现代经济管理应用数学基础

线性规划

武学师　主纂

能　源　出　版　社

123
456
789

线 性 规 划

人民银行管理干部学院　郑美霞
北京化工管理干部学院　武学师　合编
中国民航管理干部学院　贾中裕

能 源 出 版 社

内 容 提 要

本书是《现代经济管理数学基础》系列教材之一。全书内容包括线性规划问题的数学模型、线性规划问题解的性质、单纯形法、对偶线性规划问题、灵敏度分析、目标规划共六章。书中主要介绍基本原理和方法，每章有大量例题，书后还有习题答案，便于读者自学。本书内容丰富、概念明确、深入浅出，通俗易懂。

本书可做为管理干部院校大专班、短训班以及成人高教经济管理类等专业的教材，也可供各行各业的工程技术人员和管理人员自学参考。

线 性 规 划

武学师　主纂

能源出版社出版　新华书店发行所发行

河北省定兴兴华印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32开本 6.25印张 128.6千字

1989年5月第一版　　1989年5月第一次印刷

印数：1—6,200册

ISBN7—80018—143—X/G·26　　　定价：2.45元

前　　言

《现代经济管理应用数学基础》系列教材，由北京地区管理干部学院数学学会聘请有关的管理干部学院数学教研室主任、以及具有多年成人高等教育经验的副教授、讲师共同编写，目的拟推荐给各管理干部学院作为大专班、短训班以及各成人高教经济管理类等专业的数学教材或参考书。教材共分四册：《微积分》、《实用线性代数》、《线性规划》、《应用概率统计》。

本教材是参照国家原经委制订的管理干部大专班的《教学计划》，并针对干部高教的特点编写的。编写过程中尽力突出以下特点：

（1）深浅适度；（2）“少而精”，理论联系实际；(3)“模块式”编排，富有弹性；（4）循序渐进，深入浅出，简明易懂；（5）具有一定的先进性。

在编写本教材过程中，曾得到机械工业管理干部学院赵晓茂院长、邮电部管理干部学院丁官昂副院长等院校领导的大力支持和指导，在此表示衷心的感谢。

我们特聘长期兼任成人高教的数学教学工作的、北京邮电学院朱兆仓副教授为顾问，朱老为本书编写提供了许多宝贵意见，深表谢意。

由于编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

北京地区管理干部学院数学学会教材编委会

1988年12月

目　　录

第一章　线性规划的数学模型

§1.1　引言

线性规划是运筹学的一个重要分支。运筹学在近四十年来已发展成多分支的学科。它的主要分支有规划论（包括线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划、0-1规划、多目标规划等）、对策论、决策论、排队论、图论、存贮论、模型论。线性规划是其中应用最广泛、理论最成熟的一个分支，它在经济管理、军事作战、工程技术及社会科学中都得到广泛的应用。

线性规划最早是在1939年由苏联的康托洛维奇在《生产组织与计划的数学方法》一书中提出的。但他并没有提出一个统一的求解方法，当时未引起人们的注意。第二次世界大战期间，美国经济学家霍夫曼（Hoffman）研究了生产计划问题。1947年美国的丹捷克（G·B·Dantzig）提出了完整的线性规划问题的有效解法——单纯形法，被人们誉为“20世纪重大的创造”，使线性规划的理论和方法成为管理科学的重要内容。

线性规划就是研究如何从全局的观点出发，通过建立数学模型，对于要求解的问题得到最合理的决策。例如：

1．运输问题　某种产品的若干个产地与销地的交通网

中，如何合理地组织运输，才使总运费最省。

2. 组织生产问题　产值固定时，如何合理地利用有限的人力、设备、原料，使经济效益最高。或是利用一定数量的人力、设备、资源，如何安排它们，使产量提高。

3. 决策问题　当市场价格变动时，企业如何相应地调整生产计划，才使利润为最大。

4. 配料问题　如何搭配各种原料，使产品既符合质量标准，又要成本最低。

5. 库存问题　在仓库容量及其它条件的限制下，如何确定库存物资的品种、数量、期限，使库存效益为最高。

6. 投资问题　对于一定数量的资金，面向不同的企业，如何进行投资（即确定投资对象、投资金额和期限），使若干年后收益最大。

当实际问题的数学模型建立之后，线性规划就是求一组变量的值，使它满足一些线性式子（等式或不等式），并使一个线性函数的值最大（或最小）的数学方法。

线性规划问题的数学模型是由决策变量、约束条件和目标函数三个要素构成的。它的一般形式是：

求一组变量x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的值，使其满足的约束件：

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (\text{或} \geqslant b_i, \text{ 或} = b_i) \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

并使目标函数 $S=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$的值最小（或最大）。其中 a^{ij}，b_i，c_j 均为已知量。

§1.2 线性规划问题的数学模型举例

1. 生产利润问题

某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，需在 A，B，C，D 四种不同的设备上加工，所用的加工时数，设备利用时数和单位产品获利润等如下表所列。

表 1-1

设备 / 加工时数 / 产品	A	B	C	D	单位产品获利润（元）
Ⅰ	2	1	4	0	2
Ⅱ	2	2	0	4	3
设备可利用时数	12	8	16	12	

问　各生产多少产品Ⅰ、Ⅱ，可获最大利润？

解　设生产产品Ⅰ：x_1件，生产产品Ⅱ：x_2件时可获最大利润，则该生产利润问题的数学模型为：

求一组变量x_1、x_2的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1+2x_2\leqslant 8\\ 4x_1\qquad\leqslant 16\\ \qquad 4x_2\leqslant 12\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

并使目标函数$S=2x_1+3x_2$的值达最大。

2. 投资问题

某投资公司准备将1千万元的资金对A、B两个企业投

资。企业A每投资1元，一年后公司可获利0.7元，对企业B每投资1元，二年后公司可获利2元。对企业A、B投资期限必须分是别一年、两年的整数倍。为使该公司在第三年底收入最多，应怎样进行投资？

解　设x_{iA}和x_{iB}分别为第i年对企业A和B所投资的金额，那末，投资问题的数学模型为：

求一组变量x_{iA}、x_{iB}（$i=1, 2, 3$）的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases} x_{1A}+x_{1B}\leqslant 10^7 \\ x_{2A}+x_{2B}\leqslant 1.7x_{1A} \\ x_{3A}\qquad\quad\leqslant 3x_{1B}+1.7x_{2A} \\ x_{iA}\geqslant 0,\quad x_{iB}\geqslant 0 \\ \qquad\qquad (i=1, 2, 3) \end{cases}
$$

并使目标函数$S=3x_{2B}+1.7x_{3A}$的值最大。

3. 运输问题

有两个农场A_1、A_2产粮分别为23万吨与27万吨，要将粮食运往B_1、B_2、B_3三个城市，三个城市的粮食需要量分别为17万吨、18万吨、15万吨，农场到各城市的运价如下表所列：

表 1-2

运价万元/万吨 城市 / 农场	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问　应如何调运，才能使总运费最省？

解　设x_{ij}表示由农场A_i运往城市B_j的粮食数量（万吨）（$i=1$，2；$j=1$，2，3），见下表：

表 1-3

运量 城市 / 农场	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	收发平衡

该运输问题的数学模型为：

求一组变量x_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2，3）的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

使目标函数$S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$达到最小值。

4．生产计划问题

某精密仪器厂生产甲、乙、丙三种仪器，平均每生产一台甲种仪器需要7小时加工，6小时装配，售价3000元；每台乙种仪器需要8小时加工，4小时装配，售价2500元；丙种仪器需要5小时加工，3小时装配，售价1800元。每季度可供利用的加工时间为2000小时，装配时间为1000小时，三种仪器所

用的元件和材料基本相同。又据市场预测可知，对甲种仪器的需求每季度不超过200台，乙种仪器不超过180台，丙种仪器不超过300台。工厂应如何安排生产，才能获得最大产值。试写出这个问题的数学模型。

解 设每季度甲、乙丙三种仪器的生产量分别为x_1、x_2、x_3台。将已知条件列为下表：

表 1-4

单位工时（小时）/产品/工序	甲	乙	丙	总 工 时
加工	7	8	5	2000
装配	6	4	3	1000
售价(元)	3000	2500	1800	
市场需求(台)	≤200	≤180	≤300	

该生产计划问题的数学模型为：

求一组变量x_j（$j=1$，2，3）的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
7x_1+8x_2+5x_3\leqslant 2000\\
6x_1+4x_2+3x_3\leqslant 1000\\
x_1\leqslant 200\\
x_2\leqslant 180\\
x_3\leqslant 300\\
x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0\\
x_1,\ x_2,\ x_3\text{应是整数}
\end{cases}
$$

使目标函数$S=3000x_1+2500x_2+1800x_3$达到最大值。

在这个数学模型中，全部变量要求取整数值，我们称之为全整数线性规划问题。如果只要求部分变量取整数值，则

称之为混合整数规划问题。

5. 销售问题

某商店制订某商品下半年进货售货计划，已知商店库存量不得超过700件，上半年已存货100件，每月初进货一次，该商品经市场预测，各月份买进售出的价规如下表所列。问各月进货售货各多少，才能使总收入达最多。

表 1-5

月	7	8	9	10	11	12
买 进（元）	27	24	25	27	24	23
售 出（元）	29	24	26	28	26	25

解 设7—12月各月初进货数量为x_i件，各月售货数量为y_i件（$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$），S为总收入。该销售问题的数学模型为：

求一组变量x_i，y_i（$i=1, 2, \cdots, 6$）的值，使其满足约束条件

$$
\begin{cases}
y_1 \leqslant 100 + x_1 \leqslant 700 \\
y_2 \leqslant 100 + x_1 - y_1 + x_2 \leqslant 700 \\
y_3 \leqslant 100 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 \leqslant 700 \\
y_4 \leqslant 100 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_3 \leqslant 700 \\
y_5 \leqslant 100 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 \\
\qquad + x_5 \leqslant 700 \\
y_6 \leqslant 100 + x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3 + x_4 - y_4 \\
\qquad + x_5 - y_5 + x_6 \leqslant 700 \\
x_i \geqslant 0, \ y_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \cdots, 6) \ \text{整数}
\end{cases}
$$

并使目标函数 $S=29y_1+24y_2+26y_3+28y_4+26y_5+25y_6-(27x_1+24x_2+25x_3+27x_4+24x_5+23x_6)$ 的值为最大。

6. 合理下料问题

要做100套钢架，每套由长为2.9米，2.1米和1.5米的圆钢各一根组成。已知原料长7.4米，应如何下料，使用的原料最省。

解 一种简单的想法是：在每根原料上截取2.9米，2.1米和1.5米的棒料各一根，这样每根原料剩下0.9米的料头。为了做100套钢架，要用原料100根，多余料头总数为90米。而考虑合理套裁，可以节省原料，归纳出以下几种套裁方案，都可采用。见表1-6所列。

表 1-6

长度（米） \ 下料数（根） \ 方案	1	2	3	4	5
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了得到100套钢架，需要混合使用5种下料方案。设按第 j 种方案下料的原材料根数为 x_j，该问题的数学模型为：

求一组变量 x_j（$j=1, 2, 3, 4, 5$）的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
x_1+2x_2+ \qquad\qquad x_4=100 \\
\qquad\qquad 2x_3+2x_4+x_5=100 \\
3x_1+x_2+2x_3 \quad +3x_5=100 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0
\end{cases}
$$

并使目标函数 $S=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$ 的值最小。

由计算得到最优下料方案是：按方案1下料30根；方案2下料10根；方案4下料50根，即只需要90根原材料就可以制造出100套钢架来。

由以上例子表明，许多生产实际问题都可用线性规划的数学模型来表示。但是由于实际问题往往较复杂，要考虑的因素很多，因此，建立一个实际问题的数学模型并不容易。这就要求我们深入了解实际问题，掌握全面可靠的统计资料，抓住主要矛盾，使建立的数学模型尽可能与实际情况相符合。

本书只讨论线性规划问题的数学模型及求解方法，对于其它形式的数学模型的解法不予讨论。

习 题 一

写出下列问题的数学模型：

1．某化工厂要用三种原料C、P、H混合调配出三种不同规格的产品甲、乙、丙。已知产品规格要求、产品单价、每天能供应的原材料数量及原材料单价，分别见表1-7和表1-8，该厂应如何安排生产，才能使利润达最大？

2．有两个煤厂A、B，每月进煤分别不少于60吨，100吨，它们担负供应三个居民区用煤任务，这三个居民区每月需用煤分别为45吨、75吨、40吨，A厂离这三个居民区分别为10公里、5公里、6公里，B厂离这三个居民区分别为4公里、8公里，、15公里，问这两个煤厂如何分配供煤量，才使运

表 1-7

产品名称	规 格 要 求	单价（元/公斤）
甲	原材料 C不少于50% 原材料 P不超过25%	50
乙	原材料 C不少于25% 原材料 P不超过50%	35
丙	不 限	25

表 1-8

原材料名称	每天最多供应量（公斤）	单 价（元/公斤）
C	100	65
P	100	25
H	60	35

输量为最小？

3．某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，项目 A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；

项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；

项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；

项目D，五年内每年初可投资，当年末回收本利106%。

该部门现有资金10万元，问它应如何确定这些项目的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大？

4．对于重量在30—40公斤的瘦肉型猪，需要确定最佳