,给人类无穷的智慧和力量,给青少年带来一个“科学的头脑”,给这个世界带来了“数学美”的无限风光;数学,作为“刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具”,站在了现代科学技术的“皇冠”上,数学素养成为高素质的现代人的基本素养。近年来,国际上呼声响亮的一句话是:“数学和科学教育将决定国家未来竞争力。”

我国著名的数学家徐利治教授在强调发散思维在数学创造思维中的重要作用时指出:“数学的新思想、新概念和新方法往往来源于发散思维”。他总结概括的创造能力公式也很耐人寻味:

创造能力 = 有效知识量 × 发散思维能力 × 抽象分析能力 × 审美能力

请注意乘号!不是累加,而是彼此息息相关的四个要素相乘。

学数学必须提高思维训练的自觉性,减少盲目性;必须遵循科学的思维规律,真切体会,做到“有章可循,有法可依”。本书将告诉你怎样“学会思维操作”;又怎样能不拘一格、灵活变通,“学会辩证思维”。进入“海阔凭鱼跃,天高任鸟飞”的思维境界的人,必将成为创新人才。

数学是思维的科学,创造性思维能力是人的诸能力的核心。中学数学思维有四大特点:

1. 重视推理的逻辑结构;
2. 力求思路简明;
3. 精确地分解论证过程;
4. 数学符号精密、准确。

大处着眼,学习好高中数学要抓住“四个三”:

1. 从内容上,要充分领悟“理论、方法、思维”六个字;
2. 从解题上,要抓住“数、式、形”三个字;
3. 从阅读和审题上,要实现数学三种语言(文字语言,符号语言,图形语言)的自如转化;
4. 从综合把握和理性思考上要紧紧抓住三条线:

知识是明线。(一定要系统、完整、简明,要善于“合并同类项”,要学会“抠概念”。)

方法、能力是隐线。(一定要细心挖掘,反复领悟。要记住两句名言:“关于方法的知识是最重要的知识”(达尔文);“与其给人以死板的知识,不如给人以生动、活泼的方法,以及‘点石成金’的策略、手段”。(波利亚))

思维训练是主线。(下苦功,以知识为载体,锤炼自己的思维,掌握科学的思维方法,自觉运用四大数学思想方法:函数与方程的思想,数形结合的思想,分类讨论的思想,化归或转化的思想。学会三思:有思想、懂思维、善思考。)

本书的编写力求站在认识论、方法论、教育心理学的高度,首先关注的是学生的“兴趣、乐趣、情趣、志趣”,是怎样培育学生学习的主动精神和智慧能力,努力把作者对初等数学学习的哲学思考,变得“深入浅出”和“不拘一格”,使学生易于领悟和操作;力求既能帮助学生跳出“无边题海”,又能引导学生善于选择、判断、乐于到题海中驰骋遨游;力求既大处着眼,又细心总结那些有教育价值的细节问题,以促进学生挖掘自身潜能,帮助学生学会用自己的脑袋学习。

阅读本书,每一讲都有相对独立性,某些知识没学或题不会解,完全可以“跳跃”,只要细心品味,注意“结构产生功能,思维决定深度”,你就会有所悟。学生一定要走出学数学就是多做题的误区,一定要静心细读本书的文字,它会激发你学数学的兴趣,从中享受到乐趣,促进认识升华。人们往往过分关注学习的结果——分数,岂不知,学生独立思考,主动探究的过程最精彩,那里蕴含着丰富的使学生终身受益的真才实学,那样的学习最能使插上创新的翅膀。

本书试图选用具有综合性、主动性、实践性和探究性的数学素材,努力从育人价值和学科功能的视角,让素材充满思想,让思想焕发智慧,让智慧闪现火花,让火花促进思维在碰撞中升值。学生通过学习体验、感悟,不仅掌握知识,更要掌握驾驭知识的数学思维方法,从思维的深度和广度上开阔眼界,不断改进学习方式,构建个性鲜活,适合自己的,具有系统性、条理性、易操作的网络结构体系,从而在学习的道路上由“有师则通”逐步走向“无师自通”的理想境界。总之,作者期盼能给学生一些“终身受益”的财富,让数学强大的逻辑力量和独特、精妙的思维方式步入学生的心田,帮助他们从心灵深处培育出一个强大的自我。作者深信,有思想、懂思维、会思考、善于广泛吸纳前人智慧的学生,有望成为高素质的现代人。

本书虽经多年积累和修改,但仍有疏漏不足之处,恳望指正。

作者书于 2006 年 5 月 1 日

绪 论

第 1 讲 学习乐趣须品尝

006

高中数学解题思路 23 讲

当前,缺乏学习兴趣,甚至“厌学”,是一些学生的通病,这是全面实施素质教育急需解决的大问题.科学技术的飞速发展对人们提出了“终身学习”的要求,也就是说人这一辈子都要不断地学习,而一个对学习毫无兴趣的人可想而知是不可能适应现代社会要求的.

爱因斯坦曾说,“兴趣是学习的最好老师.”很多成功人士总结成功经验时都把兴趣摆在重要地位.前不久在我国召开的国际数学大会,数学大师们提出的最动人、诱人的口号是“享受数学快乐”.生动、活泼的国际数学大会把深奥抽象的数学思想、理念、观点、方法,深入浅出地精彩展现,其巨大的科学震撼力,数学美的无穷魅力,令人神往,让多少青少年如醉如痴!兴奋之余,冷静思考,每位教育工作者,每位家长,都应当十分关心学生的“兴趣、乐趣、情趣、志趣”,每个想学习好的学生,也应该以这四趣为标尺,检验一下自己是否有一个积极向上的学习心理,衡量一下自己算不算一个“好学生”.

培养学习兴趣的方法途径很多,在学习上主动参与,大胆实践,敢于置疑,多打问号,你会越学越有兴趣;改变思维方式,变换学习模式,减少模仿式、识记式的学习方式,多采用探究式、研讨式、讨论式的学习方式,在互动中学习,你会越钻越深,这样的学习真有所得,真有所悟,其乐无穷.

在学习中,自我品尝学习乐趣十分重要.有的同学只感受到了学习中的苦,没有体验到乐趣,久而久之,熄灭了学习的强烈愿望之火,这是很危险的.必须指出:学习是艰苦的劳动,没有吃苦耐劳的精神,没有持之以恒的毅力,很难取得好成绩.前人成果果实累累,科学技术日新月异,后人吸纳这些知识,肯定是负担越来越重.

从这种意义上说,想在学习上追求“轻负担”的学生,很容易走向脱离实际的幻想,以此作为逃避艰苦学习的借口.

学习是动心智的活动,一个努力追求头脑科学化的人,在深挖自身潜能上肯下工夫,善于吸收别人学习方法之所长,不断总结自己学习上的经验教训,使自己建立起“高效低耗”的学习机制,就会在学习中找到乐趣.学的东西再难,他也不会感到是“负担”,而是知难而进,乐而忘返;充分体验到学习中的酸甜苦辣,尽情享受艰苦劳动的成功的果实,吸取暂时失败中的教训,从而眼界更开阔,思路更敏捷,像“海纳百川”一样,学得越多,越驾轻就熟.从这种意义上说,学习上“轻负担”是可能的,可行的,也是必须追求的.比如学习数学,当一个学生能被数学强大的逻辑力量所吸引,产生强烈的思维碰撞与共鸣,当你学会了欣赏数学美,进而去努力挖掘数学美,你就真正的进入了美妙的数学王国,这才叫学习!现举几例,与同学们一起细心品尝学数学的乐趣.

例 1

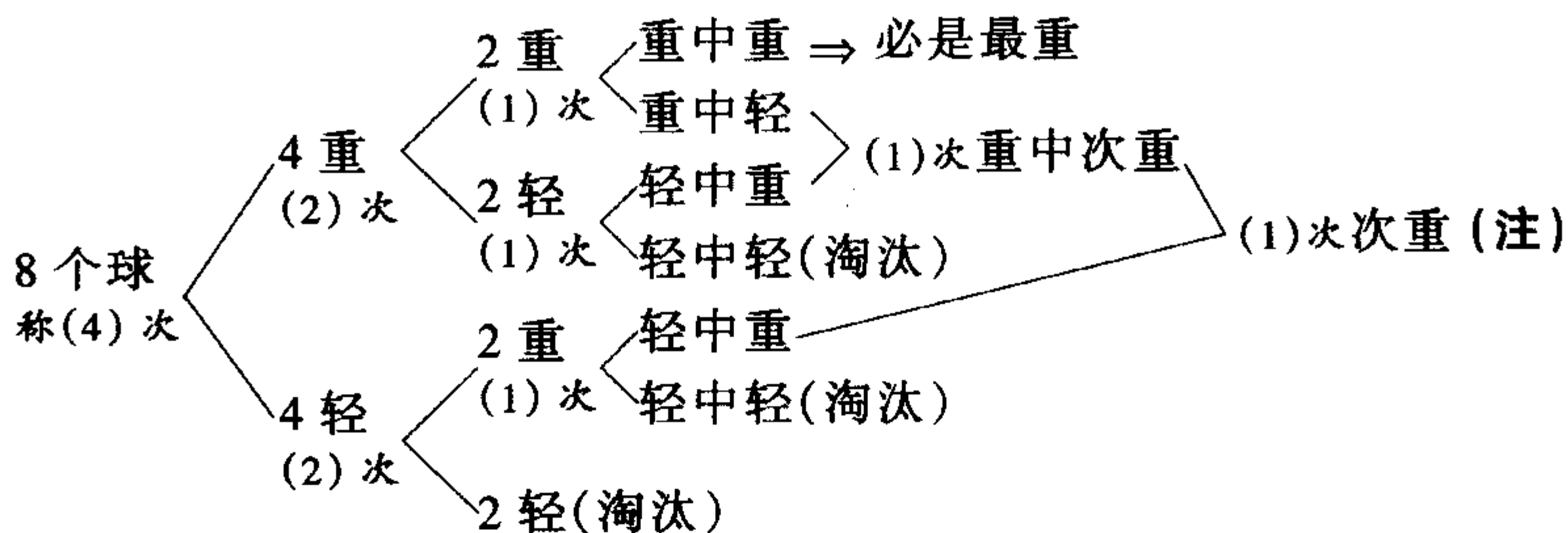
一个老太太挎一筐生鸡蛋去卖.第一人买走半筐另半个生鸡蛋,第二人买走筐中剩下的一半另半个生鸡蛋,……照此法则买下去,第七个人买完之后,筐中没有鸡蛋了.问老太太的筐中共有多少生鸡蛋.

分析 有的学生见题即生疑,半个生鸡蛋怎么切?(除了小李飞刀,无人能切.切了也无人肯买!)数学思考:原来这个包袱告诉我们,鸡蛋总数是单数(奇数),买走偶数还剩下奇数.正面顺序思考,百思不得其解.“倒过来思考”,问题太简单了!第七个人买时,筐中仅一个生鸡蛋(视为 a_1);第六个人买时筐中有 3 个鸡蛋买走 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ 剩一个,…….原来,满足一个递推关系, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (认识飞跃!).简单归纳,1,3,7,15,31,63,127,即 $a_7 = 127$. (处理递推关系找通项也很容易.)

例 2

有 8 个大小、颜色都相同,但质量不同的球,用托盘天平去称(无砝码),称出最重和次重的球,须称多少次?

分析 1: 让我先构造一种较简单的称法, 如“两两称”, 把重的、轻的各放一堆, 再分别两两称, “重中重者”必是最重; 但次重可能是“重中次重”, 也可能是“轻中最重”. 简图如下:



(注)如果最重与次重球在第一次称时相遇, 次重球就可能进入 4 轻一组中.

总次数: $(4) + (2) + (2) + (1) + (1) + (1) + (1) + (1) = 13$

提炼: 8 个球称出最重须 7 次(最简单称法, 轻的拿下, 再放一球, 仍是轻的拿下), 同理: 7 个球称出最重一个须 6 次, 故 $7 + 6 = 13$.

想一想: 提炼后的思路多简单, 而上边的思路多复杂! 但若无上边的周密、严谨的思考, 下边的提炼你能放心吗?

分析 2: 称球的次数还能减少吗? 称出次重需要几次? 回答: 办法是有的, 比如给球按 1~8 编号, 再用上面的称法, 加一点“分析和判断”, 9 次即可. 为好记, 可按 (1、2), (3、4), (5、6), (7、8) 分组; 不妨设 1、3、5、7 是重的一组, 再按 (1、3), (5、7) 分组, 比如最终 1 最重, 7 是“重组中的次重”, 则必排除 3, 4, 5, 6, 8. 7 和 2 再称一次得“次重”, 则 $4 + 4 + 1 = 9$ (次).

有一种情况, 称 7 次就出来了最重和次重的球. 称法是两球称重, 轻者下, 重者保留, 最后上的球比前边的球重, 则此二球就是最重和次重的球. 注意: 这种称法 7 次完成是偶然的巧合, 不是必然的, 从逻辑上要分清可能性和必然性.

像这样的习题, 小学生也可以解答, 然而深究起来却又挺深奥, 你不觉得很有趣吗? 学会分析、讨论、判断、取舍, 学会自己去

建构,去想办法,学习过程就会充满乐趣.

例 3 把 1600 颗花生分给 100 只猴子,求证至少有 4 只猴子分得的花生一样多.(1962 年全国高中竞赛题)

简解:若能想到用反证法,简单计算验证即得证.

假想至多有 3 只猴子分得花生一样多.

那么, $\because 100 \div 3 = 33 \cdots 1$, 考虑最少给 0 个花生, 则 $S_{100} = 3(0 + 1 + 2 + \cdots + 32) + 33 = 1617 > 1600$, 矛盾!

$\therefore$ 至少有 4 个猴子分得的花生一样多.(如 4 个猴子都分 0 个花生,省下 33 颗花生.)

例 4 试证:任一条与双曲线有两个交点的直线被双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及它的两条渐近线所截的两段等长.

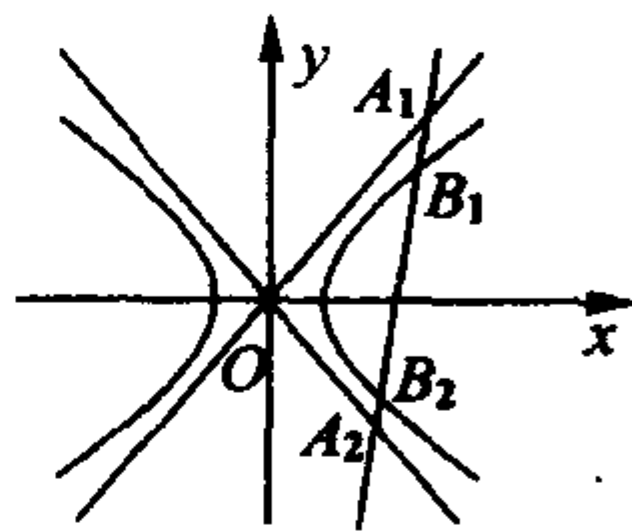
(如图即证 $|A_1 B_1| = |A_2 B_2|$)

分析与思考 1:好做! 找交点即解方程组,再求两点间距离. 转念一想,太繁,运算量太大!

分析与思考 2:若能证线段 $A_1 A_2$ 和 $B_1 B_2$ 的中点是同一点,则等量减等量差相等.妙!

分析与思考 3: $B_1 B_2$ 的中点用韦达定理及中点坐标公式易得,找 $A_1 A_2$ 的中点(尽管解两条直线的交点容易多了),有简单办法吗?

分析与思考 4:双曲线的渐近线是“退化二次曲线”,其方程可写为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ 双曲线与其渐近线可以用一个方程表达. $\Rightarrow$ 求简化,用参数帮忙!



分析与思考 5:什么情况说明两条线段同中点?

$\Rightarrow$ 中点坐标与前设的参数无关.妙!

解:设与双曲线有两个交点的直线 $l: y = kx + t$.

$$\begin{cases} b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 m \cdots \cdots ① & (m = 0, 1) \\ y = kx + t \cdots \cdots ② \end{cases}$$

②代入①整理得: $(b^2 - a^2 k^2)x^2 - 2a^2 ktx - a^2 b^2 m - a^2 t^2 = 0$.

由韦达定理, 中点坐标公式:

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 kt}{b^2 - a^2 k^2} \text{ 与 } m \text{ 无关,}$$

$\therefore$ 线段 $A_1 A_2$ 和 $B_1 B_2$ 同中点即 $|A_1 B_1| = |A_2 B_2|$.

反思: 这么繁琐的计算题, 可以变得如此简单, 这才是数学, 这样做题才叫“数学地思考”.

这里, 数形结合的思想、等价转化的思想、参数思想等运用得淋漓尽致. 原来看不见, 摸不着的思维也可以“操作”呀!

你还可以思考, k, t 也是参数, 在本题中为什么仅是个无关变量, 而参数 m 那么重要?

例 5

长方体的长、宽、高分别是 1900 m, 1991 m, 1992 m, 把它剖分为 $1990 \times 1991 \times 1992$ 个棱长为 1 m 的正方体, 每个正方体看作一个房间, 两个房间如果有一个公共面, 则称它们是相邻的, 在其中一个房间里住着一只小鸟, 当管理员打开相邻的一个房间后, 小鸟就飞入新的房间. 这只小鸟有记忆能力, 总不飞入它曾经住过的房间. 现有甲、乙两个孩子, 轮番打开与小鸟居住的房间相邻的房间, 让小鸟搬家, 每人每次只允许打开一个新的房间让小鸟飞入, 设甲先打开第一个房间. 规定胜负的标准是: 谁不能让小鸟搬家, 谁就失败. 问: 甲、乙二人谁有必胜的策略? 这个人应当怎么办才能保证自己胜利? 如果长方体长、宽、高分别是 1991 m, 1992 m, 1993 m, 情况又怎样? 如果长方体长、宽、高分别是 1989 m, 1991 m, 1993 m, 情况又怎样?

(第三届希望杯高一第二试压轴题)

解: 首先应当指出, 棱长为整数的长方体, 只要有一条棱长是偶数, 该长方体就可以完全分割为由两个相邻的小正方体连在一起的 $1 \times 1 \times 2$ 的小块(完全分割

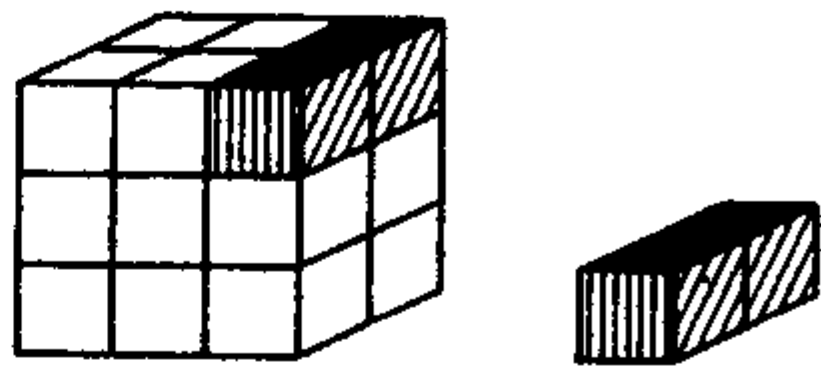


图 1

的意思是说用 $1 \times 1 \times 2$ 的小块可以不重迭,不留洞地拼合成原来的长方体)(见图 1).

因为 $1990 \times 1991 \times 1992$ 的棱长中含有偶数,所以该长方体可以实现被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块的完全分割.设小鸟最初在某个 $1 \times 1 \times 2$ 的小块中的一个小正方体房间内,甲只要打开同一个 $1 \times 1 \times 2$ 的小块的另一个房间,让小鸟飞入,则乙只能去寻找一个新的小块中的一个房间,只要乙找到了可以让小鸟搬家的房间,甲就打开与乙刚找到的房间处在同一个 $1 \times 1 \times 2$ 的小块上的另一个房间.以后,乙只能再找新的小块,……,只要乙能让小鸟搬家,则甲一定能让小鸟搬家.由于房间数目有限,所以甲最终获胜.

同理,长方体是 $1991 \times 1992 \times 1993$ 时,甲也有必胜策略.

如果长方体是 $1989 \times 1991 \times 1993$ 的情形,先对长方体被剖分的小正方体间隔二染色(如图 2 所示).并指出,图 2 中有色的小正方体数目比无色的小正方体数目多 1.容易看出,去掉任何一个有色小正方体后,剩下的小正方体有 $1989 \times 1991 \times 1993 - 1$ 个,它们可实现被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块的完全分割.这只要分两种情况来看,如果去掉了跨棱的一个染色的小正方体(例如图 2 中的 A),则箭头所指的那一串自然可被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块完全分割.除去这一串外,其余的长方体是由至少一条边长偶数的三个长方体拼成的,因此也可以被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块完全分割,如果去掉的那个有色小正方体不是跨棱的,例如图 2 中的 B ,只要把 B 的四周($PQRS$

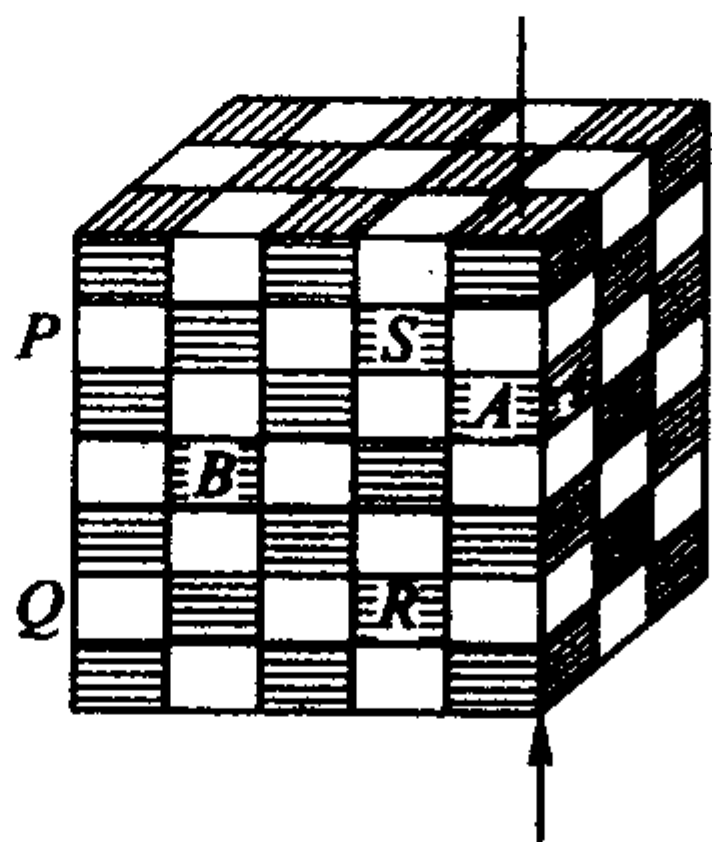


图 2

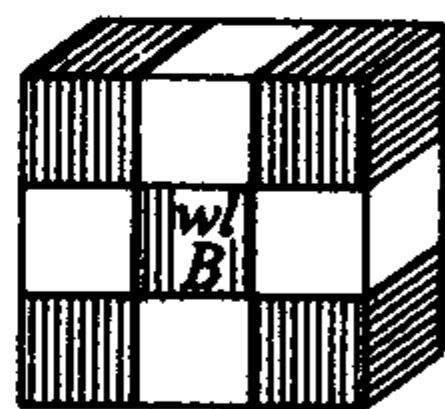


图 3

所围的小正方体)取出来(见图 3),除 B 外,图 3 的 8 个小正方体显然可被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块分割,原长方体除去图 3 的这块长方体后,又可看成几个至少有一条边长是偶数的长方体拼成的,这表明:去掉任一个有色小正方体后,其余的小正方体可被 $1 \times 1 \times 2$ 的小块完全分割,由此不难得出: