




世纪经济管理专业应用型精品教材

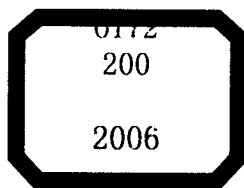
21SHIJI JINGJI GUANLI ZHUANYE YINGYONGXING JINGPIN JIAOCAI

微积分

WEIJIFEN

冉兆平 主编

 上海财经大学出版社



21 世纪经济管理专业应用型精品教材

微 积 分

冉兆平 主 编
张军好 樊 艮 江小勤 副主编

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/冉兆平主编;张军好,樊艮,江小勤副主编. —上海:上海财经大学出版社,2006.9

21世纪经济管理专业应用型精品教材

ISBN 7-81098-728-3/O·015

I. 微… II. ①冉… ②张… ③樊… ④江… III. 微积分-高等学校-教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 116273 号

责任编辑 徐超

封面设计 周卫民

WEIJIFEN

微积分

冉兆平 主编

张军好 樊艮 江小勤 副主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海华业装璜印刷厂印刷

宝山蔚村书刊装订厂装订

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 16.25 印张 318 千字

印数:0 001—8 000 定价:23.00 元

21 世纪经济管理专业应用型精品教材

编审委员会

主 任 曹均伟

副主任 宋 谨 徐 超

委 员 (按姓氏笔画为序)

冉兆平	安 焯	李文新	李会青
吴国萍	吴秋生	辛茂荀	宋 谨
宋文彪	宋莉萍	张一贞	罗昌宏
姚晓明	袁蒲佳	夏兆敢	黄金火
盛洪昌	韩冬芳	程道华	

前言

从我国的国情和高等教育发展的形势需求看,独立学院在扩大高等教育规模、提高本科高等教育资源供给等方面起到了积极的作用,但独立学院自身的教材建设却相对滞后,通常采用国家普通高等院校的教材,而独立学院不同于国家普通高等院校,也不同于一般的高职高专学校,所用教材具有一定的针对性与实用性。

针对教材缺乏的实际情况,我们在选用普通院校的教材的同时,对其结构进行大量的调整,经过几年的尝试、摸索,我们积累了大量的教学经验,根据独立学院的实际,整理出了符合独立学院学生的教材。为此由中南民族大学工商学院数学教研室编写了《微积分》教材,该教材具有如下特点:

(1)通俗易懂、直观形象

本书在不违反数学严谨结构的情况下,尽量做到通俗易懂,大量略去一些抽象的证明与推导,尽量用形象的语言给以叙述,对抽象的概念,尽量给以描述性的定义,使得“讲起来好讲,学起来好学”。

(2)增加例题与练习

实践是掌握知识的最有效的途径,为了使同学们更好地掌握微积分的内容与方法,本书加大了例题的讲解,同时在每章的后面配有大量的练习,同学们通过练习加深对数学知识的理解,巩固基本概念,提高解题技能。

(3)在每章后附有小结

本书的每一章都附有小结,对每章的内容给以梳理,把重要的概念、定理、公式都罗列在一起,便于学生复习;同时我们还编写了与教材配套使用的《微积分学习指导》,对每一知识点都给以系统归纳,对课后的练习给以详细解答。

参加编写本教材的有冉兆平、张军好、樊良、江小勤。上海财经大学出版社总编助理徐超认真审批了此书,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。在本书的编写过程中,教学秘书刘爽给了帮助,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,经验不足,教材中难免有不妥之处,希望广大师生提出宝贵的意见和建议。

编者

2006年8月



目 录

前言

第 1 章 函数 极限 连续

§ 1.1 函数	1
1.1.1 区间与邻域	1
1.1.2 函数	2
1.1.3 函数的特性	6
1.1.4 反函数与复合函数	8
§ 1.2 极限	10
1.2.1 数列的极限	10
1.2.2 函数的极限	12
1.2.3 函数的无穷小与无穷大	14
1.2.4 极限的运算法则	15
1.2.5 极限存在法则 两个重要极限	18
1.2.6 函数无穷小的比较	21
§ 1.3 函数的连续性	24
1.3.1 函数连续性的定义	24
1.3.2 函数的间断点	26
1.3.3 连续函数的运算与性质	28
本章小结	31

习题一	33
-----------	----

第2章 导数与微分

§ 2.1 导数概念	38
2.1.1 变化率问题实例	38
2.1.2 导数的定义	39
2.1.3 导数的几何意义	44
2.1.4 函数可导性与连续性的关系	45
§ 2.2 函数的求导法则	46
2.2.1 四则运算求导法	46
2.2.2 反函数的求导法则	49
2.2.3 复合函数求导法	50
2.2.4 初等函数的求导法则	55
§ 2.3 高阶导数	56
§ 2.4 隐函数求导法与对数求导法	59
2.4.1 隐函数求导法	59
2.4.2 对数求导法	61
§ 2.5 微分及其应用	62
2.5.1 微分的概念	63
2.5.2 函数可微的条件	64
2.5.3 微分的几何意义	65
2.5.4 微分的计算	65
2.5.5 微分的应用	68
本章小结	71
习题二	72

第3章 导数的应用

§ 3.1 中值定理	77
3.1.1 罗尔定理	77
3.1.2 拉格朗日中值定理	79
3.1.3 柯西中值定理	81
§ 3.2 洛必达法则	81

3.2.1	洛必达法则	82
3.2.2	其他未定式	83
§ 3.3	函数单调性与曲线的凸凹性	84
3.3.1	函数单调性	84
3.3.2	函数凹向与拐点	87
§ 3.4	函数的极值与最值	88
3.4.1	函数的极值及其求法	88
3.4.2	函数最值的求法	91
§ 3.5	函数作图	92
3.5.1	渐近线	92
3.5.2	函数作图	93
§ 3.6	导数在经济学中的应用	95
3.6.1	边际的介绍	95
3.6.2	函数的弹性	97
	本章小结	100
	习题三	101

第 4 章 不定积分

§ 4.1	不定积分的概念与性质	103
4.1.1	原函数与不定积分	106
4.1.2	不定积分的性质	108
§ 4.2	基本积分公式	109
4.2.1	基本积分公式	109
4.2.2	直接积分法	111
§ 4.3	换元积分法	112
4.3.1	第一换元积分法(凑微分法)	112
4.3.2	第二换元积分法	116
§ 4.4	分部积分法	119
§ 4.5	有理分式的积分	121
	本章小结	124
	习题四	125

第 5 章 定积分

§ 5.1	定积分概念	136
5.1.1	问题举例	136
5.1.2	定积分的定义	137
5.1.3	定积分的几何意义	138
§ 5.2	定积分的基本性质	138
§ 5.3	定积分与不定积分的关系	140
5.3.1	变上限积分	140
5.3.2	微积分学基本定理	142
§ 5.4	定积分的换元积分法	143
§ 5.5	定积分的分部积分法	146
§ 5.6	定积分的应用	148
5.6.1	平面图形的面积	148
5.6.2	经济学中的应用问题	149
§ 5.7	广义积分与 Γ -函数	151
5.7.1	无穷区间上的广义积分	151
5.7.2	瑕积分	152
5.7.3	Γ -函数	153
	本章小结	155
	习题五	156

第 6 章 二元函数的微积分

§ 6.1	二元函数的定义、极限与连续	162
6.1.1	二元函数的概念	162
6.1.2	二元函数的极限与连续	163
§ 6.2	偏导数	164
6.2.1	偏导数	164
6.2.2	高阶偏导数	166
§ 6.3	全微分	167
§ 6.4	隐函数的求导法则	169
§ 6.5	二元函数的极值与最值	171

6.5.1	二元函数的极值	171
6.5.2	条件极值	173
6.5.3	最小二乘法	175
§6.6	二重积分	177
6.6.1	二重积分的概念	177
6.6.2	二重积分的性质	179
6.6.3	二重积分的计算	180
	本章小结	185
	习题六	187

第7章 无穷级数

§7.1	常数项级数的概念和性质	193
7.1.1	常数项级数的概念	193
7.1.2	常数项级数的基本性质	195
§7.2	正项级数	197
§7.3	任意项级数	200
7.3.1	交错级数	200
7.3.2	绝对收敛和条件收敛	201
§7.4	幂级数	203
7.4.1	幂级数的概念	203
7.4.2	幂级数的收敛区间	204
7.4.3	幂级数的性质及运算	206
§7.5	函数的幂级数展开	210
7.5.1	泰勒级数	210
7.5.2	函数的幂级数展开式	213
	本章小结	216
	习题七	220

第8章 微分方程

§8.1	微分方程的基本概念	226
8.1.1	微分方程的定义	226
8.1.2	微分方程的解	228

8.1.3	定解问题	228
§8.2	一阶微分方程	229
8.2.1	可分离变量方程	229
8.2.2	齐次微分方程	231
8.2.3	一阶线性微分方程	234
§8.3	常系数二阶线性微分方程	235
8.3.1	线性微分方程的一般理论	235
8.3.2	二阶常系数齐次线性微分方程的通解	236
8.3.3	二阶常系数非齐次线性微分方程的解	237
§8.4	微分方程模型在经济中的应用	240
8.4.1	价格调整模型	240
8.4.2	多马(Domar, E. D.)经济增长模型	241
8.4.3	索罗(Solow, R. M.)经济增长模型	242
	本章小结	243
	习题八	245

第 1 章

函数 极限 连续

§ 1.1 函数

在微积分中经常要用到区间和函数的一些基础知识,为此,我们在学习微积分之前,先复习有关函数等概念.

1.1.1 区间与邻域

一 区间

两个实数间的全体实数叫区间,这两个实数叫区间的端点.

设 a, b 为实数,且 $a < b$, 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的开区间,记为 (a, b) ; 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的闭区间,记为 $[a, b]$; 满足不等式 $a < x \leq b$ (或 $a \leq x < b$) 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的半开半闭区间,记为 $(a, b]$ (或 $[a, b)$).

此外还有无限区间: $(a, +\infty)$; $(-\infty, b)$; $(-\infty, +\infty)$.

二 邻域

设 a, δ 为实数且 $\delta > 0$, 将满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数的集合称为以 a 为中心, δ 为半径的邻域,记作 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$.

如果把邻域 $U(a, \delta)$ 的中心点 a 去掉,所得到的集合称为点 a 的去心邻域,记作 $U^{\circ}(a, \delta)$. 这种邻域通常表示为: $0 < |x - a| < \delta$.



1.1.2 函数

函数是微积分中研究的基本对象之一. 本节主要介绍常量与变量, 函数的有关概念等.

一 常量和变量

在研究客观事物的数量特征时, 我们经常遇到两种不同本质的量. 一种是在研究过程中只取一个固定数值的量, 称为常量, 如两地间的距离, 某商品的单价(在某段时间内)等. 另一种是在同一研究过程中可以取不同数值的量, 称为变量, 如工厂的月产量, 销售某商品的收入, 一天内的气温等. 我们今后主要讨论变量, 而且是讨论诸变量之间的变化关系, 要用变化的观点来分析和解决问题.

二 函数概念

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是非空实数集, 设有一个对应法则 f , 使得任给一个 $x \in D$, 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一元函数, 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域.

应该注意, 函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 值域由此而唯一确定, 值域 $Z(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$. 所以, 两个函数的相等就是指: 两个函数的对应法则和定义域完全相等.

例 1 研究 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系.

解 $y = x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$; 而 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 所以, 这两个函数是对应法则相同而定义域不同的两个函数.

2. 函数的对应法则

在函数式 $y = f(x)$ 中, f 是对应法则, 它表示变量变化所依从的规律. 根据这种规律, 对于自变量 x 所取的每一个值, 就可以确定因变量 y 的对应值 $f(x)$. 因此, 函数的对应关系实际上表示由自变量确定函数值的过程.

如 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, 其对应关系为: $f: x \rightarrow 2x^2 + 3x - 5$

例 2 若 $f(x) = 3x^2 + x + 1$, 试求 $f(1), f(a), f\left(\frac{1}{x}\right), f(\sin x)$.



解 $f(1) = 3 \times 1^2 + 1 + 1 = 5$

$$f(a) = 3 \cdot a^2 + a + 1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} + 1$$

$$f(\sin x) = 3(\sin x)^2 + \sin x + 1$$

3. 函数的定义域

习惯上,我们只给出函数的对应法则,而未指明其定义域,这时定义域是指使该表达式有意义的所有 x 值的集合.

函数的定义域问题,通常从以下几个角度去分析:

(1) 在实际问题中,必须考虑变量的实际意义;

(2) 在函数的数学表达式的研究中,必须考虑计算是否可行.

① 表达式中含分母,要求分母不为零.

② 表达式中含偶次根式,要求被开方数非负.

③ 表达式中含对数运算,要求真数为正,底数为正且不等于1.

④ 表达式中含正切、正割,要求角不等于 $\frac{2k+1}{2}\pi (k \in Z)$; 表达式中含余切、余割,要求角不等于 $k\pi (k \in Z)$.

⑤ 表达式中含反正弦、反余弦,要求在 $[-1, 1]$ 上取值.

例3 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(2) y = \frac{1}{\lg(3x - 2)}$$

$$(3) y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$$

解 (1) 要使 $\frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$ 有意义,当且仅当 $x^2 - 2x - 3 \neq 0$

即 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3 \quad \therefore D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

(2) 要使 $\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 有意义,当且仅当 $3x-2 > 0$ 且 $3x-2 \neq 1$

即 $x > \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1 \quad \therefore D(f) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

(3) 要使 $\arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 有意义,当且仅当 $\left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1$ 且 $25-x^2 > 0$



即 $-4 \leq x \leq 6$ 且 $-5 < x < 5$ $\therefore D(f) = [-4, 5)$

例4 求函数 $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x+1 & -1 < x < 3 \\ x^2 & x = 3 \\ 2x & 3 < x \leq 5 \end{cases}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义, 当且仅当 $x < -1$ 或 $-1 < x < 3$ 或 $x = 3$ 或 $3 < x \leq 5$, 即 $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 5]$, 由此可见, 分段函数的定义域是各区间的并集.

4. 函数的表示法

函数通常可以用三种方法表示: 解析法、图示法与表格法.

(1) 解析法. 用数学表达式(也叫解析表达式)来表示两个变量之间的关系. 这种方法便于应用数学分析的方法加以研究, 但抽象而不直观.

(2) 图示法(xOy 平面上的曲线). 借助于坐标系, 把变量之间的关系用图形来描绘, 其优点是直观但不够精确.

(3) 表格法. 用一个表格来表示变量之间的关系, 其优点是可以用来表示还不知道公式的函数.

三 函数的类别

在初等数学中, 我们已经学过一些基本初等函数:

1. 常数函数: $y = c$ (c 为常数)

2. 幂函数: $y = x^\alpha$ (α 为实数)

幂函数的运算法则为: (1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, (2) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, (3) $(x^n)^m = x^{nm}$,

(4) $(xy)^n = x^n y^n$, (5) $\left(\frac{1}{x}\right)^n = x^{-n}$

3. 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

4. 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

常用的对数公式:

(1) $N = a^{\log_a N}$ (对数恒等式)

幂指函数可用它变形, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$

(2) $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ (换底公式)

(3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$$(4) \log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$$

5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

常用的三角函数公式有:

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$(3) \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

以上五类函数是构成较复杂函数的基本单元,称为基本初等函数. 要掌握它们的图像、性质、定义域和值域;要熟练掌握这些函数的运算法则.

现给出初等函数的定义.

定义 2 若函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算构成的,且用一个数学表达式表示,则称这样的函数为初等函数.

除了初等函数外,还有分段函数.

定义 3 已知函数定义域被分成有限个区间,若在各个区间上表示对应规则的数学表达式一样,但单独定义各个区间公共端点处的函数值;或者在各个区间上表示对应规则的数学表达式不完全一样,则称这样的函数为分段函数.

下面举几个分段函数的例子.

例 5 符号函数

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

这个函数通常记作 $\operatorname{sgn} x$, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$. 如图 1-1.

例 6 取整函数 $f(x) = [x]$

对任意实数 x , 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 称 $f(x) = [x]$ 为取整函数.

如: $[-6.5] = -7, [0.6] = 0, [1.3] = 1, [3.5] = 3$.

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域是由全体整数组成. 如图 1-2.

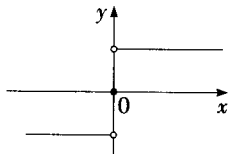


图 1-1

例7 函数 $y = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

是一个分段函数,它的定义域为 $[0, +\infty)$;当 $x \in [0, 1)$ 时,对应的函数是 $y = x^3$,当 $x \in [1, +\infty)$ 时,对应的函数是 $y = \frac{1}{x}$.

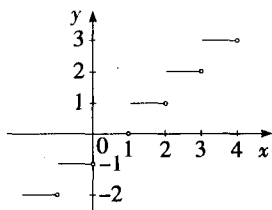


图 1-2

1.1.3 函数的特性

一 函数的单调性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 区间 $I \subseteq D$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调递增 (或递减) 函数.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

从几何图像上来看, 单调增 (减) 函数的图像沿 x 轴正向逐渐上升 (下降).

应该注意: 单调性与单调区间密切相关, 上述情况下 I 称为单调区间.

例如: 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调递减的, 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的, 但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的. 如图 1-3.

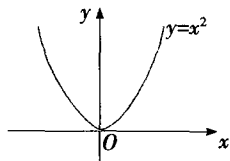


图 1-3

二 奇偶性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 是偶函数 (或奇函数).

从几何图像上来看, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^4 - 2x^2$;

(2) $y = x^3 + 1$.

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$

所以 $y = x^4 - 2x^2$ 是偶函数.