高等学校专科教材

# 高等数学

## （下册）

广东工业大学应用数学系 编

华南理工大学出版社

GAODENG SHUXUE

高等学校专科教材

# 高等数学

## （下　册）



广东工业大学应用数学系　编

華南理工大學出版社
·广州·

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学(下册)/广东工业大学应用数学系编.—广州：华南理工大学出版社，2003.10

ISBN 7-5623-2007-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.广…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 050569 号

**总 发 行**：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
**责任编辑**：张君晓
**印 刷 者**：广州市新明光印刷有限公司
**开　　本**：850×1168　1/32　**印张**：19.125　**字数**：480 千
**版　　次**：2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
**印　　数**：1～3500 册
**定　　价**：32.50 元（上下册）

# 前　言

在科学技术飞速发展的今天，人们越来越意识到数学的重要。数学不仅在各行各业中有着广泛的应用，而且对培养具备创新能力的人才具有不可替代的作用。因此，数学在高等继续教育的工科类、经济类、管理类等有关专业的教学计划里占有较大的比重。基于此，广东工业大学高等继续教育学院组织部分有多年丰富教学经验的教师成立了教材编写组，依照教育部颁布的现行高等数学课程教学的基本要求，编写了适合高等学校培养人才需要的《高等数学》教材。

本教材具有如下的特色：一是具有可读性。力求整套教材在要求上做到适合专科教育的特点；在内容上力求做到认真精选，数学思想严谨，重点突出；在语言叙述上力求做到明确简练，深入浅出。二是具有适用性。对于基本概念尽量用直观的几何例题和实际问题加以引入；对于基本理论尽量强化其应用性；对于基本运算尽量强调数学思路的清晰。因此整套教材通过数学知识的传授，注重加强对学生各种能力的培养，使之更能适应现代化建设对人才在素质方面的各种要求。三是具有灵活性。整套教材分上、下两册，教学学时为 130～140。部分教学内容（打“*”号者）可供不同层次（如脱产、业余、夜大和函授等）和不同专业（工科类专科各专业）灵活地加以选用。同时，为了便于学生的自学与复习，在每章末均编写了总习题，其中有填空题、选择题、计算题和证明题等。书末还附有习题与总习题的解答。

为了指导学生的学习，我们还编写了与教材相配套的《高等数

学学习指导》。其内容包括疑难解答、例题演示和习题提示等(习题均来源于本教材)。这样可使学生比较灵活、独立自主地从中学到更多有益的知识与方法。

参加本套教材编写工作的有:张式强、徐志庭、郝同壬、陈耀灼和吴为汉等同志。整套教材由华南理工大学汪国强教授担任主审。广东工业大学高等继续教育学院有关负责同志对本教材的编写与出版工作给予了具体指导与帮助。应用数学系对编写工作给予了大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

尽管编者有力求把书编好的愿望,但由于水平所限,书中难免有不妥之处,敬请同行赐教,欢迎批评指正。

编　者

2003年6月

# 目　　录

# 第五章　无 穷 级 数

无穷级数是高等数学的重要组成部分,它在函数的研究及数值计算等方面有着广泛的应用.本章先介绍常数项级数的基本知识,然后讨论幂级数与傅里叶级数.

## §5-1　无穷级数的概念与性质

### 一、无穷级数的概念

给定一个数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$,作和式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.1}$$

并可简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,称为无穷级数,或称级数.其中 $u_n$ 叫做级数的通项或一般项.

各项都是常数的级数称为常数项级数.本章的前三节讨论这种级数.

和式(5.1)仅仅是形式上的相加,怎样理解无穷多个数量的相加,这种相加是否有意义? 不妨先以中学数学中曾提及的几何级数(等比级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

为引例,设它的前 $n$ 项和为 $s_n$,即

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

两边乘上 $q$,得

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

两式相减,可得

$$(1 - q)s_n = 1 - q^n$$

于是
$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

这就是几何级数前 $n$ 项之和,当 $q \neq 1$ 时的表达式.

当 $n$ 很大,且 $|q| < 1$ 时,由于 $q^n \to 0$,故得 $s_n \to \frac{1}{1-q}$;当 $|q| > 1$ 时,由于 $q^n \to \infty$,故得 $s_n \to \infty$;当 $q = 1$ 时,由 $1 + 1 + \cdots + 1$ 知,$s_n = n \to \infty$;而当 $q = -1$ 时,由 $1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ 知,$s_n$ 或等于 0,或等于 1,即其和为不确定.

这就是说,可以从级数的前有限项的和出发,观察它们的变化趋势,由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作级数(5.1)的前 $n$ 项的和,并记为 $s_n$,即

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{5.2}$$

$s_n$ 称为级数(5.1)的部分和.当 $n$ 依次取 1,2,3,…时,它们构成一个新的数列 $\{s_n\}$:

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\cdots,\ s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

根据这个数列是否有极限,给出下面的级数收敛与发散的定义.

**定义** 当 $n \to \infty$ 时,如果数列 $\{s_n\}$ 以某个常数 $s$ 为极限,即

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

则称级数(5.1)收敛,且其和为 $s$,并写成

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

这时,也称级数(5.1)收敛于 $s$.如果数列 $\{s_n\}$ 没有极限,则称级数

(5.1)发散.

当级数(5.1)收敛时,其部分和 $s_n$ 是级数和 $s$ 的近似值,二者的差 $s-s_n$ 称为级数的余项,记为 $R_n$,即

$$R_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

估计 $|R_n|$ 的值便得到 $s_n$ 与 $s$ 之间的误差.

根据上述讨论,可得如下(例 1)的结论.

**例 1** 几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

当 $|q|<1$ 时为收敛,其和 $s=\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant 1$ 时为发散.

**例 2** 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

**解** 因 
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$,从而级数收敛,其和等于 1.

**例 3** 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots$$

的敛散性.

**解** 因 
$$\begin{aligned} s_n &= \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \end{aligned}$$

$$= \ln(n+1)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$,从而级数发散.

## 二、无穷级数的基本性质

根据上述级数收敛、发散以及求和的概念,可以得到无穷级数的几个基本性质.

**性质 1** 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛于和 $s$,则它的各项同乘以一个常数 $k$ 所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n + \cdots$$

也收敛,其和为 $ks$.

**证** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 $s_n$ 与 $\sigma_n$,则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n$$

于是
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = ks$$

这表明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,其和为 $ks$.

**性质 2** 设有两个收敛的级数

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

则级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛,其和为 $s \pm \sigma$.

**证** 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为$s_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和为$\sigma_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和为 $\tau_n$，则

$$\begin{aligned}\tau_n &= \sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)\\ &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)\\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)\\ &= s_n \pm \sigma_n\end{aligned}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\tau_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm \sigma_n) = s \pm \sigma$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，且其和为 $s \pm \sigma$. 这个性质通常称为收敛级数，可以逐项相加或逐项相减.

**性质 3** 在级数前面加上或去掉有限项，不影响级数的敛散性. 而当级数收敛时，加上或去掉有限项，一般会改变级数的和.

**证** 设将级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的前 $k$ 项去掉，则得级数

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

它的前 $n$ 项和为

$$\begin{aligned}\sigma_n &= u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}\\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{k+n}) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_k)\\ &= s_{n+k} - s_k\end{aligned}$$

因为 $s_k$ 是有限项的和，是个常数，所以当 $n\to\infty$时 $\sigma_n$ 与 $s_{n+k}$或者同时具有极限，或者同时没有极限. 这说明在级数前面加上或去掉有限项，其敛散性不变.

而当级数收敛时，因有

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+k} = s$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_{n+k} - s_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{n+k} - s_k = s - s_k$$

这就是说,收敛级数前面去掉有限项后所得的级数仍收敛,但其和却改变了.

应该指出:收敛级数加括号后所成的级数仍会收敛于原来级数的和.但必须注意,收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛.例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零,但去括号后,级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

同样道理,发散级数加括号后所成的级数可能收敛,也可能发散.

### 三、级数收敛的必要条件

如果级数收敛,则必有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{5.3}$$

这是由于前有限项和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = s_{n-1} + u_n$$

于是

$$u_n = s_n - s_{n-1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$$

这就是说,级数在收敛的前提下,必然有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 的级数却可能收敛,也可能发散,因此式(5.3)只是级数收敛的必要条件而非充分条件.例如前面提过的例子,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

它们都具备$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

但是前者收敛,而后者发散.

根据式(5.3),又可得到,如果

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

则级数一定发散.例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \cdots$$

由于
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln 2} = e^0 = 1$$

因此
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$$

所以这个级数发散.

为了今后的需要,下面讨论调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{5.4}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,它满足级数收敛的必要条件.但可以证明这个级数发散.

因为,当 $x>0$ 时总有 $x>\ln(1+x)$,现取 $x$ 为正整数,则有

$$1 > \ln 2, \frac{1}{2} > \ln\frac{3}{2}, \cdots, \frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$$

相加后可得

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} &> \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

即调和级数的部分和 $s_n > \ln(n+1)$,所以由

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$$

知
$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$$

可见,调和级数(5.4)是发散的.

### 习题 5-1

1. 写出下列级数的一般项:

(1) $-1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$;

(3) $\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{2\ln 3}+\frac{4}{3\ln 4}-\cdots$;

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{2a^3}{5}+\frac{3a^4}{7}-\frac{4a^5}{9}+\cdots$.

2. 判别下列级数的敛散性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4^2}+\frac{3^2}{4^3}-\frac{3^3}{4^4}+\cdots$;

(3) $2^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^3+\cdots$;

(4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{30}+\cdots$.

## §5-2 常数项级数的审敛法

利用级数收敛的定义可以判定级数的收敛性,但有时是很难

的,因为许多级数的部分和难以求得;另外,部分和的极限也不容易求得,因此需要寻找一些简单易行的判定方法.为此先考虑一类较简单且很有用的级数,即所谓正项级数,然后再考虑交错级数与任意项级数.

## 一、正项级数及其审敛法

如果 $u_n \geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$,则称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.5}$$

为正项级数.

设其前 $n$ 项的和为 $s_n$,显然数列 $\{s_n\}$ 是单调增加的,即

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant \cdots$$

如果存在一个常数 $M>0$,可使 $s_n<M(n=1,2,3,\cdots)$,这时的部分和数列 $\{s_n\}$ 为有界数列,根据单调有界数列必有极限的准则知:部分和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在,故级数式(5.5)收敛;反之,如果正项级数(5.5)收敛,即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

存在,则根据收敛数列必为有界数列的结论知,数列 $\{s_n\}$ 有界.因此,有如下重要结论:

正项级数(5.5)收敛的充要条件是:它的部分和所形成的数列 $\{s_n\}$ 有界.

根据上述结论,可以得到判别正项级数的一个常用方法——比较审敛法.

### 1. 比较审敛法

设有两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{5.6}$$