北京市高中数学补充教材

函数

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材

函　数

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材
HANSHU
函 数
北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路 105 号
邮　编　100037
电　话　68418523（总编室）　68982468（发行部）
网　址　www.cnup.cnu.cn
E-mail　cnup@mail.cnu.edu.cn
北京飞达印刷有限责任公司印刷
全国新华书店发行
版　次　2006 年 6 月第 1 版
印　次　2006 年 6 月第 1 次印刷
开　本　890mm×1240 mm　1/32
印　张　4.75
字　数　160 千
定　价　5.60 元

前　言

高中数学是义务教育后普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神.

为全面提高我市高中数学学科的教育质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用.

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订版）》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求. 教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用.

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦.《函数》一册的编者有：马成瑞、郝澎、丁益祥、康杰；统稿：郭立昌.

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学. 由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师和学生提出宝贵意见.

编　者

2003 年 3 月

目　　录

第一章　映射与函数

1.1　映射

在初中我们已经学过一些对应的例子．对应这个概念包含三个方面：集合 A、集合 B、A 中元素到 B 中元素的对应法则 f.

映射——一种特殊的对应．特殊在什么地方呢？请观察两个集合 A、B 的元素之间的一些对应关系的例子（图 1-1），并归纳这些对应有什么共同的特征．为简明起见，这里的 A、B 都是有限集合．

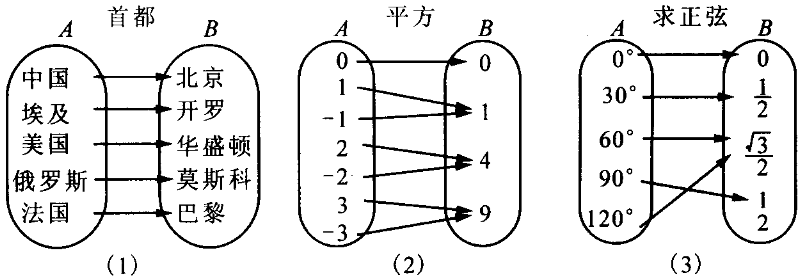


图 1-1

在图 1-1（1）中，对应法则是“首都”，即对集合 A 中的每一个国家（如埃及），集合 B 中都有唯一的城市（即开罗）和它对应；

在图 1-1（2）中，对应法则是“平方”，即对集合 A 中的每一个实数 m(如 $m=-2$)，集合 B 中都有唯一的实数 m^2（即 4）和它对应；

在图 1-1（3）中，对应法则是“求正弦”，即对集合 A 中的每一个角 θ（如$\angle\theta=60°$），集合 B 中都有唯一的正弦值 $\sin\theta\left(\text{即}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$和它对应．

总之，这 3 个对应的共同特点是：对于集合 A 中的任何一个元素，集合 B 中都有唯一的元素和它对应. “任一、唯一”是映射的特征.

一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，那么这样的对应（包括集合 A、B 以及从 A 到 B 的对应法则 f）叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A \to B$.

给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a \in A$，$b \in B$. 如果元素 a 和元素 b 对应，那么元素 b 叫做元素 a 的象，元素 a 叫做元素 b 的原象.

图 1-1（1）至（3）所示的 3 个对应，都是集合 A 到集合 B 的映射，这 3 个映射中，图 1-1（1）所示的映射更特殊，这个映射有两个特点：

（1）对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象；

（2）集合 B 中的每一个元素都是集合 A 的某个元素的象. 也就是说，集合 B 中的每一个元素都有原象.

这就是一一映射——一种特殊的映射.

一般地，设 A、B 是两个集合，f：$A \to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射. 如果在这个映射下，对于集合 A 中的不同元素在集合 B 中有不同的象，而且集合 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

例 1 判断下列对应中，哪些对应是集合 A 到集合 B 的映射？哪些对应是集合 A 到集合 B 上的一一映射？

（1）$A=\{0,1,4,9\}$，$B=\{-1,0,1,-2,2,-3,3\}$，对应法则 f：开平方.

（2）$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{N}^*$，对应法则 f：求绝对值.

（3）$A=$｛平面 α 内的三角形｝，$B=$｛平面 α 内的圆｝，对应法则 f：三角形对应该三角形的外接圆.

（4）$A=\{6,13,20,27\}$，$B=\{3,2,1,0\}$，对应法则：求被 6 除的余数.

分析： 如果是映射，可用定义“任一、唯一”说明；如果不是，

只需举一反例．判断一一映射，首先是映射，其次还要满足两个条件：原象不同则象不同；第二个集合（即 B）中每一个元素都有原象．

解：（1）不是映射．A 中元素 1 对应 B 中两个元素 1 和 -1，不符合“唯一”的要求．

（2）不是映射．A 中元素 0 的绝对值为 0，但 $0\notin \mathbf{N}^*$，即 $0\notin B$，不符合“任一”的要求．

（3）是映射，但不是一一映射．对于集合 A 中的任何一个三角形，在集合 B 中都有唯一的圆（该三角形的外接圆）和它对应，故这个对应是集合 A 到集合 B 的映射．但 A 中元素，比如 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$（其中 $\angle C=\angle D=90°$）在 B 中的象都是以 AB 为直径的圆，故这个映射不是一一映射．

（4）是一一映射．因为 6、13、20、27 被 6 除的余数分别为 0、1、2、3.

说明：一个映射，由原象集（常用 A 表示）、对应法则（常记作 f）、对应集（常用 B 表示）三部分组成．注意：

（1）在映射的对应里，集合 A 中的元素不能有“剩余”（任一），集合 B 中的元素可以有“剩余”，但不是必须有剩余．如果象的集合为 C，那么 $C\subseteq B$.

（2）在映射的对应里，集合 A 中的元素对应 B 中的元素“多对一”或“一对一”（唯一）均可以，但“一对多”绝不可以．

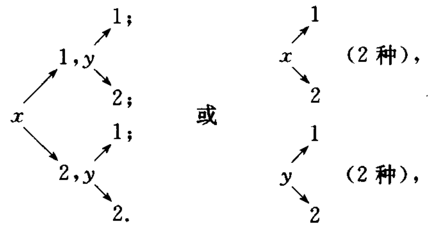
例 2 设集合 $A=\{x, y\}$，$B=\{1, 2\}$，则

（1）最多可以建立多少种集合 A 到 B 的映射？

（2）最多可以建立多少种集合 A 到 B 上的一一映射？

并试着把问题推广到一般情况．

分析：利用“树图”．



互不影响
共 2×2 种.

解：（1）最多可以建立 4 种 A 到 B 的映射，如图 1-2 甲、乙、丙、丁；

（2）最多可以建立 2 种 A 到 B 上的一一映射，如图 1-2 甲、乙.

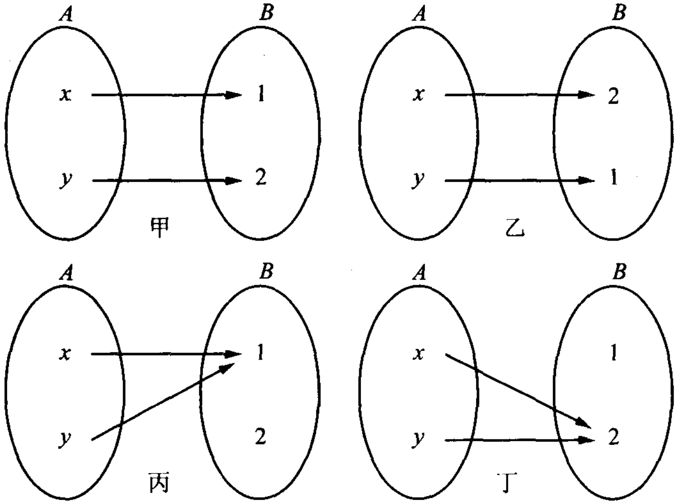


图 1-2

推广 1：变化条件：

设集合 $A=\{x, y, z\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$. 则

（1）最多可以建立多少种集合 A 到 B 的映射？

（2）最多可以建立多少种集合 A 到 B 上的一一映射？

答案：（1）$4^3=64$（种）；（2）0（种）.

推广 2：变化条件和结论.

设集合 $A=\{x, y, z\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$. 则

（1）从集合 B 到集合 A 的映射共有多少种？

*（2）从集合 B 到集合 A 的映射中，满足"集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中某个或某几个元素的象"的映射共有多少种？

答案：（1）$3^4=81$（种）；（2）$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot P_2^2=36$（种）.

说明：若集合 A 中的 m 个元素，集合 B 中有 n 个元素，则从 A 到 B 的映射共 n^m 种，从 B 到 A 的映射共 m^n 种.

解一道题后，超越它的范围，变化条件、变化结论或变化条件和结论，重新组织或转换，常常可以由此及彼，获得新的领悟. 本题的“推广 2”，尤其第（2）小问，要用到排列组合的知识，超过了现有的知识水平. 但这提醒我们还有不足，有兴趣的同学可以课外自学，也可以等待将来.

例 3 已知映射 f：$A\to B$，其中，$A=B=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$f$：$A$ 中的元素 (x,y) 对应 B 中的元素 $(2x-2y+1,4x+2y)$.

（1）求集合 A 中元素（1，2）的象.

（2）求集合 B 中元素（1，2）的原象.

（3）是否存在这样的元素（a，b），它的象仍是（a，b）？若存在，求出这个元素；若不存在，说明理由.

（4）判断这个映射是否为一一映射.

分析：从映射、象、原象、一一映射的定义入手.

解：（1）$\because$ $x=1$，$y=2$，

$\therefore$ $2x-2y+1=-1$，$4x+2y=8$. 即象为（-1，8）.

（2）$\because$ $\begin{cases}2x-2y+1=1,\\4x+2y=2,\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ 即原象为$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$.

（3）假设存在满足条件的元素（a，b），

则$\begin{cases}2a-2b+1=a,\\4a+2b=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{9},\\b=\dfrac{4}{9},\end{cases}$ 经检验适合.

故存在元素$\left(-\dfrac{1}{9},\ \dfrac{4}{9}\right)$，它的象仍是自己.

（4）对于任意 B 中的元素（m，n）（$m\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{R}$），

方程组$\begin{cases}2x-2y+1=m,\\4x+2y=n\end{cases}$有且仅有唯一一组解

$\begin{cases}x=\dfrac{1}{6}(m+n-1),\\y=\dfrac{1}{6}(-2m+n+2).\end{cases}$ 即在 A 中有唯一的原象.

故映射 f：$A \to B$ 是 A 到 B 上的一一映射.

说明：概念是思维的工具，对数学概念理解的程度，直接影响解决数学问题的效果. 本题涉及本节新学的所有概念，具有一定的综合性. 怎样判断映射 f：$A \to B$ 是否是 A 到 B 上的一一映射，本例第（4）小题的解法有典型性. 注意，“象的集合 $C=B$”是“该映射为一一映射”的必要不充分条件，反例如图 1-1（2）所示.

练习 1-1

1. 指出下列从集合 A 到集合 B 的对应，哪些是从集合 A 到集合 B 的映射？其中，哪些映射是一一映射？
   （1）$A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应法则是“取倒数”；
   （2）$A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{N}$，对应法则是“乘 2”；
   （3）$A=\{x \mid 0° \leqslant x \leqslant 180°\}$，$B=\{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$，对应法则是“求余弦”；
   （4）$A=\{$平面 α 内的圆$\}$，$B=\{$平面 α 内的四边形$\}$，对应法则是“圆对应该圆的内接四边形”.
2. 对于映射 f：$A \to B$，指出下列判断中，哪些是正确的？
   （1）A 中每个元素都有象；
   （2）B 中每个元素都有原象；
   （3）A 中某个元素的象可能不止一个；
   （4）B 中某个元素的原象可能不止一个.
3. 判断下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）？
   （1）p：f：$A \to B$ 是有限集 A 到有限集 B 上的一一映射；
   q：$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.（注：“card”表示集合元素的个数）
   （2）p：映射 f：$A \to B$ 不是 A 到 B 上的一一映射；
   q：在 B 中至少存在一个元素，它在 A 中有两个以上的原象.
   （3）p：A 到 B 的对应不是 A 到 B 的映射；
   q：B 中至少有一个元素没有被 A 中的元素对应.

(4) p：映射 f：$A \to B$ 中象的集合 $C \subsetneqq B$；

q：映射 f：$A \to B$ 不是 A 到 B 上的一一映射.

4. 已知映射 f：$A \to B$. 其中，集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对任意的 $a \in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$. 求集合 B.

5. 已知映射 f：$A \to B$. 其中，$A = B = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}，y \in \mathbf{R}\}$，$f$：$A$ 中的元素 (x, y) 对应 B 中的元素 $(x+y, xy)$.

   (1) 举例说明，B 中的元素不一定有原象，并求 B 中的元素 (a, b) 有原象的充要条件.

   (2) 举例说明，B 中的元素有原象时原象可能不唯一，并求 B 中的元素 (a, b) 有唯一原象的充要条件.

1.2 函数

我们在初中学过函数的概念叙述为：设在某变化过程中有两个变量 x 和 y. 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应，那么就把 y 叫做 x 的函数，x 叫做自变量.

学习了集合后，我们将自变量 x 取值的集合叫做函数的定义域，和自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

学习了映射后，我们发现函数实际上是一种特殊的映射 f：$A \to B$，特殊之处在于 A、B 都是非空数集. 因此，函数有如下定义，使这个概念更准确，应用范围更广泛.

如果 A、B 都是非空的数集，那么 A 到 B 的映射 f：$A \to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作

$$y = f(x),$$

其中 $x \in A$，$y \in B$. 原象的集合 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，象的集合 $C(C \subseteq B)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的值域. 函数符号 $y = f(x)$ 表示“y 是 x 的函数”，有时简记作函数 $f(x)$.

在研究函数时，函数除用 $f(x)$ 表示外，还常用 $g(x)$、$F(x)$、

$G(x)$ 等符号表示.

我们已经学过的几种函数是：

一次函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$，定义域 $\mathbf{R}$，值域 $\mathbf{R}$；

反比例函数 $f(x)=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，定义域 $\{x \mid x\neq 0,\ x\in\mathbf{R}\}$，值域 $\{y \mid y\neq 0,\ y\in\mathbf{R}\}$；

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，定义域 $\mathbf{R}$，值域当 $a>0$ 时为$\left\{y \mid y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$，当 $a<0$ 时为$\left\{y \mid y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$.

函数的表示方法，有解析法、列表法、图像法三种. 从用公式表示的才叫函数，扩充到现在用解析法、列表法、图像法等表示的都叫函数，经历了一段漫长的认识过程. “函数”一词，最早是德国数学家莱布尼兹在 1692 年采用，当时仅把幂 x、x^2、x^3 等叫做函数. 1718 年，瑞士数学家贝努利把函数定义为：“由某个变量及任意的一些常数结合而成的数量.”这里，已不再强调幂的形式，凡用公式表示的都叫做函数. 1775 年，瑞士数学家欧拉把函数定义为近似于初中我们所学的样子，不再强调函数要用公式表示. 对此，有人很不习惯，甚至把能用公式表示的函数叫“真函数”，把不能用公式表示的函数叫“假函数”. 1821 年，法国数学家柯西等进一步明确了欧拉的函数定义，并使用了“自变量”一词. 直到 19 世纪 70 年代，德国数学家康托尔提出集合论以后，函数才得以用集合映射进行定义，在更广泛的范围内应用.

解析法——把两个变量的函数关系，用一个等式来表示. 这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式. 例如，$A=\pi R^2$，$y=\sqrt{x-1}$ ($x\geqslant 1$) 等，都是用解析式表示的函数. 中学里研究的函数主要是用解析式表示的函数.

解析法的优点是函数关系清楚，容易从自变量求出其对应的函数值，便于用代数方法研究函数的性质. 不足之处是有的函数的解析式过于繁杂，或者根本没有解析式.

列表法——列出表格来表示两个变量的函数关系. 例如，数学用表中的平方根表、三角函数表等都是用列表法表示的函数.

列表法在日常生活中应用较多．例如，2002 年 2 月某公司曾对北京、上海、广州的上千位居民，就 22 项城市生活居住环境因素的满意程度进行了调查．据《北京青年报》公布的数据，我们可以得到如下三个用列表法表示的函数．

项目内容	编号 x	满意度得分（满分 5 分）		
		北京 $f(x)$	上海 $g(x)$	广州 $h(x)$
供暖供电	1	4.12	4.16	3.24
邻里关系	2	4.02	3.84	3.40
城市照明	3	3.96	3.90	3.20
子女教育	4	3.88	3.95	3.26
生活的方便性	5	3.73	3.85	3.27
建筑的美观性	6	3.72	4.05	3.26
旅游设施	7	3.68	3.51	3.23
城市规划	8	3.64	3.82	3.04
饮用水质量	9	3.63	3.43	2.75
城市绿化美化	10	3.62	3.76	3.25
住房状况	11	3.53	3.53	3.40
文化娱乐场所	12	3.44	3.47	3.23
交通状况	13	3.42	3.58	3.19
环境保护	14	3.38	3.51	3.21
市民文化素质	15	3.36	3.33	3.09
治安状况	16	3.34	3.74	2.70
城市卫生状况	17	3.31	3.37	3.16
服务行业质量	18	3.30	3.44	2.96
医疗卫生	19	3.30	3.58	2.84
小区绿化	20	3.22	3.30	3.04
小区配套设施	21	3.19	3.20	3.29
空气质量	22	2.93	3.29	2.77

列表法的优点是不必通过计算即知当自变量取某个值时函数的对应值，不足之处是自变量可取无限多个值时此法不能用．

图像法——用函数图像表示两个变量之间的关系．例如，气象台应用自动记录器，描绘温度随时间变化的曲线，就是用图像法表示的函数．

图像法的优点是能直观形象地表示出函数的变化情况，不足之处是由于作图、读数的限制，有时不能十分精确．

研究函数还常常用到区间的概念．设 a、b 是两个实数，而且 $a<b$，我们规定：

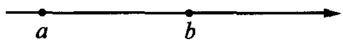
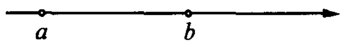
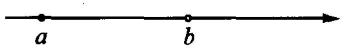
满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为 $[a, b]$；

满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为 (a, b)；

满足不等式 $a\leqslant x<b$、$a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合都叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a, b)$，$(a, b]$．

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点．

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，并且用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点（如下表）．

定　义	名　称	符　号	数轴表示
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭	$[a, b)$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭	$(a, b]$	

实数集 **R** 也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”．我们还可以把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$．

例 1　判断下列命题的真假：

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ 是函数；

(2) 如图 1-3 中，圆上各点的横坐标 x 组成的集合 A 到这些点的纵坐标 y 组成的集合 B 的对应，构成一个函数；

(3) $f(x)=0$ 是函数；

(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 表示同一个函数.

分析：抓住函数定义是一个非空数集 A 到一个非空数集 B 的映射.

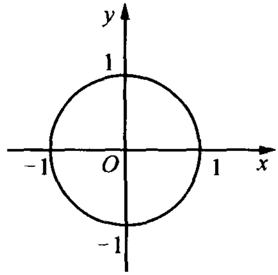


图 1-3

解： (1) 由于 $\begin{cases}x-2\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$ 的解集是空集，不符合“非空数集”的要求，所以是假命题.

(2) 由于 $x=0$ 时，对应的 $y=\pm 1$，不符合任一 x 有唯一的 y 和它对应，所以这种对应不构成映射，不能称为函数，是假命题.

(3) 是真命题. 定义域 $A=\mathbf{R}$，值域 $C=\{0\}$，对应法则 f：任一个 $x\in\mathbf{R}$ 都对应 0.

(4) 由于 $f(x)$ 的定义域 $A=\mathbf{R}$, $g(x)$ 的定义域 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}$，所以不表示同一个映射，是假命题.

说明：函数的三要素是定义域、对应法则和值域. 由于给定了定义域和对应法则以后，值域（象的集合）就被唯一确定，所以有人又称函数有两个要素. 判定两个函数是否相同时，就要看定义域和对应法则是否完全一致. 完全一致时，这两个函数才算相同.

例 2 求函数的定义域.

(1) 求函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}+\dfrac{2}{\sqrt{x+|x|}}$ 的定义域；

(2) 已知 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，求函数 $y=f(1-x^2)$ 的定义域.

分析：函数的定义域就是函数相应的映射的原象的集合，或者说就是自变量 x 允许取值的范围.

解：(1) 因为 $\begin{cases}x^2+2x-3\geqslant 0,\\x+|x|>0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 1,\\x>0.\end{cases}$

所以函数的定义域为 $[1,+\infty)$.

(2) 方法一：先求出函数 $f(1-x^2)$ 的解析式.

因为 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，

所以 $g(x)=f(1-x^2)=\sqrt{1-(1-x^2)^2}=\sqrt{2x^2-x^4}$.

由 $2x^2-x^4=x^2(2-x^2)\geqslant 0$，解得 $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

故函数 $f(1-x^2)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

方法二：利用复合函数求定义域的规律.

因为 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $x\in[-1,1]$，

又求 $g(x)=f(1-x^2)$ 的定义域实质是求 $g(x)$ 的定义域.

对应法则"f"对于自变量的要求是在 $[-1,1]$ 上，

故 $1-x^2\in[-1,1]$，即 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，解得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

所以函数 $f(1-x^2)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

说明：求函数的定义域一般有三类问题.

(1) 已经给出了函数的解析式求定义域. 根据自然定义域，即使解析式有意义，列出不等式（组）求解，如第 (1) 小题.

(2) 求复合函数的定义域. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$（可以不给出 $f(x)$ 的解析式），求 $f[g(x)]$ 的定义域，即解不等式（组）$a\leqslant g(x)\leqslant b$，求 x 的取值范围，如第 (2) 小题方法二. 注意，若 $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a,b]$，则指的是 $x\in[a,b]$.

(3) 关于实际问题或几何问题，求函数的定义域除要求解析式有意义外，还要求实际问题或几何问题有意义.

例 3 求函数的值域.

(1) 求函数 $y=-2x^2-8x$，$x\in[-3,3]$ 的值域. 若将函数的定义域改为 $x\in[a,a+1]$ $(a\in\mathbf{R})$ 呢？

(2) 求函数 $y=\dfrac{-4}{15-2x-x^2}$ 的值域.

分析：求值域的问题比较复杂，常常需要具体问题具体分析. 常用的方法有配方法、换元法、判别式法、数形结合法等. 变形过程要注意等价性，防止扩大或缩小了 y 的取值范围.

如本题有以下典型错误：

(1) 错解一：当 $x=-3$ 时 $y=6$，当 $x=3$ 时 $y=-42$，故值域