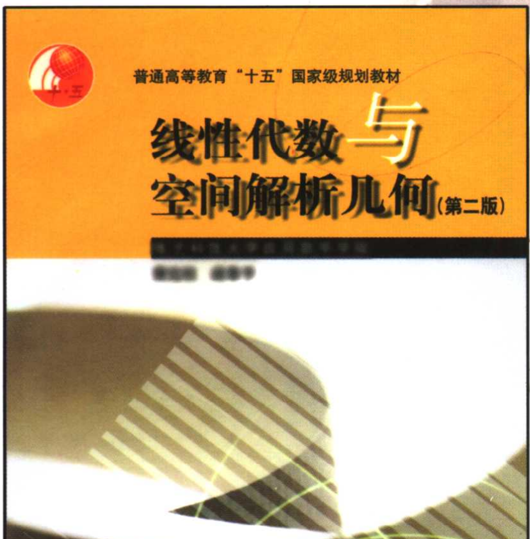
成功笔记系列丛书

线性代数与空间解析几何

成功笔记

成功笔记系列丛书编写委员会◎编



NOTES TO SUCCESS

哈尔滨工程大学出版社

成功笔记系列丛书

线性代数与空间解析几何
成功笔记

（配黄廷祝、成孝予第二版教材·高教版）

成功笔记系列丛书编写委员会　编

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合黄廷祝、成孝予主编的《线性代数与空间解析几何》一书而编写的辅导书。全书按教材的章节顺序编排，对教材中的重点、难点进行了细致的总结和讲解，并给学生留下了自己进行总结和小结的空间，旨在帮助学生掌握《线性代数与空间解析几何》的基本知识，达到将书"读薄、读透"的目的。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何成功笔记/《成功笔记系列丛书》编写委员会编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社，2006.12

(成功笔记系列丛书)

ISBN 7-81073-909-3

Ⅰ.线… Ⅱ.成… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②空间几何:解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 127053 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 4.25
字　　数 50 千字
版　　次 2006 年 12 月第 1 版
印　　次 2006 年 12 月第 1 次印刷
印　　数 1—2 000 册
定　　价 8.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

Preface 前言

经过精心的策划和组织，与高等学校优秀教材相配套的成功笔记系列丛书出版面世了。

一直以来，课堂上“老师讲、学生记”已经成为学校教学约定俗成的习惯。但是，很多学生因为忙于记录而忽略了对知识的理解和吸收，影响了课堂听课效果。而且近几年来教学方法和手段也在不断地发展和变化，多媒体教学和双语教学等也越来越广泛，而在这些过程中学生也根本来不及记录笔记。

本套丛书的编辑出版正是为了解决学生遇到的以上问题。丛书以大学课程的教学大纲为依据，以国内通用的权威教材为基础，收集、整理了部分课程的笔记，总结和归纳了相关知识点，帮助学生从机械记录老师板书或教案的工作中解脱出来，有更多的时间和精力、更大的自由来灵活掌握老师的讲解，汲取更多的知识。本套丛书有如下特点：

1.优秀教师编写。笔记与教材内容紧密结合，而更强调知识体系的连贯性和完整性，对教材中的主要内容进行细致讲解，知识结构清晰明了。丛书是集中了多位在教学第一线的优秀教师多年教学过程中对知识的总结和概括，而不是书本的简单重复，帮助学生真正做到将书“读薄，读透”。

2.随文安排加宽的空白处(即 Margin 部分)，给学生以听课过程中随堂补充记录对知识的补充、说明、理解、例题、习题的空间，这样一方面便于学生课上结合笔记学习，提高学习效率，另一方面，也便于学生课后对老师讲授的内容进行有效、有序的复习。并且书中的每一章最后都有小结及学习体会部分，方便学生进行自我总结和自我归纳，加深理解。

3.版本小巧，携带方便。

希望本套丛书的出版能够真正地帮助同学们的课堂和课后的学习，使其摆脱临摹老师的板书和教案的负担，有更多的时间扎实、认真地对课堂知识进行理解和吸收，从而走向成功之路。

由于时间仓促，本书还有很多的不足之处，欢迎读者提出宝贵的意见和建议，来信请寄哈尔滨工程大学出版社。E-mail：cbs_shil@hrbeu.edu.cn

Contents

目录

第 1 章　矩阵及其初等变换

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵的概念

矩阵产生于生活中的各种统计活动.从数学的角度来讲,矩阵就是一个长方形的表,它与行列式有着本质的区别,行列式表示的是一个数.矩阵对我们研究数学,研究社会现象、自然现象都起着非常大的作用.

定义　由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 m 行 n 列矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵,c_{ij} 称为矩阵的元素.

矩阵中的横排叫做行,竖排叫做列.当矩阵的行数与列数均为 n 时,这个矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.通常用字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$或$(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$来表示矩阵,有时为了表明行数或列数,常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\cdots$或者$(a_{ij})_{m\times n},(b_{ij})_{m\times n}\cdots$

1.1.2　矩阵的线性运算

1.矩阵的加法

(1)矩阵加法的定义

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$为两个 $m\times n$ 矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应位置的元素相加所得的 m 行 n 列矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,即若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

值得注意的是,两个矩阵只有在同型(即行数与列数对应相等)时才能相加,且同型矩阵之和仍为同型矩阵.

(2)矩阵加法的性质

用 $\boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$表示数域 F 上一切 m 行 n 列的矩阵之集合,于是在 $\boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$中任何两个矩阵均可以相加且有如下性质:

①$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in \boldsymbol{M}_{M\times N}(F)$;

②m 行 n 列的零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,对于 $\forall \boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$成立;

③对 $\forall \boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$, $\exists \boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$,使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,设 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记为 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$.

2.矩阵的减法

由矩阵加法的性质可知,每个 m 行 n 列的矩阵均有负矩阵,有了负矩阵的概念,我们就可以定义减法.

对 $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$,规定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

3.矩阵的数乘

(1)矩阵数乘的定义

设 F 是一个域, $\boldsymbol{A}$ 为 F 上的 $m\times n$ 矩阵,记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,对于 $\forall k\in F$,规定与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘运算为 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$,即用 k 遍乘 $\boldsymbol{A}$ 的所有的元素.

(2)数乘运算的性质

①$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

②$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;

③$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

④$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

⑤$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$(注意:$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 中左边的 0 为数 0,右边的为零矩阵);

⑥$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$;

⑦$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

⑧$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

1.1.3 矩阵的乘法

1.矩阵乘法的定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数.

规定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 m 行 k 列的矩阵 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 的 r 行 s 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 r 行的元素去乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 s 列的元素的和($r=1,2,3,\cdots,m,s=1,2,3,\cdots,k$).即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{rs})_{m\times k},\ c_{rs}=a_{r1}b_{1s}+a_{r2}b_{2s}+\cdots+a_{rn}b_{ns}$$

其中 $a_{r1},a_{r2},a_{r3},\cdots,a_{rn}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 r 行，$b_{1s},b_{2s},\cdots,b_{ns}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的第 s 列.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阵，记 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\cdots\times\boldsymbol{A}$($k$ 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘).

2.矩阵乘法的性质

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $k\times l$ 阵，则 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$(结合律成立)；

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 阵，$\boldsymbol{C}$ 也为 $n\times k$ 阵，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$(左分配律成立)；

(3)设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times k$ 阵，则 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$(右分配律成立)；

(4)$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$k,l$ 为自然数；

(5)$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，$k,l$ 为自然数.

1.1.4 矩阵的转置

1.矩阵转置的定义

将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行换成同序数的列，列换成同序数的行，所得的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

2.矩阵转置的性质

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3)$(l\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

1.2.1 高斯消元法

在高斯消元法中，要用到以下几种初等变换：

(1)交换其中两个方程的位置;

(2)用一个非零数乘某个方程;

(3)将一个方程的适当倍数加到另外一个方程上去.

高斯消元法的过程就是反复施行初等变换的过程,并且总是将方程组变成同解方程组.

1.2.2 矩阵的初等变换

1.矩阵的初等变换的定义

矩阵的行(列)的初等变换是对矩阵施行如下变换:

(1)交换两行(或两列)的位置;

(2)用一不为0的数乘以某一行(或列)的所有元素;

(3)用矩阵某一行(或列)的适当倍数加到另一行(列)上去.

2.初等矩阵

由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 经过一次初等变换得到的矩阵,称为初等矩阵.

3.矩阵的初等变换定理

对一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换,就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左侧乘上相应的 $m\times m$ 初等矩阵;对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n\times n$ 初等矩阵.

1.3 逆 矩 阵

1.3.1 逆矩阵的概念和性质

1.逆矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,并称 $\boldsymbol{A}$ 可逆,记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

2.逆矩阵定理

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在,则它的逆矩阵是唯一的.

3.逆矩阵的性质

(1)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$),则 $\boldsymbol{B}=$

A^{-1}；

(2)$(A^{-1})^{-1}=A$；

(3)若 A 可逆，$\lambda\neq 0$ 为常数，则$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

(4)若 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均为 n 阶可逆矩阵，则$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；

(5)$|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}$.

1.3.2 用行初等变换求逆矩阵

1.用行初等变换求逆矩阵的条件

(1)初等矩阵都是可逆矩阵；

(2)初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵.

2.用行初等变换求逆矩阵定理

若方阵 A 可逆，则存在有限个初等矩阵 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，使得 $E_1E_{k-1}\cdots E_1A=I$.即

$$A^{-1}=E_kE_{k-1}\cdots E_1=E_kE_{k-1}\cdots E_1I$$

1.4 分块矩阵

1.矩阵分块的目的

矩阵分块的目的是通过将大型阵矩分块，把大型矩阵的运算化成若干小型矩阵的运算，从而使矩阵的运算简化，并且能够研究其中的一些规律.

2.矩阵分块的原则

(1)两个同型的矩阵相加(减)时，分块的方法必须相同；

(2)两个矩阵 $A_{m\times n},B_{n\times k}$ 相乘时，左边的矩阵 A 的列的分法必须与右边的矩阵 B 的行的分法相同，至于 A 的行分法，B 的列分法，则可以任意.

3.分块矩阵的运算原则

(1)与普通矩阵的加、减、乘法以及数乘规则相同，而且也适合加法、乘法、数乘运算所满足的运算规律；

(2)在分块矩阵作乘法运算时应注意，每个子块是一个矩阵，而矩阵的乘法没有交换律，因此，必须把左边的矩阵写在左边，右边的矩阵写在右边．

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个具有相同方块的准对角阵，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{B}_t\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_t+\boldsymbol{B}_t\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{B}_t\end{pmatrix}$$

此外，如果 $\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_t$ 均可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_t^{-1}\end{pmatrix}$$

本章小结与学习体会

第2章 行 列 式

2.1 n 阶行列式的定义

设 A 为一个 n 阶矩阵,则 A 的行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个由 A 确定的数:

(1)当 $n=1$ 时,$\det A=a_{11}$;

(2)当 $n\geqslant 2$ 时,它可由 n 个 $n-1$ 级行列式线性表示,即

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称为代数余子式,而 M_{ij} 为元 a_{ij} 的余子式,即为划掉 A 的第 i 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式.

2.2 行列式的性质与计算

2.2.1 行列式的性质

性质1 若行列式的某一行所有的元素全为零,则行列式为零.

性质2 若 n 阶行列式中某两行对应元素全相等,则行列式为零.

性质3

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 （行列式的初等变换）若把行初等变换施于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上：

(1)将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘以数 k 得到 $\boldsymbol{A}_1$，则 $\det\boldsymbol{A}_1=k(\det\boldsymbol{A})$；

(2)将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行得到 $\boldsymbol{A}_2$，则 $\det\boldsymbol{A}_2=\det\boldsymbol{A}$；

(3)交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到 $\boldsymbol{A}_3$，则 $\det\boldsymbol{A}_3=-\det\boldsymbol{A}$；

(4)若行列式某两行对应元成比例，则行列式的值为零.

性质 5 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵的行列式 $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 的值相等，即

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det\boldsymbol{A}$$

性质 6 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

2.2.2 行列式的计算

1.对于低阶的行列式直接可用行列式的定义来计算.

2.对于阶数很高或者一般的行列式，可用行列式的性质来计算.

例 1 证明

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 对 n 归纳.

(1)当 $n=1$ 时，$|A| = a_{11}$，命题成立.

(2)设阶为 $n-1$ 时结论成立，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1n-1}$$

则当阶为 n 时，由定义可知

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{由归纳假设}}$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

本结论可以当作命题来使用，大家要熟记，该例中的行列式称为上三角行列式.

2.2.3 方阵乘积的行列式

定理 1 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $\det A \neq 0$.

定理 2 设 A, B 为 n 阶矩阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

推论 1 设 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均为 n 阶矩阵，则

$$\det(A_1A_2\cdots A_r) = (\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_r)$$

推论 2 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 $AB = I$（或 $BA = I$），则 $B = A^{-1}$.

2.3 拉普拉斯展开定理

2.3.1 代数余子式

在 n 阶行列式 D 中,任取 k 行,k 列($1\leqslant k\leqslant n$),位于这 k 行,k 列的交点上的 k^2 个元按原来的相对位置组成的 k 阶行列式 S,称为 D 的一个 k 阶子式.在 D 中划去 S 所在的 k 行与 k 列,余下的元按原来的相对位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M 称为 S 的余子式.设 S 的各行位于 D 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行($i_1<i_2<\cdots i_k$),S 的各列位于 D 中第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列($j_1<j_2<\cdots<j_k$),那么称

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2)+\cdots+j_k}M$$

为 S 的代数余子式.

2.3.2 拉普拉斯定理

若在 $n(n>1)$阶行列式 D 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n-1$),则由这 k 行元素所组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式的值.

例 2 用 Laplace 定理计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}$$

解 按第 1,2 行展开行列式.

由于第 1,2 行的元素构成非 0 的 2 阶子式的列只有 1,2 列;1,3 列;2,3 列.则构成的 2 阶子式为

$$M_1=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix},M_3=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}$$

M_1 的余子式由划去第 1,2 行,第 1,2 列所剩元素构成;M_2 的余子式由划去第 1,2 行,第 1,3 列所剩元素构成;M_3 的余子