SHUXUE

数学

（上册）

主 编／杨永洲

武汉理工大学出版社

前　言

为认真贯彻全国职业教育工作会议精神，根据国家教育部颁布的文化基础课教学大纲的要求，我们组织编写了这套可供试行“2＋1”模式的中等职业学校使用的教材。

本教材遵循“加强基础，注重能力培养，突出应用，增加弹性，适度更新，兼顾体系”的原则，在教材结构、教学内容以及习题编排等方面，力求体现中等职业教育的特点，强调实用性和适用性，将在现代社会生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证中职教育的基本水准。在编写过程中，我们考虑到目前中职学生的实际情况，从学生的年龄特征和现有的知识水平出发，结合中职学校的教学改革，在介绍定义、公式和定理时力求简明扼要，尽量避免烦琐的理论推导。同时注意了教材的系统性、科学性以及各部分内容的相互独立，注重概念之间的平稳过渡，尽量做到学生在学习时感到相对轻松，让学生在原有的基础上都能够学有所获。

教材通过模块式的编排，使之具有一定的弹性，从而适用面更为广泛。教材注重对学生的应用意识和能力的培养，重视从实际问题抽象出数学概念再应用相关知识解决简单实际问题的过程。使学生学会运用数学思想、方法、思维方式观察分析解决实际问题，增强学好数学的信心。

本教材由杨永洲任主编，陈光明、黄有慧任副主编。参加编写的有徐桃芝、翟华丽、张文静、刘明。

本教材在编写过程中得到了武汉市第二轻工业学校领导和老师的大力支持，在此表示诚挚的谢意。

由于编写时间仓促和水平有限，不妥之处在所难免，诚恳地希望从事职业教育的同仁批评指正。

编　者

2006 年 6 月

目　录

1　集合与不等式

集合是数学中最基本的概念之一，不等式是进一步学习数学和其他科学的基础. 学好这一章有助于准确理解以后各章的内容，并将提高我们运用数学语言去理解和处理问题的能力.

1.1　集　　合

1.1.1　集合与元素

观察下面几组对象：

(1) 某校计算机专业的全体学生；

(2) 不超过 5 的所有自然数；

(3) 所有的直角三角形；

(4) 不等式 $x-5>3$ 的所有解；

(5) 平面上与点 O 距离为 2cm 的所有点形成的一个圆.

它们分别是由一些人、一些数、一些点、一些图形组成的. 一般的，我们把某些确定的对象组成的总体叫做**集合**(也简称**集**). 集合里的每个对象叫做这个集合的**元素**. 例如，(2)是由不超过 5 的所有自然数组成的集合，其中 0,1,2,3,4,5 都是这个集合的元素.

我们一般的用大括号表示集合，习惯上还经常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合；例如，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$.

对于一个给定的集合，其中的元素必须是确定的. 也就是说，任何一个对象要么是这个集合的元素，要么就不是它的元素，二者必居其一. 例如：给出集合{地球上的四大洋}，它只有太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋四个元素，其他的对象都不是它的元素. 又如，"我国的小河流"就不能组成一个集合，因为组成它的对象是不确定的.

集合中的元素又是互异的，每个元素不能重复出现. 任何两个相同的对象在同一个集合中，只能算作这个集合的一个元素.

集合中的元素是没有顺序的.

以上分别表述为集合中元素的三个特征：**确定性**、**互异性**、**无序性**.

由数组成的集合简称**数集**. 下面是一些常用的数集，用固定的黑体字母来表示：

全体非负整数的集合简称为**非负整数集**(或**自然数集**)，记作 $\mathbf{N}$(注意：0 也是自然数)；

非负整数内排除 0 的集合简称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合简称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合简称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合简称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

集合的元素用小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是 A 的元素，就说 a **不属于** A，记作 $a\notin A$. 例如：设 $B=\{0,1,2,3,4,5\}$，那么 2

$\in B, 5\in B, \frac{3}{2}\notin B$. 又如 $6\in \mathbf{N}, \frac{3}{2}\notin \mathbf{N}, \frac{3}{2}\in \mathbf{Q}, \frac{3}{2}\notin \mathbf{Z}$.

1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

列举法是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法. 例如，$x^2-1=0$ 的所有解组成的集合，可以表示为：

$$\{-1,1\} \text{ 或 } \{1,-1\}$$

又如，小于 100 的所有自然数组成的集合可以表示为$\{0,1,2,3,\cdots,99\}$.

注：集合$\{-1,1\}$的元素有 2 个. 集合$\{0,1,2,3,\cdots,99\}$的元素有 100 个. 一般的，含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

描述法是把集合中含有的所有元素的共同特征描述出来，写在大括号内表示集合的方法. 通常在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再画上一条竖线，在竖线右边写上这个集合元素的公共属性.

例如，不等式 $x-3>2$ 的解集可以表示为：

$$\{x \mid x-3>2\}$$

注：集合$\{x \mid x-3>2\}$的元素有无限个. 一般的，含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

又如，由小于 10 的所有的自然数组成的集合也可以表示为：

$$\{x \mid x<10, x\in \mathbf{N}\}$$

再看一个例子，由方程 $x^2+1=0$ 的所有实数解组成的集合，可以表示为$\{x \mid x^2+1=0, x\in \mathbf{R}\}$. 这个集合是没有元素的.

一般的，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$.

例如，$0\notin\varnothing, a\notin\varnothing, \{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$.

为了形象直观地表示集合，我们常画一条封闭的曲线，用它的内部表示集合，这种表示集合的方法称作**文氏图法**.

例如，图 1-1 表示任意一个集合 A；图 1-2 表示集合$\{1,2,3,4\}$.

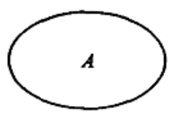

图 1-1

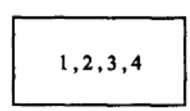

图 1-2

例 1 分别用列举法和描述法表示由所有的大于 1 且小于 11 的偶数组成的集合.

解： 用列举法表示为：

$$\{2,4,6,8,10\}$$

用描述法表示为：

$$\{x \mid x \text{ 为大于 1 且小于 11 的偶数}\}$$

练习

1.（口答）说出下面集合中的元素：

(1) {大于 3 小于 11 的偶数};

(2) {平方等于 1 的数};

(3) {一年中有 31 天的月份};

(4) {中国古代四大发明}.

2. 用符号$\in$或$\notin$填空:

1 __ $\mathbf{N}$, 0 __ $\mathbf{N}$, -3 __ $\mathbf{N}$, 0.5 __ $\mathbf{N}$, $\sqrt{2}$ __ $\mathbf{N}$;

1 __ $\mathbf{Z}$, 0 __ $\mathbf{Z}$, -3 __ $\mathbf{Z}$, 0.5 __ $\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}$ __ $\mathbf{Z}$;

1 __ $\mathbf{Q}$, 0 __ $\mathbf{Q}$, -3 __ $\mathbf{Q}$, 0.5 __ $\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}$ __ $\mathbf{Q}$;

1 __ $\mathbf{R}$, 0 __ $\mathbf{R}$, -3 __ $\mathbf{R}$, 0.5 __ $\mathbf{R}$, $\sqrt{2}$ __ $\mathbf{R}$.

习题 1-1

1. 用适当的方法表示下列集合,然后说出它们是有限集还是无限集:

(1) 用大于 10 的所有自然数组成的集合;

(2) 由 24 和 30 的所有公约数组成的集合;

(3) 9 的平方根组成的集合.

2. 用描述法表示下列集合:

(1) 由 4 与 6 的所有公倍数组成的集合;

(2) 所有正偶数组成的集合;

(3) 方程 $x+3=0$ 的解集;

(4) 不等式 $4x-6<5$ 的解集.

3. 用符号$\in$或$\notin$填空:

(1) 若 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}$, 则 3 __ A;

(2) 若 $B=\{x\in\mathbf{N} \mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$, 则 8 __ B;

(3) 若 $C=\{x\in\mathbf{Z} \mid -2<x<3\}$, 则 1.5 __ C.

1.2 集合之间的关系

在集合与集合之间,存在着"包含"与"相等"的关系.先看集合与集合之间的"包含"关系.设

$$A=\{1,2,3\},\qquad B=\{1,2,3,4,5\},$$

集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素,即集合 A 是集合 B 的一部分,我们就说集合 B 包含集合 A.

一般的,对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说**集合 A 包含于集合 B**,或**集合 B 包含集合 A**,记作

$$A\subseteq B \quad (或\ B\supseteq A)$$

这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

当集合 A 不包含于集合 B,或集合 B 不包含集合 A 时,则记作

$$A\nsubseteq B \quad (或\ B\nsupseteq A)$$

我们规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何一个集合 A，有

$$\varnothing \subseteq A$$

再看集合与集合之间的"相等"关系. 设

$$A=\{x \mid x^2-1=0\}, \qquad B=\{-1,1\},$$

集合 A 与集合 B 中的元素是相同的，我们就说**集合 A 等于集合 B**.

一般的，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 与集合 B 的元素完全相同，我们就说集合 A 等于集合 B. 记作

$$A=B$$

由子集的定义容易得到：

如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

由集合的"包含"与"相等"的关系，可以得出下面的结论.

(1) 对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A，所以

$$A\subseteq A$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的一个子集.

我们常常涉及到"真正的子集"的问题. 对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作

$$A\subsetneqq B \quad (\text{或 } B\supsetneqq A)$$

用图形表示如图 1-3.

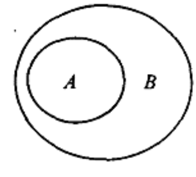

图 1-3

显然，空集是任何非空集合的真子集.

容易知道，对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B, B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

同样可知，对于集合 A,B,C，如果 $A\subsetneqq B, B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

(2) 对于集合 A,B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

例 1 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集与真子集.

解： 集合 $\{a,b\}$ 的所有子集是：$\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}$.

集合 $\{a,b\}$ 的所有真子集是：$\varnothing,\{a\},\{b\}$.

例 2 说出自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$ 之间的关系.

解： $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

练　习

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,3\}$，则__是__的子集，记作__$\subseteq$__.
2. 将符号 $\subseteq$ 或 $\supseteq$ 填入空格：

   $\mathbf{N}^*$ __ $\mathbf{N}$；$\mathbf{N}$ __ $\mathbf{Z}$；$\mathbf{Z}$ __ $\mathbf{Q}$；$\mathbf{Q}$ __ $\mathbf{R}$；$\mathbf{Z}$ __ $\mathbf{R}$；$\mathbf{N}$ __ $\mathbf{R}$.
3. 选用适当的符号（$\in,\notin,=,\supsetneqq,\subsetneqq$）填入空格：

   (1) 2 __ $\{2\}$；　(2) a __ $\{a\}$；　(3) 0 __ $\varnothing$；　(4) $\{0\}$ __ $\varnothing$；

   (5) $\{3,5\}$ __ $\{1,3,5,7\}$；　(6) $\{2,4,6,8\}$ __ $\{2,8\}$.

习　题　1-2

1. 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.
2. 选用适当的符号（$\in,\notin,=,\subsetneqq,\supsetneqq$）填空：

(1) a __ $\{a\}$；(2)a __ $\{a,b,c\}$；(3)d __ $\{a,b,c\}$；(4) $\{a\}$__$\{a,b,c\}$；
(5) $\{a,b\}$__ $\{a,b,c\}$；(6) $\varnothing$ __ $\{1,2,3\}$；(7) $\{0\}$ __ $\varnothing$；
(8) $\{1,2,4,8\}$__$\{x$ 是 8 的约数$\}$.

1.3 集合的运算

1.3.1 交集、并集

看下面的三个图.

图 1-4(a)中给出了两个集合 A 与 B，集合 A 与 B 的公共部分就叫做 A 与 B 的交集(图 1-4(b)的阴影部分)，集合 A 与 B 合并到一起得到的集合叫做集合 A 与 B 的并集(图 1-4(c)、(d)的阴影部分).

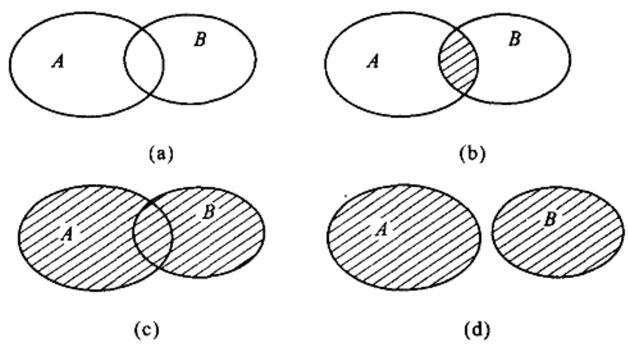

图 1-4

一般的，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$ (读作"A 交 B")，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

而由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$ (读作"A 并 B")，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例 1 设 $A=\{x\mid x>-2\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，求 $A\cap B$.

解： $A\cap B=\{x\mid x>-2\}\cap\{x\mid x<3\}$
$=\{x\mid -2<x<3\}$

例 2 设 $A=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

解： $A\cap B=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}\cap\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$
$=\{x\mid x$ 是等腰直角三角形$\}$

例 3 设 $A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{4,5,6,8\}\cup\{3,5,7,8\}$
$=\{3,4,5,6,7,8\}$

注：两个集合的公共元素，在并集中只能出现一次. 集合中的元素是没有重复的.

例 4 设 $A=\{x \mid x+1<0\}$，$B=\{x \mid x-2>0\}$，求 $A\cup B$.

解： 容易看出 $A=\{x \mid x<-1\}$，$B=\{x \mid x>2\}$，

因此 $A\cup B=\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$.

由交集的定义容易知道，对于任何集合 A,B，有

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap B=B\cap A.$$

由并集的定义容易知道，对于任何集合 A,B，有

$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cup B=B\cup A.$$

1.3.2 全集与补集

在研究集合与集合的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个**全集**，通常用 U 表示.

一般的，设 U 是全集，A 是 U 的一个子集（即 $A\subseteq U$），由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 U 中子集 A 的**补集**（或**余集**），记作$\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U,\ 且\ x\notin A\}.$$

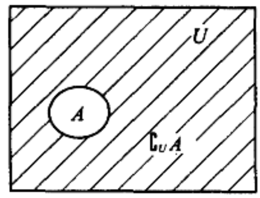

图 1-5

图 1-5 中的阴影部分表示 A 在 U 中的补集$\complement_U A$.

从补集的定义可知，对于 U 的任意子集 A，有

$$A\cap\complement_U A=\varnothing,\quad A\cup\complement_U A=U,\quad \complement_U(\complement_U A)=A.$$

其中$\complement_U(\complement_U A)$表示$\complement_U A$ 的补集.

例如，在实数范围内讨论时，可以把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集 U，那么，有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集$\complement_U\mathbf{Q}$是全体无理数的集合.

例 5 设 $U=\{x \mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

解： 因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

所以$\complement_U A=\{4,5,6,7,8\}$，$\complement_U B=\{1,2,7,8\}$.

练 习

1. 在空格上填写适当的集合：

(1) $A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，$A\cap B=$____，$A\cup B=$____；

(2) $A=\{x \mid x$ 是锐角三角形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是钝角三角形$\}$，$A\cap B=$____，$A\cup B=$____；

(3) $A=\{x \mid x>-2\}$，$B=\{x \mid x\geqslant 3\}$，$A\cap B=$____，$A\cup B=$____；

(4) $A\cap\varnothing=$____，$A\cup\varnothing=$____.

2. 在下列各题中，求 $A\cap B$：

(1) $A=\{x \mid x\geqslant -2\}$，$B=\{x \mid x\leqslant 5\}$；

(2) $A=\{x \mid x<3\}$，$B=\{x \mid x\geqslant 0\}$.

3. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

习 题 1-3

1. 用适当的集合填空：

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
B	___	$\underline{B\cap A}$	___

2. 用适当的集合填空：

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	$\underline{A}$	___	___
B	___	___	___

3. 设 $A=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x \mid x>0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
4. 设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0,2\}$，求 $A\cup C$，$B\cup C$.
5. 设 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,c,d\}$，$B=\{b,d,e\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

1.4 不等式的性质

1.4.1 比较实数大小的方法

我们知道，实数可以用数轴上的点来表示，数轴上两个不同的点 A 和 B，表示两个不同的实数 a 和 b（如图 1-6），数轴上右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

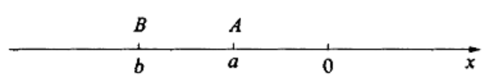

图 1-6

因此，要比较两个实数 a 和 b 的大小，只要考虑它们的差是大于零还是小于零或等于零.

一般的，对于实数 a,b，如果 $a-b>0$，那么称 a 大于 b（或 b 小于 a），记作 $a>b$（或 $b<a$）.

对于任意实数 a,b，有

$$a>b \iff a-b>0;$$
$$a=b \iff a-b=0;$$
$$a<b \iff a-b<0.$$

例 1 比较 $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{5}{7}$ 的大小.

解： 因为 $\frac{3}{4}-\frac{5}{7}=\frac{21-20}{28}=\frac{1}{28}>0$

所以$\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$

例 2 比较$(x+3)(x-5)$和$(x+2)(x-4)$的大小.

解: 因为 $(x+3)(x-5)-(x+2)(x-4)$

$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$

$=-7<0$

所以$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$

含有不等号($<$、$>$、$\leqslant$、$\geqslant$、$\neq$)的式子,叫做**不等式**.

例如 $3x+4>2x-5$,$a^2+b^2>1$,$x^2-2x+3\geqslant 0$ 等等都是不等式.

如果两个不等式里每一个的左边都大于右边,或者每一个的左边都小于右边,它们就叫做**同向不等式**.

如果一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,则这两个不等式就叫做**异向不等式**.

例如:$a>b$ 和 $c>d$ 是同向不等式;$a>b$ 和 $c<d$ 是异向不等式.

1.4.2 不等式的性质

性质 1 如果 $a>b$ 且 $b>c$,则 $a>c$.

这个性质叫做不等式的**传递性**.

性质 2 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

这个性质叫做不等式的**单调性**.

注:不等式的两边加上(或减去)同一个实数,不等号的方向不变.

性质 3 如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$.

注:不等式的两边乘以同一个正数,不等号的方向不变,而乘以同一个负数,不等号的方向要改变.

性质 4 如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$.

注:几个同向不等式分别相加,仍得同向不等式.

性质 5 如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $ac>bd$.

注:两个两边都是正数的同向不等式,把它们的两边分别相乘,所得不等式与原不等式同向.

性质 6 如果 $a>0,b>0$,那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$或$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. 当且仅当 $a=b$ 时,取“$=$”号.

注:两个正数的算术平均数大于或等于它们的几何平均数$\left(\frac{a+b}{2}\right.$叫做 a 与 b 的算术平均数;$\sqrt{ab}$叫做 a 与 b 的几何平均数$\left.\right)$.

例 3 如果 $a>b$,则 $a+2>b+2$,$a-5>b-5$.

如果 $a>b$,则 $3a>3b$,$-2a<-2b$.

如果 $a>b>0,8>5>0$,那么 $8a>5b$.

如果 $a>b$,$-3>-4$,那么 $a-3>b-4$.

1.4.3 不等式的证明

证明不等式最基本、最重要的方法是比较法.也就是用比较实数大小的方法来证明不等式,其证明步骤是:作差、变形、判断符号.

例 4 求证:$x^2+3>3x$.

证明: 因为 $x^2+3-3x=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$$

所以 $x^2+3>3x$.

例 5 已知 $x>0,y>0$.

(1) 设 $x+y=8$,求 xy 的最大值;

(2) 设 $xy=4$,求 $x+y$ 的最小值.

解: (1)因为根据性质 6:$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=4$,

两边平方得:$xy\leqslant16$.

所以 xy 的最大值是 16.

(2)因为 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}=2\sqrt{4}=4$,即 $x+y\geqslant4$.

所以 $x+y$ 的最小值是 4.

一般的,如果两正数的和是定值,则当且仅当两正数相等时,它们的积取得最大值;如果两正数的积是定值,则当且仅当两正数相等时,它们的和取得最小值.

练 习

1. 用适当的数填入空格:

(1) 如果 $x-3>7$,则 $x>$______;　(2) 如果 $x+4\leqslant3$,则 $x\leqslant$______;

(3) 设 $2x>5$,则 $x>$______;　(4) 设 $2x+1<7$,则 $x<$______;

(5) 设 $3x-1>-10$,则 $x>$______;　(6) 设 $-3x-1<-10$,则 $x>$______.

2. 把下列的数,按照从小到大的顺序排列:

$0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\pi$.

习 题 1-4

1. 比较下列各组中两数的大小:

(1) $(a+5)(a+7)$和$(a+6)^2$;

(2) x^2+2 与 $5(x-1)$的大小.

2. 已知 $a>0,b>0,ab=25$,求 $a+b$ 的最小值.

3. 已知 $a>0,b>0,a+b=12$,求 ab 的最大值.

4. 已知 a,b,c 是互不相等的正数,试根据性质 6 证明:$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

1.4* 充分条件与必要条件

我们在初中已经学过，可以判断真假的语句叫做命题，命题通常用小写的拉丁字母 p，q，r，s…来表示.

例如： p：两个三角形全等． q：两个三角形的面积相等.

这两个命题的关系可以写成：

如果“两个三角形全等”，则“两个三角形的面积相等”

即：如果 p 成立，可以推出 q 也成立，记作 $p\Rightarrow q$，如果由 p 推不出 q，则记作 $p\nRightarrow q$.

一般的，如果已知 $p\Rightarrow q$，那么我们说，p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**.

在上例中，“两个三角形全等”是“两个三角形的面积相等”的充分条件，“两个三角形的面积相等”是“两个三角形全等”的必要条件.

例 1 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件.

(1) p：$x=y$；q：$x^2=y^2$.

(2) p：三角形的三条边相等；q：三角形的三个角相等.

解： (1)由 $p\Rightarrow q$，即 $x=y\Rightarrow x^2=y^2$，知 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

(2)由 $p\Rightarrow q$，即三角形的三条边相等$\Rightarrow$三角形的三个角相等，知 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

反过来，由 $q\Rightarrow p$，即三角形的三个角相等$\Rightarrow$三角形的三条边相等，知 q 也是 p 的充分条件，p 也是 q 的必要条件.

在例 1 的第(2)小题中，“三角形的三条边相等”既是“三角形的三个角相等”的充分条件，又是“三角形的三个角相等”的必要条件，我们就说“三角形的三条边相等”是“三角形的三个角相等”的充分必要条件，简称充要条件.

一般的，如果既有 $p\Rightarrow q$ 又有 $q\Rightarrow p$，就记作：

$$p\Leftrightarrow q$$

这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，我们就说 p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**.

例 2 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件(在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种).

(1) p：$(x-2)(x-3)=0$； q：$x-2=0$.

(2) p：同位角相等；q：两直线平行.

(3) p：$x=3$； q：$x^2=9$.

(4) p：四边形的对角线相等；q：四边形是平行四边形.

解： (1) $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$

$(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$

所以，p 是 q 的必要而不充分条件.

(2) 同位角相等$\Leftrightarrow$两直线平行.

所以，p 是 q 的充要条件.

(3) $x=3\Rightarrow x^2=9$

$x^2=9\nRightarrow x=3$

所以，p 是 q 的充分而不必要条件.

(4) 四边形的对角线相等$\nRightarrow$四边形是平行四边形，

四边形是平行四边形$\nRightarrow$四边形的对角线相等.

所以，p 是 q 的既不充分也不必要条件.

练 习

1. 从“$\Rightarrow$”、“$\nRightarrow$”与“$\Leftrightarrow$”中选出适当的符号填空：

(1) $x>-1$ ____ $x>1$；

(2) $x^2=3x+4$ ____ $x=\sqrt{3x+4}$；

(3) $a=b$ ____ $a+c=b+c$.

2. 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”与“充要条件”中选出适当的一种填空：

(1) “两个三角形全等”是“两个三角形相似”的______；

(2) “$a\in \mathbf{N}$”是“$a\in \mathbf{Z}$”的______；

(3) “$x<5$”是“$x<3$”的______；

(4) “四边相等”是“四边形是正方形”的______；

(5) “两数相等”是“两数之差为 0”的______.

1.5 区间的概念与一元一次不等式组

1.5.1 区间的概念

介于两个实数之间的所有实数 x 的集合叫做区间，这两个实数叫做区间的端点.

为了简便起见，在表示不等式的解集时常常要用到区间.

设 a,b 为任意两个实数，而且 $a<b$，则：

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，叫做以 a,b 为端点的**闭区间**，在数轴上表示如图 1-7 所示，其中实心点“•”表示含区间端点.

$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，叫做以 a,b 为端点的**开区间**，在数轴上表示如图 1-8 所示，其中空心点“∘”表示不含区间端点.

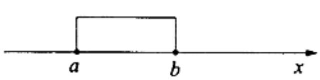

图 1-7

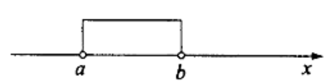

图 1-8

区间$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$分别叫做右半开、左半开区间，在数轴上分别表示如图 1-9 中(a)、(b)所示.

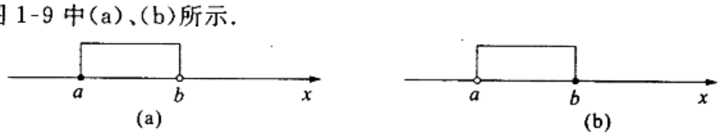

图 1-9

端点间的距离称为区间的长，区间的长为有限时，称为有限区间. 以上介绍的四种区间都是有限区间. 而区间长为无限时，称为无限区间. 如下面介绍的几种区间：

$$(a,\ +\infty)=\{x \mid x>a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};$$
$$[a,\ +\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,\ b]=\{x \mid x\leqslant b\}.$$

它们在数轴上分别如图 1-10 中(a)、(b)、(c)、(d)所示. 其中符号“∞”读作无穷大，它仅是一个符号，不是一个数. 符号“$+\infty$”读作正无穷大，符号“$-\infty$”读作负无穷大. 引入“∞”后，实数集 **R** 可用区间$(-\infty,\ +\infty)$表示，这些长度为无限的区间都是无限区间.

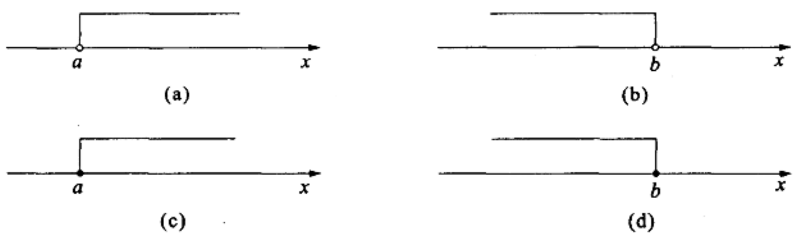

图 1-10

1.5.2 一元一次不等式组的解法

由多个一元一次不等式组成的不等式组，称为一元一次不等式组. 这些一元一次不等式的解集的交集，称为这个一元一次不等式组的解集.

根据以上定义我们可知，两个一元一次不等式所组成的不等式组的解集有如下四种情况(设 $a<b$)：

(1)$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$ 解集为$\{x \mid x>b\}$，区间表示为$(b,+\infty)$；

(2)$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$ 解集为$\{x \mid x<a\}$，区间表示为$(-\infty,a)$；

(3)$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$ 解集为$\{x \mid a<x<b\}$，区间表示为(a,b)；

(4)$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$ 解集为 $\varnothing$.

例 1 解不等式组$\begin{cases}2x-3>0\\x-5>0\end{cases}$.

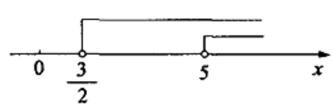

图 1-11

解：不等式 $2x-3>0$ 的解集为$\{x \mid x>\frac{3}{2}\}$，不等式 $x-5>0$ 的解集为$\{x \mid x>5\}$，所以使原不等式组成立的解集为：

$$\{x \mid x>\frac{3}{2}\}\cap\{x \mid x>5\}=\{x \mid x>5\}$$

用区间表示为$(5,\ +\infty)$，在数轴上表示，如图 1-11 所示.

例 2 解不等式组$\begin{cases}2x-7\leqslant 2-x\\3x+4>x+2\end{cases}$.

解： 不等式 $2x-7\leqslant 2-x$ 的解集为$\{x \mid x\leqslant 3\}$，不等式 $3x+4>x+2$ 的解集为$\{x \mid x>-1\}$，所以使原不等式组成立的解集为：

$$\{x \mid x\leqslant 3\}\cap\{x \mid x>-1\}=\{x \mid -1<x\leqslant 3\}$$

用区间表示为$(-1, 3]$，在数轴上表示，如图 1-12 所示.

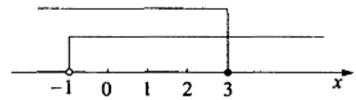

图 1-12

例 3 解不等式组$\begin{cases}3(x+1)<x+3\\3x-2>7\end{cases}$.

解： 不等式 $3(x+1)<x+3$ 的解集为$\{x \mid x<0\}$，不等式 $3x-2>7$ 的解集为$\{x \mid x>3\}$，但$\{x \mid x<0\}\cap\{x \mid x>3\}=\varnothing$，所以此不等式组无解. 它在数轴上没有公共部分，因而不能用任何点表示，如图 1-13 所示.

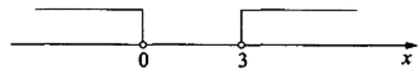

图 1-13

练 习

1. 选用适当的区间填入空格：

(1) $\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$ 可以记作__________；

(2) $\{x \mid -2<x\leqslant 3\}$ 可以记作__________；

(3) $\{x \mid x\leqslant -2\}$ 可以记作__________；

(4) $\{x \mid x\geqslant 5\}$ 可以记作__________.

2. 解下列不等式组，并在数轴上表示不等式组的解集：

(1)$\begin{cases}4x-4>3x+5\\3x-2>2x+3\end{cases}$；　　(2)$\begin{cases}x+3\leqslant 4\\x+5\geqslant -1\end{cases}$.

习 题 1-5

1. 选用适当的区间填入空格：

(1) $\{x \mid -2<x<3\}$ 可以记作__________；

(2) $\{x \mid -2\leqslant x<3\}$ 可以记作__________；

(3) $\{x \mid x<-2\}$ 可以记作__________；

(4) $\{x \mid x>5\}$ 可以记作__________.

2. 解下列不等式组，并在数轴上表示不等式组的解集：

(1)$\begin{cases}3x-1>5\\1-x<2\end{cases}$；　　(2)$\begin{cases}2x-11>19-x\\x+3>5x-1\end{cases}$.