普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修 ④

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN

主编 胡建军

配人教A版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修④

新课标新精编

XINKEBIAO XINJINGBIAN

顾　问　岑　申　王而冶　金才华　许芬英
主　编　胡建军
编　者　朱恒元　张敬政　吴直爽

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标 新精编.数学.4:必修:人教 A 版 / 胡建军著. —杭州: 浙江教育出版社,2006.10

ISBN 7-5338-6685-1

Ⅰ.新… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课 - 高中 - 习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 115861 号

责任编辑 金馥菊 **装帧设计 韩 波**
责任校对 余晓克 **责任印务 温劲风**

普通高中课程标准实验教材

新课标 新精编 高中数学 必修 4

● 主　　编　胡建军

● 出版发行　浙江教育出版社
　　　　　　(杭州市天目山路 40 号　邮编:310013)
● 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
● 印　　刷　浙江印刷集团有限公司
● 开　　本　880×1230　1/16
● 印　　张　9
● 字　　数　280 000
● 印　　数　00 001-15 000
● 版　　次　2006 年 10 月第 1 版
● 印　　次　2006 年 10 月第 1 次
● 书　　号　ISBN 7-5338-6685-1/G·6655
● 定　　价　11.40 元

联系电话:0571-85170300-80928

e-mail:zjjy@zjcb.com　　网址:www.zjeph.com

前　言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中，高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重现科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位，根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写，与教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基础训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"五个栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。"基础例说·基本训练"分例说和训练两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵揽全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。"自我评估"为全章知识的综合评估，分 A，B 两份试卷，其中 A 卷为基本要求，B 卷为较高要求。"高考链接"选取近三年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求，以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A 组"和"B 组"两组，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标。使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出数学探究、联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

浙江教育出版社

2006 年 10 月

QIANYAN

目 录

MULU

第一章 三角函数

学法指导

三角函数是基本初等函数，它是描述周期现象的重要数学模型，在数学和物理学、天文学、测量学以及其他应用技术学科中都具有重要的作用. 本章学习的内容主要有三角函数的定义、图象、性质及应用.

学习目标

1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度互化.

2. 理解任意角的三角函数的定义；能借助三角函数线推导出诱导公式，能画出函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性；理解三角函数的性质；理解同角三角函数的基本关系式；了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义，能借助计算器或计算机画出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，了解参数 A,ω,φ 对函数图象变化的影响.

3. 会用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

重点、难点

重点是任意角的三角函数的概念，同角三角函数基本关系式、诱导公式及其应用，正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

难点是弧度制的概念，周期函数的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

主要概念、定理、公式及规律

1. 主要概念

(1) 按逆时针方向旋转形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转形成的角叫做负角，如果一条射线没有作任何旋转，称它形成了一个零角. 这样，就把角的概念推广到了任意角.

(2) 将角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，那么角的终边在第几象限，就称这个角是第几象限角.

(3) 角可以用度或弧度为单位进行度量. 1 度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$，用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制；把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

(4) 设 α 是一个任意大小的角，角 α 的终边上任意一点 P 的坐标为 (x,y)，它到原点的距离为 $r\ (r>0)$，那么角 α 的三角函数定义为：

正弦函数 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，余弦函数 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，正切函数 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$. 特别地，当点 P 位于单位圆上时，$\sin\alpha=y, \cos\alpha=x$.

(5) 如图 1-1，角 α 的终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，它与角 α 的终边或其反向延长线交于点 T，把三条有向线段 MP, OM, AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线，统称为三角函数线.

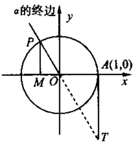


图 1-1

(6) 借助三角函数线，能够画出正弦函数的图象、余弦函数的图象和正切函数的图象，它们分别叫做正弦曲线、余弦曲线和正切曲线.

(7) 对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，非零常数 T 叫做这个函数的周期. 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期. 本书中所涉及到的周期，如果不加特别说明，一般都是指函数的最小正周期.

(8) 在物理中，形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数描述简谐运动时，$A, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{\omega}{2\pi}$ 分别是这个简谐运动的振幅、周期、频率，$\omega x+\varphi, \varphi$ 分别称为相位和初相.

2. 主要公式及规律

(1) 终边相同的角的表示法：任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和，即 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 象限角的集合表示法：

第一象限角的集合为 $\left\{\alpha\left|\, 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$；

第二象限角的集合为 $\left\{\alpha\left|\, 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$；

第三象限角的集合为 $\left\{\alpha\left|\, 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$；

第四象限角的集合为 $\left\{\alpha\left|\, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi, k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(3) 终边在坐标轴上的角：

终边在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 x 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=2k\pi$

$+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 x 轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 y 轴的非负半轴上的角的集合为

$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

终边在 y 轴的非正半轴上的角的集合为

$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

终边在 y 轴上的角的集合为$\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

终边在坐标轴上的角的集合为$\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(4) 弧长公式：

$l=|\alpha|\cdot r$（其中 α 为此圆弧所对的圆心角的弧度数，r 为此圆的半径）.

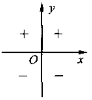
(5) 扇形的面积公式：

$S=\frac{1}{2}lr$（其中 r 是半径，l 是弧长）.

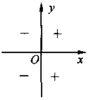
(6) 角度与弧度的换算公式：

$1°=\frac{\pi}{180}$ rad，1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$.

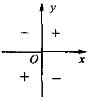
(7) 各象限角的正弦、余弦、正切函数的符号：



sinα



cosα



tanα

(8) 诱导公式：

公式一　$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=\sin\alpha$，

$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=\cos\alpha$，

$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

公式二　$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

公式三　$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

公式四　$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

公式五　$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

公式六　$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

(9) 同角三角函数的基本关系式：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

(10) 有关三角函数的最小正周期的计算公式：

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，

函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，

函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

学习方法指导

1. 求任意角的三角函数值，一般需运用三角函数的六组诱导公式进行求解. 这些诱导公式可概括为：$k\cdot90°\pm\alpha$（$k\in\mathbf{Z}$)的各三角函数值. 当 k 是偶数时，得角 α 的同名函数值；当 k 为奇数时，得角 α 相应的"余"函数值，然后加上把 α 看成锐角时函数值的符号. 可用口诀"奇变偶不变，符号看象限"加强记忆.

2. 三角函数是一类特殊的周期函数，现实生产和生活中，周期现象广泛存在. 反映函数 $f(x)$为周期函数的本质是等式 $f(x+T)=f(x)$，其中 T 为非零常数，等式需对定义域内所有 x 都成立. 如：$\sin(30°+120°)=\sin30°$，但 120°不是函数 $y=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$)的一个周期. 因为对所有 $x\in\mathbf{R}$，$\sin(120°+x)\neq\sin x$. 周期函数并不一定都有最小正周期. 如：$f(x)=5$（$x\in\mathbf{R}$)，任意一个非零实数都是它的周期，由于没有最小正实数，故它也没有最小正周期.

重难例说·基本训练

1.1　任意角和弧度制

1.1.1　任意角

例 说

例 1　已知 $\alpha=1\ 690°$.

(1) 把 α 改写成 $\beta+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$，$0°\leqslant\beta<360°$)的形式；

(2) 求角 θ，使角 θ 的终边与角 α 的终边相同，且 $-360°<\theta<360°$，并判断角 θ 属于第几象限.

分析　第(1)题利用终边相同的角的表示法；第(2)题利用满足条件的不等式，对其中的 k 赋值.

解　(1) $\alpha=250°+4\times360°$（$k=4,\beta=250°$).

(2) ∵　角 θ 与角 α 终边相同，

∴　角 θ 可写成 $250°+k\cdot360°$的形式.

又∵　$-360°<\theta<360°$，

∴　$-360°<250°+k\cdot360°<360°$（$k\in\mathbf{Z}$).

∴　$k=-1$ 或 0.

因此，$\theta=-110°$或 250°，θ 属于第三象限角.

注意 求符合条件且与已知角终边相同的角,先写出与已知角终边相同的角的一般形式,即所求角的通解,然后根据条件求出 k 的值.

例 2 已知角 α 的终边与 $-690°$ 角的终边关于 y 轴对称,求 α.

分析 利用对称角之间的关系.

解 ∵ $-690°=-720°+30°=-2\times360°+30°$,

∴ $-690°$角的终边与 $30°$角的终边相同.

$30°$角关于 y 轴对称的角可表示为 $180°-30°$,

∴ $\alpha=k\cdot360°+180°-30°\ (k\in\mathbf{Z})$,

即 $\alpha=k\cdot360°+150°\ (k\in\mathbf{Z})$.

注意 一般地,若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha+\beta=k\cdot360°\ (k\in\mathbf{Z})$;若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°\ (k\in\mathbf{Z})$;若角 α 与角 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha-\beta=(2k+1)\cdot180°\ (k\in\mathbf{Z})$;若角 α 与角 β 的终边在同一条直线上,则 $\alpha-\beta=k\cdot180°\ (k\in\mathbf{Z})$.

例 3 已知 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?请画出图形.

分析 先表示出第二象限角,然后对 k 进行分类讨论.

解 ∵ α 为第二象限角,

∴ $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$.

∴ $k\cdot180+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时,令 $k=2n\ (n\in\mathbf{Z})$,

则 $n\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°$,

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角;

当 k 为奇数时,令 $k=2n+1\ (n\in\mathbf{Z})$,

则 $n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°$,

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

∴ $\frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角.

$\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在如图 1-2 所示的阴影部分的区域内.

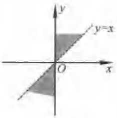


图 1-2

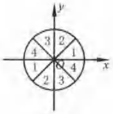


图 1-3

注意 求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限的一般方法为:作出各象限的角平分线,它们与坐标轴把圆周等分成 8 个区域,从 x 轴的非负半轴开始,按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1,2,3,4,则标号是几的两个区域,就是 α 为第几象限的角时 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的区域,如图 1-3 所示.如:α 是第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一、第三象限角.

训练

A 组

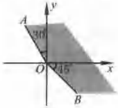
1. 下列命题正确的是(　　).
   (A) 终边相同的角一定相等
   (B) 第一象限角都是锐角
   (C) 锐角都是第一象限角
   (D) 小于 $90°$的角都是锐角
2. 与 $-457°$角终边相同的角的集合是(　　).
   (A) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+457°,k\in\mathbf{Z}\}$
   (B) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+97°,k\in\mathbf{Z}\}$
   (C) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+263°,k\in\mathbf{Z}\}$
   (D) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$
3. 已知集合 $M=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot90°-36°,k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{\beta\mid-180°<\beta<180°\}$,则 $M\cap N$ 等于(　　).
   (A) $\{-36°,54°\}$
   (B) $\{-126°,144°\}$
   (C) $\{-126°,-36°,54°,144°\}$
   (D) $\{-126°,54°\}$
4. 若 α 是第一象限角,则 2α 是(　　).
   (A) 第一或第二象限角
   (B) 第三或第四象限角
   (C) 第三或第四象限角或终边落在 y 轴的负半轴上
   (D) 第一或第二象限角或终边落在 y 轴的正半轴上
5. 已知角 α,β 的终边相同,则 $\alpha-\beta$ 的终边在(　　).
   (A) x 轴的非负半轴上　(B) y 轴的非负半轴上
   (C) x 轴的非正半轴上　(D) y 轴的非正半轴上
6. 若 α 是第一象限角,则 $-\alpha$ 是(　　).
   (A) 第一象限角　(B) 第一或第四象限角
   (C) 第二或第三象限角　(D) 第四象限角
7. 终边在直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合为________.
8. 与 $-1\,778°$ 的终边相同且绝对值最小的角是________.
9. 若角 θ 的终边所在直线过点 $A(-2,2)$,且 $-360°<\theta<360°$,求角 θ.

10. 若角 θ 的终边与 60° 角的终边相同，则满足 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$ 条件的哪些角 α 的终边与 $\frac{\theta}{3}$ 的终边相同？

11. 如图.

(1) 分别写出终边落在射线 OA 与射线 OB 上的角的集合；

(2) 写出终边落在阴影部分(含边界)的角的集合.



(第 11 题)

12. 已知集合 $M=\{\alpha|\alpha=(4k\pm1)\cdot90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，那么 M, N 的关系如何？

B 组

13. 如果角 2α 的终边在 x 轴上方，那么角 α 是(　　).

(A) 第一象限角

(B) 第一或第二象限角

(C) 第一或第三象限角

(D) 第一或第四象限角

14. 若 α 为锐角，则 $-\alpha+k\cdot180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$ 所在象限是(　　).

(A) 第二象限　　(B) 第四象限

(C) 第一或第三象限　　(D) 第二或第四象限

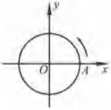
15. 若角 α 的终边与 -50° 角的终边互相垂直，则角 α 等于________.

16. 今天是星期一，则 158 天后的那一天是星期________.

17. 已知集合 $A=\{\alpha|30^\circ+k\cdot180^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|-45^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<45^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$.

18. 在平面直角坐标系中，角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上. 若角 α 的终边过函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的图象的交点，求满足条件的角 α 的集合.

19. 如图，半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点，圆周上点 A 从 $(1,0)$ 出发，按逆时针方向做匀速圆周运动. 已知点 A 1 min 转过 θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ 角，2 min 到达第三象限，14 min 后回到原来位置，求角 θ.



(第 19 题)

20. 已知 $f(x)=5^\circ\cdot x+20^\circ$，$g(x)=6^\circ\cdot x+30^\circ$，是否存在整数 T，使得对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+T)$ 与 $f(x)$，$g(x+T)$ 与 $g(x)$ 表示终边相同的角？若存在，求出 T 的值；若不存在，请说明理由.

1.1.2 弧度制

例说

例 1 (1) 把 $-1\,480^\circ$ 写成 $\alpha+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 的形式，其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$；

(2) 若 $\beta\in[-4\pi,0]$，且角 β 与(1)中角 α 的终边相同，求角 β.

分析 把 $-1\,480^\circ$ 化为弧度制.

解 (1) $-1\,480^\circ=-\frac{74}{9}\pi=-8\pi-\frac{2}{9}\pi$

$$=-10\pi+\frac{16}{9}\pi.$$

$\because$ $0\leqslant\frac{16}{9}\pi<2\pi$，$\therefore$ $-1\,480^\circ=\frac{16}{9}\pi-2\times5\pi$.

(2) $\because$ 角 β 与角 α 终边相同，

$\therefore$ $\beta=\alpha+2k\pi=\frac{16}{9}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

$\because$ $\beta\in[-4\pi,0]$，

$\therefore\ \beta_1=\frac{16}{9}\pi-2\pi=-\frac{2\pi}{9},\beta_2=\frac{16}{9}\pi-4\pi=-\frac{20}{9}\pi.$

[redacted] 弧度制下终边相同的角的表示方法与角度制表示方法相似.

例 2　已知集合 $A=\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，集合 $B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，求 $A\cap B$.

分析　运用角的弧度数的实数性质.

解　对于 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}$，

当 $k=0$ 时，$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$；

当 $k=-1$ 时，$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$.

当 k 取其他值时，$\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $[-2,3]$ 没有公共元素，如图 1－4 所示.

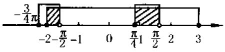


图 1－4

因此，$A\cap B=\left\{x\left|-2\leqslant x<-\frac{\pi}{2}\right.\text{，或}\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right\}$.

[redacted] 引入弧度制后，使得“角度”与“实数”之间建立了一一对应关系，这样角度就具有了实数的属性.

例 3　如图 1－5，已知扇形 AOB 的周长为 6 cm，该扇形的中心角为 1，求弓形的面积.

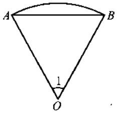


图 1－5

分析　从“扇形 AOB 的周长”这个条件入手.

解　设扇形的半径为 r cm，弧长为 l cm，

则 $\begin{cases}2r+l=6,\\ \frac{l}{r}=1,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}r=2,\\ l=2.\end{cases}$

$\therefore\ S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2(\text{cm}^2)$.

过点 A 作 $AD\perp OB$，垂足为 D，如图 1－6 所示.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，

$AD=OA\cdot\sin\angle AOD=2\sin 1$，$\therefore\ S_{\triangle AOB}=2\sin 1$，

$\therefore\ S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle AOB}=2-2\sin 1(\text{cm}^2)$.

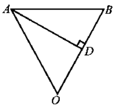


图 1－6

[redacted] 本题将扇形、弓形与三角形有机地结合在一起，需充分利用三者之间的面积关系加以解决. 若过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，该如何求解？

训　练

A　组

1. $\frac{8\pi}{5}$ 化为角度是（　　）.

　(A) 278°　(B) 280°　(C) 288°　(D) 318°

2. 若 $\alpha=-3$，则角 α 的终边在（　　）.

　(A) 第一象限　(B) 第二象限
　(C) 第三象限　(D) 第四象限

3. 把 $-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $\theta+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 的形式，使 $|\theta|$ 最小的 θ 的值是（　　）.

　(A) $-\frac{3\pi}{4}$　(B) $-\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{4}$　(D) $\frac{3\pi}{4}$

4. 在半径不相等的圆中，1 rad 的圆心角所对的（　　）.

　(A) 弦长相等
　(B) 弧长相等
　(C) 弦长等于所在圆半径
　(D) 弧长等于所在圆半径

5. 若 1 rad 的圆心角所对的弦长为 2，则这个圆心角所对的弧长为（　　）.

　(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\sin\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$　(D) $2\sin\frac{1}{2}$

6. 已知扇形的周长为 6 cm，面积为 2 cm²，则扇形圆心角的弧度数为（　　）.

　(A) 1　(B) 4　(C) 1 或 4　(D) 2 或 4

7. 若将分针拨慢 10 min，则分针转过的弧度数为（　　）.

　(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $-\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) $-\frac{\pi}{6}$

8. 在与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的所有角中，最大的负角是________.

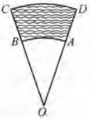
9. 当圆心角 α 为 $-216°$，弧长为 7π cm 时，其半径 r 为________.

10. 把下列各角写成 $\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 的形式，其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$，并指出它们是哪个象限角：

　(1) $-1\ 500°$；　(2) $-\frac{18}{7}\pi$；　(3) $672°$.

11. 已知地球的赤道半径约为 6 370 km，那么赤道上 1° 的圆心角所对的弧长为多少千米？

12. 如图，有一个近似于环形的水塘，测得 AB 长为 20 m，CD 长为 30 m，$AD=BC=15$ m. 现准备用来养鱼，若每平方米水面可以放鱼苗 15 尾左右，那么这个水塘中约可放多少尾鱼苗？



（第 12 题）

B 组

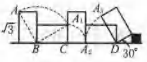
13. 已知集合 $M=\left\{x\left|x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则集合 M 与 N 之间的关系是(　　).

(A) $M\supsetneqq N$　　(B) $M\subsetneqq N$

(C) $M=N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

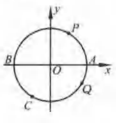
14. 已知一扇形的周长为 40 cm. 当它的半径等于________ cm 时，扇形有最大面积________ cm^2.

15. 如图，已知长为$\sqrt{3}$ dm，宽为 1 dm 的长方形木块在桌面上做无滑动的翻滚，翻滚到第四次时被一小木板挡住，木块底面成 30°的角. 求点 A 走过的路程的长及走过的弧度所在扇形的总面积.



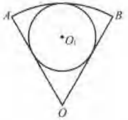
（第 15 题）

16. 如图，动点 P，Q 从点 $A(4,0)$ 出发，沿圆周运动，点 P 按逆时针方向每秒转$\frac{\pi}{3}$弧度，点 Q 按顺时针方向每秒转$\frac{\pi}{6}$弧度，求点 P，Q 第一次相遇时所用的时间、相遇点的坐标及点 P，Q 各自走过的弧长.



（第 16 题）

17. 如图，"十字形"公路的交叉处周围呈扇形形状，某市规划拟在这块扇形土地上修建一个圆形广场. 已知 $\angle AOB=60°$，$\overset{\frown}{AB}=100\pi$ m. 则怎样设计，广场的占地面积最大？



（第 17 题）

18. 已知视力正常的人，能读远处文字的视角不小于 $5'$.

(1) 距离人 10 m 处所能阅读文字的大小如何？

(2) 要看清长、宽均为 5 m 的大字标语，人距离标语最远距离为多少？

1.2　任意角的三角函数

1.2.1　任意角的三角函数

第 1 课时　任意角的三角函数(一)

例 说

例 1　已知角 α 的终边上一点 $P(x,-2)$ $(x<0)$，且 $\cos\alpha=\frac{x}{3}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

分析　先由 $\cos\alpha=\frac{x}{3}$ 求出 x，然后求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解　$\because$　$\cos\alpha=\frac{x}{3}=\frac{x}{r}$，　$\therefore$　$r=3$.

又$\because$　$r=\sqrt{x^2+4}=3$，$x<0$，　$\therefore$　$x=-\sqrt{5}$.

$\therefore$　点 P 的坐标是$(-\sqrt{5},-2)$.

$\therefore$　$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{2}{3}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

注意　本题若去掉 $x<0$ 这一个条件，则 $x=\pm\sqrt{5}$，需分类求解.

例 2　已知 $|\sin\theta|=-\sin\theta$，$|\cos\theta|=-\cos\theta$，且 $\sin\theta\cdot\cos\theta\neq0$，试判断点 $P(\tan\theta,\sin\theta)$ 在第几象限.

分析 需判断 $\tan\theta$ 和 $\sin\theta$ 的符号.

解 由 $|\sin\theta|=-\sin\theta$,可知 $\sin\theta<0$.

由 $|\cos\theta|=-\cos\theta$,可知 $\cos\theta<0$.

$\therefore$ θ 是第三象限角,故 $\tan\theta>0$.

因此,点 P 在第四象限.

例3 已知函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}$,求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,008)$ 的值.

分析 由 $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}$,易得到 $f(1)=f(7)$,$f(2)=f(8)$,$f(3)=f(9)$,……由此猜想 $f(x+6)=f(x)$.

解 $\because$ $\sin\dfrac{\pi x}{3}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+2\pi\right)=\sin\dfrac{\pi(x+6)}{3}$,

$\therefore$ $f(x+6)=f(x)$.

$\therefore$ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,008)$

$=[f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)]\times 334$

$\quad+f(2\,005)+f(2\,006)+f(2\,007)+f(2\,008)$,

而 $f(1)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$f(2)=\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\pi=0$,$f(4)=\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(5)=\sin\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$f(6)=\sin2\pi=0$,

$\therefore$ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$,

$\therefore$ 原式 $=f(2\,005)+f(2\,006)+f(2\,007)+f(2\,008)$

$\qquad=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

请用类似的方法解答下列问题:已知函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$,求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,007)$ 的值.

训练

A 组

1. 若 $\cos\theta<0$,则( ).
   (A) θ 是第二象限角
   (B) θ 是第三象限角
   (C) θ 是第二或第三象限角
   (D) $\theta\in\left\{\theta\left|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

2. 下列等式成立的是( ).
   (A) $\sin700^\circ=\sin20^\circ$
   (B) $\sin370^\circ=\sin(-350^\circ)$
   (C) $\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$
   (D) $\cos\dfrac{25}{6}\pi=\cos\left(-\dfrac{19}{6}\pi\right)$

3. $\sin\dfrac{25\pi}{6}$ 等于( ).
   (A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 函数 $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{\cos x}{|\cos x|}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是( ).
   (A) $\{-1\}$ (B) $\{-1,3\}$
   (C) $\{3\}$ (D) $\{-1,1,3\}$

5. 下列各式为正号的是( ).
   (A) $\cos2-\sin2$ (B) $\cos2\cdot\sin2$
   (C) $\tan2\cdot\cos2$ (D) $\sin2\cdot\tan2$

6. 已知 $\tan\alpha>0$,且 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$,那么角 α 是( ).
   (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
   (C) 第三象限角 (D) 第四角限角

7. 若角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合,且 $\sin\alpha<0$,又 $P(m,n)$ 是 α 终边上一点,且 $|OP|=\sqrt{10}$,则 $m-n$ 等于( ).
   (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4

8. $\cos\dfrac{9\pi}{4}+\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)=$________.

9. 若 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin2\theta}<1$,则 θ 是第________象限角.

10. 计算:$a^2\sin(-1\,350^\circ)+b^2\tan405^\circ-(a-b)^2\tan765^\circ-2ab\cos(-1\,080^\circ)$.

11. 已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$,且 $\tan\theta\cdot\cos\theta<0$,求证:$\theta$ 是第三象限角.

12. 已知角 α 的终边经过点 $(3a-9,a+2)$,且 $\cos\alpha\leqslant0$,$\sin\alpha>0$,求实数 a 的取值范围.

B 组

13. 若 α 为第二象限角,且 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$,则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是( ).
    (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
    (C) 第三象限角 (D) 第四象限角

14. 若三角形的两内角 A,B 满足 $\sin A\cdot\cos B<0$,则此三角形的形状是( ).
    (A) 锐角三角形 (B) 钝角三角形
    (C) 直角三角形 (D) 不能确定

15. 若点 $P(\tan\theta,\sin\theta+\cos\theta)$ 在第一象限内，则角 θ 是(　　).

(A) 第一象限角　　(B) 第二象限角

(C) 第三象限角　　(D) 第四象限角

16. 若 α 为第一象限角，则 $\sin2\alpha,\cos\frac{\alpha}{2},\tan\frac{\alpha}{2}$ 中取正值的有(　　).

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 3 个

17. 若 $a=\sin125^\circ\cos75^\circ,b=\cos230^\circ,c=\tan405^\circ$，则 a,b,c 由大到小的排列是________.

18. 设函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，其中 a,b,α,β 都是不为零的实数，且满足 $f(2\,000)=-1$，求 $f(2\,002)$ 的值.

19. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\theta\in[0,\pi]$，求 $\tan\theta$ 的值.

20. 已知角 θ 终边上一点 $P(x,2x-3)\ (x\neq0)$，且 $\tan\theta=-x$，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值.

第 2 课时　任意角的三角函数(二)

例 说

例 4　已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限，在区间 $[0,2\pi)$ 内求 α 的取值范围.

分析　利用单位圆中的三角函数线求解.

解　由题意知

$$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha>0,\\ \tan\alpha>0.\end{cases}$$

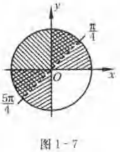


图 1-7

如图 1-7，由三角函数线可得

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi,\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\text{或}\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，或 $\pi<\alpha<\frac{5}{4}\pi$.

注意　三角函数线是利用数形结合思想解决有关问题的重要工具.

例 5　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2\cos x-1}$；　(2) $y=\lg(3-4\sin^2x)$.

分析　根据各问题的约束条件，利用三角函数线画出角 x 满足条件的终边及范围.

解　(1) $\because\ 2\cos x-1\geqslant0$，$\therefore\ \cos x\geqslant\frac{1}{2}$，如图 1-8.

$\therefore\ x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]\ (k\in\mathbf{Z})$.

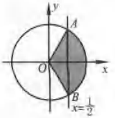


图 1-8

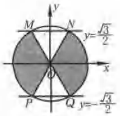


图 1-9

(2) $\because\ 3-4\sin^2x>0$，$\therefore\ \sin^2x<\frac{3}{4}$，

$\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图 1-9.

$\therefore\ x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\ (k\in\mathbf{Z})$.

注意　求满足含三角函数的不等式的自变量 x 的取值范围、求三角函数的定义域及三角函数值的大小比较，常用方法是利用三角函数线求解.

例 6　已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求证：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

分析　借助三角函数线来证明.

证明　如图 1-10，设 OP 为角 α 的终边，分别作出正弦线 MP，正切线 AT.

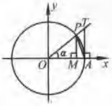


图 1-10

$\because\ S_{\triangle OPA}<S_{\text{扇形}OPA}<S_{\triangle OAT}$，

$\therefore\ \frac{1}{2}OA\cdot MP<\frac{1}{2}OA\cdot\alpha<\frac{1}{2}OA\cdot AT$.

$\therefore\ MP<\alpha<AT$，即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

注意　三角函数线将抽象的代数式用几何图形表示出来，使得问题更形象直观.

训 练

A 组

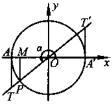
21. 如图，在单位圆中，下列有关角 α 的正弦线、正切线表示正确的是(　　).

(A) 正弦线 MP,正切线 $A'T'$

(B) 正弦线 PM,正切线 AT

(C) 正弦线 MP,正切线 AT

(D) 正弦线 PM,正切线 $T'A'$



(第 21 题)

22. 下列条件中,能使 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$ 成立的是(　　).

(A) $0<\alpha<\pi$　　(B) $0<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

(C) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$

23. 函数 $y=\sqrt{2\cos x-1}$的定义域是(　　).

(A) $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(B) $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(C) $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

(D) $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

24. 使 $\sin x\leqslant\cos x$ 成立的 x 的一个变化区间为(　　).

(A) $\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4}\right]$　　(B) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$　　(D) $[0,\pi]$

25. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限内,则在 $[0,2\pi]$内 α 的取值范围是(　　).

(A) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

(B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

(D) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

26. $\sin 1,\sin 1.2,\sin 1.5$ 的大小关系是(　　).

(A) $\sin 1>\sin 1.2>\sin 1.5$

(B) $\sin 1>\sin 1.5>\sin 1.2$

(C) $\sin 1.5>\sin 1.2>\sin 1$

(D) $\sin 1.2>\sin 1>\sin 1.5$

27. 若 $\log_{\cos\theta}\sin\theta$ 有意义,则 θ 的取值范围是__________.

28. 求函数 $y=\sqrt{-\cos x}+\sqrt{\sin x}$的定义域.

29. 求函数 $y=\lg\sin 2x+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域.

30. 设 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,试比较 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小.

B 组

31. 若 $\sin^2x>\cos^2x$,则 x 的取值范围是(　　).

(A) $\left\{x\middle|2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\middle|k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

32. 求函数 $y=\sqrt{1+2\cos x}+\lg(2\sin x+\sqrt{3})$的定义域.

33. 求函数 $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$的定义域.

34. 已知 $|\log_{\sin\alpha}\cos\alpha|<|\log_{\cos\alpha}\sin\alpha|$($\alpha$ 为锐角),求 α 的取值范围.

35. 已知 α,β是关于 x 的二次方程 $x^2+2(\cos\theta+1)x+\cos^2\theta=0$ 的两实数根,且 $|\alpha-\beta|\leqslant 2\sqrt{2}$,求 θ 的取值范围.

1.2.2 同角三角函数的基本关系

例 说

例 1 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{2\cos\alpha+3\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$；

(2) $2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

分析 将所求式的“正弦、余弦”化为“正切”. 第(1)题，分子、分母同除以 $\cos\alpha$，第(2)题，分母 1 用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 替代，分子、分母同除以 $\cos^2\alpha$.

解 (1) $\because\ \cos\alpha\neq0$，$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2+3\tan\alpha}{3+\tan\alpha}=-\dfrac{6}{5}$.

(2) 原式 $=\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{2\tan^2\alpha+\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}=-\dfrac{7}{25}$.

[redacted] 本题利用 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 的关系，把只含正弦和余弦的齐次分式转化为只含有正切的分式. 本题还可由 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，得 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{3}\cos\alpha$，再进行整体代换求解.

例 2 (1) 求值：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\sin10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}$；

(2) 化简：

$\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$.

分析 将被开方式化为完全平方式，要注意二次根号下的符号处理.

解 (1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ-2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\sin10^\circ-\sqrt{\cos^2 10^\circ}}$

$=\dfrac{|\cos10^\circ-\sin10^\circ|}{\sin10^\circ-\cos10^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ-\sin10^\circ}{\sin10^\circ-\cos10^\circ}=-1$.

(2) 原式 $=\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin^2x}{(1+\sin x)^2}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin^2x}{(1-\sin x)^2}}\right)\cdot$

$\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos^2x}{(1+\cos x)^2}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos^2x}{(1-\cos x)^2}}\right)$

$=\left(\dfrac{|\cos x|}{1+\sin x}-\dfrac{|\cos x|}{1-\sin x}\right)\left(\dfrac{|\sin x|}{1+\cos x}-\dfrac{|\sin x|}{1-\cos x}\right)$

$=\dfrac{|\cos x|(-2\sin x)}{\cos^2x}\cdot\dfrac{|\sin x|(-2\cos x)}{\sin^2x}$

$=\dfrac{4|\sin x\cos x|}{\sin x\cos x}\ \left(x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，原式 $=4$；

当 $x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\pi+\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，原式 $=-4$.

例 3 已知函数 $f(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$，求函数 $f(\tan\alpha)$ 的最大值与最小值.

分析 由已知条件求出函数 $f(\tan\alpha)$ 的表达式，然后利用 $\cos\alpha$ 对函数 $f(x)$ 定义域的限制，确定 $\tan\alpha$ 的范围，从而得到最大值与最小值.

解 令 $1-\cos\alpha=x$，则 $\cos\alpha=1-x$.

$\therefore$ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-(1-x)^2$.

$\therefore$ $f(x)=1-(1-x)^2=2x-x^2$.

$\because$ $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$，

$\therefore$ $0\leqslant1-\cos\alpha\leqslant2$，即 $x\in[0,2]$.

$\therefore$ $f(\tan\alpha)=2\tan\alpha-\tan^2\alpha\ \ (0\leqslant\tan\alpha\leqslant2)$.

设 $\tan\alpha=t\ \ (t\in[0,2])$，

则 $f(t)=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$.

$\therefore$ $f(t)$ 的最大值为 $f(1)=1$，$f(t)$ 的最小值为 $f(0)=f(2)=0$.

故 $f(\tan\alpha)$ 的最大值为 1，最小值为 0.

训 练

A 组

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\alpha$ 的值为(　　).

(A) $-\dfrac{4}{3}$　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C) $-\dfrac{3}{4}$　(D) $\pm\dfrac{4}{3}$

2. 当 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\alpha$ 的值为(　　).

(A) $-\dfrac{3\sqrt5}{5}$　(B) $-\dfrac{2\sqrt5}{5}$

(C) $\dfrac{3\sqrt5}{5}$　(D) $-\dfrac{\sqrt5}{5}$

3. 已知 $\sin A=\dfrac{12}{13}$，$-\dfrac{3\pi}{2}<A<-\pi$，则 $\tan A$ 的值为(　　).

(A) $\dfrac{5}{12}$　(B) $\dfrac{12}{5}$　(C) $-\dfrac{5}{12}$　(D) $-\dfrac{12}{5}$

4. 化简 $\sqrt{1-2\sin4\cos4}$ 的结果是(　　).

(A) $\sin4+\cos4$　(B) $\sin4-\cos4$

(C) $-\cos4-\sin4$　(D) $\cos4-\sin4$

5. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ 的值为(　　).

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) 3　(C) $-\dfrac{1}{3}$　(D) -3

6. 若 $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$，则 x 的取值范围是(　　).

(A) $2k\pi\leqslant x\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

(B) $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

(C) $2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}<x<2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}$

(D) $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

7. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\tan\theta=$________.

8. 已知 $\frac{\sin^2\theta+4}{\cos\theta+1}=2$，则 $(\cos\theta+3)(\sin\theta+1)$ 的值为________.

9. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$________.

10. 已知 $\cos\varphi=\frac{1}{4}$，求 $\sin\varphi$，$\tan\varphi$ 的值.

11. 已知 $3\sin\alpha=-\cos\alpha$，求 $1+\sin\alpha\cos\alpha$ 的值.

12. 已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的二次方程 $x^2-(\sqrt{3}-1)x+m=0$ $(m\in\mathbf{R})$的两个实数根. 求：
(1) m 的值；
(2) $\frac{\cos\theta-\sin\theta\tan\theta}{1-\tan\theta}$的值.

B　组

13. 已知 α 是三角形的一个内角，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$，则这个三角形是(　　).
(A) 正三角形　　(B) 直角三角形
(C) 锐角三角形　　(D) 钝角三角形

14. 当 $2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，化简 $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$ 的结果是(　　).
(A) $2\sin\alpha$　　(B) $-2\sin\alpha$
(C) $-2\cos\alpha$　　(D) $2\cos\alpha$

15. 已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}$，则下列结论成立的是(　　).
(A) $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\sin\theta+\cos\theta=0$　　(D) $\sin\theta-\cos\theta=0$

16. 已知 $\beta\in[0,2\pi]$，且 $\sqrt{1-\cos^2\beta}+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sin\beta-\cos\beta$，则 β 的取值范围是(　　).
(A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　(B) $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$
(C) $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$　　(D) $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

17. 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，且 $\tan\alpha>0$，求$\frac{\tan\alpha\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha}$的值.

18. 求证：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

19. 已知 $f(x)=8x^2-6x+2k+1$.
(1) 若 $f(x)=0$ 的两个实数根分别为三角形两内角的正弦值，求实数 k 的取值范围；
(2) 问是否存在实数 k，使得方程 $f(x)=0$ 的两个实数根是直角三角形两个内角的正弦值.

1.3　三角函数的诱导公式

三角函数的诱导公式(一)

例说

例 1　求证：$\frac{\tan(2\pi-\alpha)\sin(-2\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}{\cos(\alpha-\pi)\sin(5\pi+\alpha)}=\tan\alpha$.

证明　$\because$　左边$=\frac{\tan(-\alpha)\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos[-(\pi-\alpha)]\sin(4\pi+\pi+\alpha)}$

$=\frac{(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)\cos\alpha}{(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}=\tan\alpha=$右边，

$\therefore$　原等式成立.

由于诱导公式中的 α 是任意角，因此，可以把“$-\alpha$”作为一个整体看成公式中的“α”，从而灵活运用诱导公式.