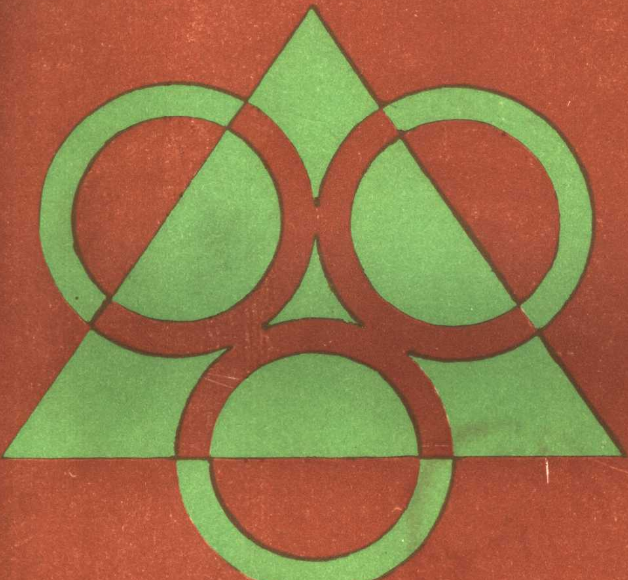
技工学校通用教材

数学



劳動人事出版社

本书是根据劳动人事部培训就业局审定颁发的《数学教学大纲》编写的，是供技工学校招收初中毕业生使用的统编教材。非机械类工种可以选用，也可作青工和职工自学用书。

内容包括：集合与函数，指数与对数函数，三角形的解法及应用，任意角、两角和与差的三角函数，三角函数的图象和性质，反三角函数与简单的三角方程，复数，直线和平面，多面体和旋转体，直线，二次曲线，参数方程与极坐标等。

本书由沈炎金、崔复升、王志和、古文卿编写，陈泉亮、杜韵合审稿，鲍珑等编辑加工。主编沈炎金。主审陈泉亮。

数　学

劳动人事部培训就业局编

劳动人事出版社出版

（北京市和平里中街 12 号）

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092 32 开本　16.75 印张　369 千字

1985 年 3 月北京第 1 版　1987 年 2 月北京第 5 次印刷

ISBN 7-5045-0016-X/O·004　统一书号：7238·080

印数：430 [illegible]50 册　　定价：2.00元

前　言

为了适应技工学校逐步转向以招收初中毕业生为主的教学要求，我局于一九八三年七月委托部分省、市劳动人事厅（劳动局），分别组织编写了适合初中毕业生使用的技工学校机械类通用工种所需的教材。这次组织编写的有语文、数学、物理、化学、工程力学、机械基础、金属材料与热处理、电工学、机械制图（配套使用的有机械制图习题集）、车工工艺学（配套使用的有车工工艺学习题集）、车工生产实习、钳工工艺学、钳工生产实习、铸工工艺学、铸工生产实习、铆工工艺学、机械制造工艺基础等十七种。其中语文、数学、物理、化学非机械类工种可以选用。其他课程的教材，以后将陆续组织编写。

上述十七种教材，是按照党的教育方针，本着改革的精神组织编写的。在内容上，力求做到理论与实际相结合，符合循序渐进的要求，从打好基础入手，突出机械类技工学校生产实习教学的特点，密切联系我国机械工业的生产实际，并且尽量反映工业生产中采用新材料、新设备、新技术、新工艺的成就，以便使培养出来的学生，能够具有一定的文化知识，比较

系统地掌握专业技术理论和一定操作技能，为今后的进一步提高打下基础。

这次组织编写教材的工作，由于时间比较紧促，经验不足，缺点和错误在所难免，希望使用教材的同志提出批评和改进意见，以便再版时修订。

劳动人事部培训就业局

一九八四年

目　录

第一章　集合与函数

§1·1　集合的概念

1.　集合与元素

在日常生活中，我们常常谈论某一类事物，例如：

（1）某处的一堆西瓜；

（2）某校的一群学生；

（3）一类满足抛物线$y=x^2$上所有的点；

（4）一组质数：2，3，5，7，11。

它们分别是由一堆西瓜、一群学生、一类点、一组质数所组成的。这些西瓜、学生、点、数都是所研究事物的对象，我们说，每一组对象的全体形成一个**集合**（有时简称**集**）。集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**。例如，上面的例（4）是由2,3,5,7,11这五个数组成的一个集合，其中的对象2,3,5,7,11都是这个集合的元素。我们看到，集合的元素可以是各种各样具体的或抽象的事物，但以后主要是研究数的集合（简称为**数集**）和点的集合（简称为**点集**）。

对于一个给定的集合，集合中的元素必须是明确的。这就是说，任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素。例如，对于由抛物线$y=x^2$上所有的点组成的集合，坐标为（2,4）的点是这个集合的元素，而点（1,2）就不是它的元素。

对于一个给定的集合，集合中的元素必须是互异的。这

就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入一个集合时，只能算作这个集合的一个元素，因此，集合中的元素是不允许重复出现的。

表示一个集合通常有两种方法：列举法和描述法。

把集合的元素一一列举出来，彼此间用逗号分开，写在一个大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**。例如，由2,3,5,7,11五个数组成的集合可以表示为

$$\{2,3,5,7,11\}.$$

方程$x^2-3x+2=0$所有的解的集合（简称为**解集**）可以表示为

$$\{1,2\}.$$

又如，由全体正偶数组成的集合可以表示为

$$\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}.$$

一个集合可能只有一个元素。例如，方程$x+2=0$的解集就只有一个元素：-2。利用上面的表示方法，这个集合就记作$\{-2\}$。注意-2和$\{-2\}$有着根本的差别，-2表示一个元素，$\{-2\}$表示一个集合——只有一个元素的集合。

一个集合也可能没有元素。例如，平方等于2的有理数的集合，方程$x^2+1=0$的解集就是如此。这种不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\{\quad\}$或$\varnothing$。

表示集合的第二种方法，是把集合中的元素的公共属性描述出来，写在一个大括号内，这种方法叫做**描述法**。这时往往在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线右边列出它的元素的公共属性。例如：

方程$x^2-3x+2=0$的解集，又可表示为

$$\{x \mid x^2-3x+2=0\}.$$

由抛物线$y=x^2$上一切点所组成的集合，可以表示为

$$\{(x, y) \mid y = x^2\}$$

在不引起混淆的情况下，上面的两个集合也可以简单地表示为：

$$\{方程x^2 - 3x + 2 = 0的解\},$$

$$\{抛物线y = x^2上的点\}.$$

我们一般用大写的拉丁字母A，B,C等作为集合的记号，用小写的a，b，c…表示集合的元素。如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a \in A$；如果a不是A的元素，就说a不属于A，记作$a \notin A$（或$a \overline{\in} A$）。例如，设B表示集合$\{2, 3, 5, 7, 11\}$，则

$$3 \in B, \quad 7 \in B, \quad 9 \notin B.$$

介绍几个常用的记号：

N：表示全体自然数所成的集合；

Z：表示全体整数所成的集合；

Q：表示全体有理数所成的集合；

R：表示全体实数所成的集合。

2. 子集

设A，B是任意的两个集合。

如果A与B是由完全相同的元素组成的，就说集合A与集合B相等，记作$A = B$；否则，就说A与B不相等，记作$A \neq B$。例如，设$A = \{0, 1\}$，B是二次方程$x^2 - x = 0$的解集：

$$B = \{x \mid x^2 - x = 0\}，那么A = B.$$

由上例可见，两个集合相等，说明同一个集合可以有不同的表示。因此，对于一个集合来说，元素的列举次序是无关紧要的。例如，方程$x^2 - x = 0$的解集用列举法既可写成$\{0, 1\}$，也可以写成$\{1, 0\}$。

例1 写出不等式$3x - 1 > x + 5$的解集。

解： 不等式$3x-1>x+5$的解集是

$$\{x|3x-1>x+5\}=\{x|2x>6\}$$
$$=\{x|x>3\}.$$

如果A的每个元素都是B的元素，那么就说A是B的**子集**，记作

$$A\subseteq B\ (\text{或}B\supseteq A),$$

读作A包含于B（或读作B包含A）。如果A不是B的子集，即A至少有一个元素不属于B，就记作$A\nsubseteq B$。

例如，设A表示平面内一切等边三角形的集合，即

$$A=\{\text{等边三角形}\},$$

B为平面内一切等腰三角形的集合，即

$$B=\{\text{等腰三角形}\},$$

那么$A\subseteq B$，即A为B的子集。

又如，设$A=\{6\text{的倍数}\}$，$B=\{x|x=2n,n\in N\}$，那么$A\subseteq B$。

对于任何一个集合A，因为它的任意一个元素都属于集合A本身，所以

$$A\subseteq A.$$

我们规定，空集是任何集合的子集。这就是说，对于任何集合A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

例 2 写出集合$\{0,1,2\}$的所有的子集。

解： 集合$\{0,1,2\}$的所有的子集是：

$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$。

显然，当$A\subseteq B$，并且$B\subseteq A$时，$A=B$。

如果A是B的子集，但$A\neq B$，就说A是B的**真子集**，记作

$A \subset B$。

为了直观起见，我们常用图形形象地来表示集合。例如用一条封闭曲线围成的区域表示一个集合，封闭曲线内部的点表示这个集合的元素，如图1·1。图1·2表示A是B的子集，图1·3则表示A不是B的子集。

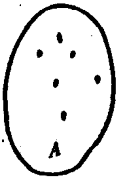


图1·1

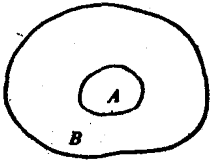


图1·2

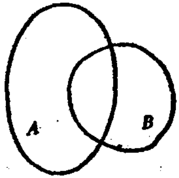


图1·3

习 题 一

1. 把下列集合用列举法表示出来：

（1）大于3且小于15的偶数的集合；

（2）12的正约数的集合；

（3）方程$x^2-7x+12=0$的解集；

（4）方程$x+8=8$的解集；

（5）方程$x^2+8=0$的解集；

（6）$A=\{x|-2<x<10, x\in Z\}$。

2. 设$A=\{x| \ |x|>2\}$，

（1）写出A的任意三个元素；

（2）把这个集合在数轴上表示出来。

3. 用记号"$\subseteq$"，"$\subset$"，"$=$"表示集合A与B的关系：

（1）$A=\{12的正约数\}$，　$B=\{1,2,3,4,6\}$；

（2）$A=\{x|x^4-1=0\}$，

$B=\{x|x^4-3x^2+2=0\}$；

（3）$A=\{1,3,5,7,9\}$，

$B=\{x|x=2n+1,\ n\in N\}$。

4．设$A=\{2,3,4,5\}$　　$B=\{x|x=2n,\ n\in N\}$，说明A不是B的子集。

5．写出下列不等式的解集：

（1）$3x+2<4x+1$；　　（2）$2x-3<2-3x$。

6．判断下列各式是否成立，并说明理由：

（1）$\{x|x^2-3x-4=0\}\subseteq\{x|\ |x|<10,\ x\in Z\}$；

（2）$\{x|0<x<5\}\subseteq\{x|x^2-5x-6<0\}$。

7．设集合$A=\{x|2x=8\}$，问是否$A=4$？

8．如果$A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$，下列各种写法哪个正确？哪个不正确？

（1）$1\in A$；　（2）$0\notin A$；　（3）$\{1\}\in A$；

（4）$1\subset A$；　（5）$\{0\}\subset B$；　（6）$\{1\}\subset A$；

（7）$\varnothing\subset A$；　（8）$B\subset A$。

§1·2　交集　并集　差集

1．交集

已知8的正约数的集合为

$$A=\{1,2,4,8\},$$

10的正约数的集合为

$$B=\{1,2,5,10\},$$

那么 8 与10的正公约数的集合就是$\{1,2\}$.容易看出，$\{1,2\}$是由A与B的公共元素组成的一个新集合.

一般地，设A，B是两个集合，由既属于A又属于B的所有的元素组成的集合，叫做集合A与B的**交集**，记作$A\cap B$(读作A交B)，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,\text{ 且}x\in B\}.$$

这样，8 与10的正公约数的集合就是8的正约数的集合与10的正约数的集合的交集，即

$$\{1,2,4,8\}\cap\{1,2,5,10\}=\{1,2\}.$$

图1·4中的阴影部分表示集合A与B的交集$A\cap B$。

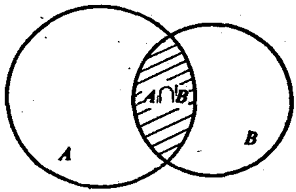


图1·4

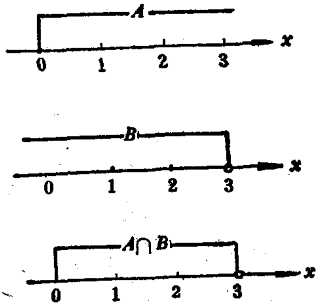


图1·5

例 1 设$A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{x|x<3\}$，求$A\cap B$。

解： $A\cap B=\{x|x\geqslant 0\}\cap\{x|x<3\}$

$=\{x|0\leqslant x<3\}$ (图1·5).

例 2 设$A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，求$A\cap B$。

解： $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

2. 并集

设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{c,b,f,g\}$．把A、B的所有的元素集合在一起（相同的元素只取一个）可以组成一个新的集合$\{a,b,c,d,e,f,g\}$．这个集合叫做集合A与B的并集，表示为

$$\{a,b,c,d,e\}\cup\{c,b,f,g\}=\{a,b,c,d,e,f,g\}.$$

一般地，设A，B是两个集合，由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的**并集**，记作$A\cup B$(读作A并B)，即

$$A\cup B=\{x|x\in A,\text{ 或}x\in B\}.$$

例如，设某学生前天复习的课程的集合是$A=\{$数学，物理，语文$\}$，昨天复习的课程的集合是$B=\{$数学，化学，物理$\}$，那么$A\cup B$表示他这两天内总共复习过的课程，即

$$A\cup B=\{\text{数学，物理，语文，化学}\}.$$

图1·6中的阴影部分，表示集合A与B的并集$A\cup B$。

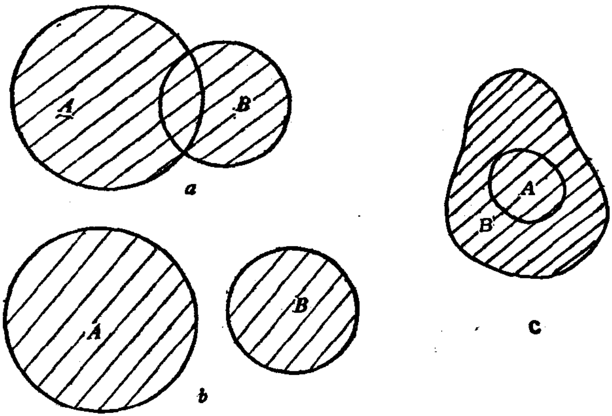


图1·6

例3 设$A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 4\}$

求$A\cup B$。

解： $A\cup B=\{x|-1<x<3\}\cup\{x|0<x\leqslant 4\}$

$=\{x|-1<x\leqslant 4\}$.

例4 设$A=\{x|x+3<0\}$，$B=\{x|x-2>0\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$。

解： $A\cup B=\{x|x+3<0\}\cup\{x|x-2>0\}$

$=\{x|x<-3\}\cup\{x|x>2\}$

$=\{x|x<-3$ 或 $x>2\}$.

$A\cap B=\{x|x+3<0\}\cap\{x|x-2>0\}$

$=\{x|x<-3\}\cap\{x|x>2\}=\varnothing$.

3. 差集

设$A=\{2,3,5,7,11,13\}$，$B=\{1,2,3,4,6,12\}$，把A中不属于B的元素放在一起组成一个新的集合$\{5,7,11,13\}$.这个集合叫做集合A与B的差集，表示为

$\{2,3,5,7,11,13\}\setminus\{1,2,3,4,6,12\}$

$=\{5,7,11,13\}$.

一般地，设A，B是两个集合，由一切属于A而不属于B的元素所组成的集合，叫做集合A与B的**差集**，记作$A\setminus B$（读作A减B），即

$$A\setminus B=\{x|x\in A且x\notin B\}.$$

图1·7中的阴影部分表示集合A与B的差集$A\setminus B$。

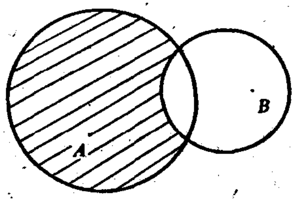


图1·7

例如，如果$A=\{1,2,3,4,\}$，$B=\{1,2\}$，那么$A\backslash B=\{3,4\}$。

如果$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$那么

$$A\backslash B=\varnothing,\quad B\backslash A=\{5\}$$

当集合B是A的子集时，我们特别把差集$A\backslash B$叫做B在A内的**补集**，记作$\overline{B}_A$，即

$$\text{当}B\subseteq A\text{时，}\quad \overline{B}_A=A\backslash B\ （图1·8）.$$

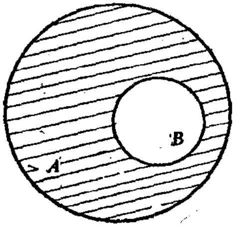


图1·8

例如，设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $B=\{1,3,5\}$，那么由于$B\subseteq A$，B在A内的补集有意义，并且

$$\overline{B}_A=\{2,4,6\}.$$

必须注意，一个集合B的补集是相对于给定的（包含B的）集合来说的。因此，关于补集一般都要说清楚是对哪个包含它的集合求补集。

习 题 二

1. 设$A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$

$B=\{4,3,2,1,0,-1,-2\}$

$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,5\}$.