

Chuzhongsheng
初中生



活动数学

HUO DONG SHU XUE



8

浙江科学技术出版社

JIAJIAOYUHUODONGDUBENHUODONGSHUXUE

1	汽车刮雨器的几何问题·····	1
2	擦数游戏·····	5
3	路政作业车的升降原理·····	9
4	彩带上的几何·····	13
5	请你来做规划师·····	17
6	跷跷板上的不等式·····	21
7	$40 < 35$ 吗·····	26
8	能摆出多少个等腰三角形·····	30
9	它们错在哪里·····	34
10	比一比,谁写出的勾股数多·····	38
11	你发现了什么·····	43
12	你能利用因式分解巧算吗·····	47
13	2 和 $\frac{1}{2}$ 幂运算中的有趣现象·····	52
14	你知道怎么用配方法吗·····	55
15	抽签时先抽机会大吗·····	59
16	到达学校有几种方法·····	64
	参考答案·····	68

1 汽车刮雨器的几何问题

抛砖引玉

大型客车的挡风玻璃前,装有独特的刮雨器,它转动时雨刷刮过的部分呈图 1-1 的形状.这个图形是由两条等弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 组成,如果知道 $ABCD$ 为矩形,且 $AD=40$ 厘米, AD 和 BC 相距 60 厘米,请问你能求出刮雨器在玻璃上刮过部分的面积吗?

要解决这个问题,我们应考虑怎样将这个不规则的图形转化为我们常见的图形,如果我们连结 AB ,就会得到一个由 $\widehat{AB}$ 和 AB 组成的弓形,将这个弓形向下平移 40 厘米就能使 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 重合,这样,这个图形就变成矩形 $ABCD$ 了,它的面积就等于:
 $40 \times 60 = 2400$ (平方厘米).

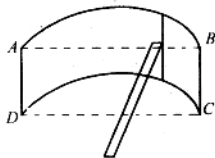


图 1-1

温故知新

上面这个问题依靠平移解决,让我们先回顾一下平移的有关知识.

1. 确定平移的两个要素

平移的方向和距离是确定平移的两个要素.

2. 平移的性质

- (1) 平移前后的两个图形中的对应角相等,对应线段平行且相等.
- (2) 平移前后的两个图形的形状相同、大小相等.
- (3) 平移时对应点的连线平行且相等,且都等于平移的距离.

思路点拨

例 1 如图 1-2,在长方形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AD=7$, AC 为对角线,画出 $\triangle ABC$ 平移后的三角形,其平移方向为射线 AD ,平移距离为 AD 长.若设 C 平移到 E ,请问四边形 $ACED$ 是什么四边形? 它的面积是多少?

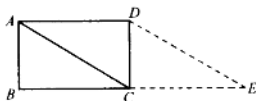


图 1-2

解: 由平移性质知: $AC \parallel DE$ (注: $\parallel$ 是平行且等于的符号), 所以四边形 $ACED$ 是平行四边形.

又因为 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ABC$ 面积相等, 所以 $S_{\triangle DCE} = S_{\triangle ABC} = 4 \times 7 = 28$.

例 2 如图 1-3, O 在长方形 $ABCD$ 内, 问是否存在一个四边形, 使它的四边长分别等于 AO 、 BO 、 CO 、 DO 的长, 并使这个四边形的对角线互相垂直? 若存在画出这个四边形, 若不存在请说明理由.

解: 存在. 我们只要将 $\triangle AOD$ 沿着射线 AB 方向平移 AB 长的距离, 使 O 位于 E , 则四边形 $OBEC$ 就是满足条件的四边形.

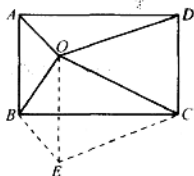


图 1-3

为什么四边形 $OBEC$ 是满足条件的四边形呢? 这个问题留给同学们思考.

例 3 如图 1-4, 直线 $m \parallel n$, m 与 n 的距离为 5cm, 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 m 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$, 再画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于直线 n 对称的 $\triangle A_2B_2C_2$, 请问 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是由 $\triangle ABC$ 怎样运动得到?

解: 画图过程略, 画完后的图形如图 1-4.

由轴对称的性质可知 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是由 $\triangle ABC$ 沿着与直线 m 垂直的方向平移 10cm 得到的.

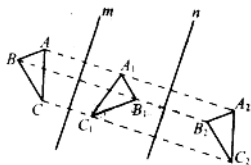


图 1-4

例 4 如图 1-5, 两个完全相同的长方形 $ABCD$ 和 $CDEF$ 拼在一起, 已知 $AB=1$, $AD=a$, 以 A 为圆心, a 为半径画弧, 交 BC 于 G ; 以 D 为圆心, a 为半径画弧交 DC 延长线于 P , 交 CF 于 H .

(1) 当两个阴影部分面积相等时, 求 a 的值 (π 取 3).

(2) 当 $a=2$ 时, 求图中两个阴影部分面积之差的绝对值.

解: 将由 $\widehat{DG}$ 、 DC 、 CG 组成的阴影部分沿着射线 DE 方向平移 a 的距离, 即画弧 HE .

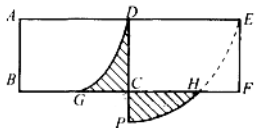


图 1-5

(1) 当两个阴影部分面积相等时, 就有 $S_{\text{阴影}DPE} = S_{\text{长方形}ADEF}$.

$$\text{即 } \frac{1}{4} \pi a^2 = a, \quad a = \frac{4}{3}.$$

(2) 当 $a=2$ 时, 两个阴影部分面积的差的绝对值就等于

$$|S_{\text{长方形} DFFE} - S_{\text{扇形} DFE}| = \left| 2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 \right| = \pi - 2.$$



思维训练

一、填空题

1. 如图 1-6 梯形 $ABCD$ 中, 将 AB 平移至 DE , 若 $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, 则 $\angle EDC =$ _____ 度.

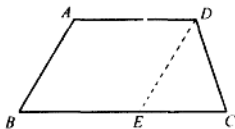


图 1-6

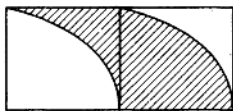


图 1-7



图 1-8

2. 如图 1-7, 在边长为 1 的两个正方形内画了两条弧, 则阴影部分的面积为 _____.

3. 如图 1-8, 在电脑画图软件窗口中, 有一条曲线其两端点 A, B 距离为 4cm, 现将该曲线沿着与 AB 垂直的方向平移 3cm, 平移的曲线扫过的部分会被染上红色, 则红色区域的面积是 _____.

4. 如图 1-9, 已知 $\triangle ABC$ 及 $a \parallel b$, a, b 间的距离为 3cm, 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 a 的对称 $\triangle A_1B_1C_1$, 又画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于直线 b 的对称 $\triangle A_2B_2C_2$, 则 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是由 $\triangle ABC$ 向 _____ 方向平移 _____ cm 得到的.

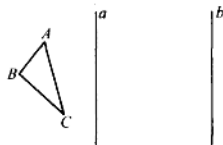


图 1-9

二、选择题

5. 如图 1-10 是一个由基本图形经过若干次平移后得到的图形, 这个基本图形可以是 ()

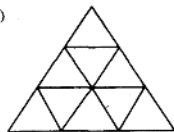


图 1-10

6. 一个三角形先向正东方向平移 4cm, 再向正北方向平移 6cm, 然后再向正西方向平移 4cm, 现在要回到原来的位置, 必须 ()

- A. 向正南方向平移 6cm B. 向东南方向平移 4cm
C. 向东北方向平移 5cm D. 向正南方向平移 4cm

7. 如图 1-11, 长方形 $ABCD$ 中 $AD=4\text{cm}$, $AB=7\text{cm}$, 以 AD 为直径画一个半圆, 将半圆的弧平移至如图位置, 则阴影部分的面积是 ()

- A. 18cm^2 B. 20cm^2 C. 21cm^2 D. 24cm^2

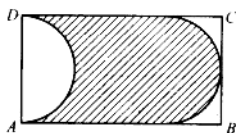


图 1-11

一	二	三	四	五	六	日
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

图 1-12

8. 如图 1-12 是 2004 年 4 月份的月历, 现有一个长方形套住了 6 个数, 将此长方形向左平移 3 格, 向下平移两格, 现在套住的 6 个数中最大的是 ()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 29

三、解答题

9. 先画一个长方形 $ABCD$, 再将此长方形向东北方向平移适当距离得到 $A_1B_1C_1D_1$, 再组成一个长方体.

10. 利用平移的方法将一个平行四边形剪一刀拼成一个长方形.

11. 如图 1-13, 一个长方形被分成 6 个正方形, 有五格内写有字母 A、B、C、D、E, 另有一空格, 每次可以将空格周围(上下或左右)的一个字母向空格作平移. 想要将字母 A 平移至最右下角, 至少要做几次平移?

A	B
C	D
E	

图 1-13

12. 如图 1-14 是一块正六边形木板 $ABCDEF$, $\triangle ABO$ 是正三角形, 请你将 $\triangle ABO$ 锯下后向上平移, 使 AB 与 ED 重合, 得到的新图形称为“飞机”, 然后将“飞机”作为模板画出能铺满地面的样图效果图.

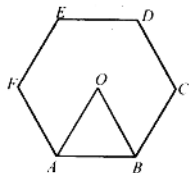


图 1-14

2 擦数游戏



抛砖引玉

将 $1, 2, \dots, 99$ 这 99 个连续的自然数按顺序写在黑板上, 小明、小强玩擦数游戏, 约定每次擦去 1 个或连续的几个, 但不得超过 5 个, 谁擦去最后一个数谁就赢. 两人轮流地擦, 现在小明先擦, 他应该如何玩这个游戏, 才能胜券在握.

我们学过了旋转对称, 利用中心对称的现象来玩这个游戏, 就有必胜的把握. 小明先擦去 99 个数中的中间一个数 50, 然后根据小强擦数的位置, 对称地来擦. 比如小强擦 7, 小明就擦 $99 - 7 + 1 = 93$, 小强如擦 2, 3, 4 三个数, 小明就擦 96, 97, 98 三个数. 那么只要小强有数擦, 小明就有数擦, 最后一个擦完数的必定是小明.



温故知新

关于旋转有以下性质:

1. 旋转前后的对应线段相等, 对应角相等, 两个图形的形状相同, 大小相等.
2. 对应线段所成的角等于旋转角.
3. 对应点的连线的中垂线经过旋转中心.

确定旋转的三要素是: 旋转中心、旋转方向和旋转角.



思路点拨

例 1 如图 2-1, 可以看作由什么图形、绕中心旋转多少次、每次旋转多少度得到的?

解: 本题要找出多种可能的情况, 至少有以下 6 种:

(1)  每次旋转 90° , 旋转 3 次.

(2)  每次旋转 180° , 旋转 1 次.

(3)  每次旋转 90° , 旋转 3 次.

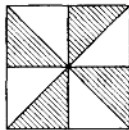


图 2-1

(1)  每次旋转 90° , 旋转 3 次.

(5)  每次旋转 90° , 旋转 3 次.

(6)  每次旋转 180° , 旋转 1 次.

例 2 如图 2-2, E, A, B 在同一直线上, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为正三角形, 问 $\triangle AEC$ 绕 A 点顺时针旋转 60° 可与什么三角形重合? 并指出旋转前后的对应点、对应线段、对应角, 最后说明 CE 和 BD 相交成几度的角?

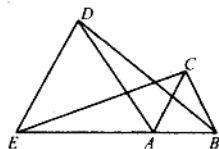


图 2-2

解: 与 $\triangle ADB$ 重合, 对应顶点为 $A \rightarrow A, E \rightarrow D, C \rightarrow B$.

对应线段为: $AE = AD, AC = AB, EC = DB$.

对应角为: $\angle CEA = \angle BDA, \angle EAC = \angle DAB, \angle ECA = \angle DBA$.

CE 与 BD 相交所成的角等于旋转角 60° .

说明 对应线段所成的角等于旋转角, 这条性质非常有用, 上例就运用了这条性质得出 CE 与 BD 所成的角为 60° .

例 3 如图 2-3, 正方形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 6\text{cm}$, 求正方形的面积.

解: 将 $\triangle ADC$ 绕 A 点逆时针旋转 90° 至 $\triangle ABE$ 的位置, 那么正方形 $ABCD$ 被变换成等腰直角 $\triangle ACE$ 了, 且面积不变, 所以

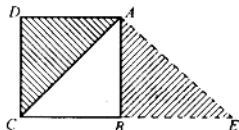


图 2-3

说明 利用旋转变换可将一个图形进行等积

变形, 使图形的某些位置关系转变为对我们有利的情形. 几何变换一共有 3 种, 即平移、旋转与反射 (反射就是轴对称).

例 4 如图 2-4, 已知 $\triangle ABC$ 和 $\angle RPQ$, 画出 $\triangle ABC$ 关于 PQ 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$, 再画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 PR 对称的 $\triangle A_2B_2C_2$. 问 (1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 有什么关系? (2) 当 $\angle RPQ = 50^\circ$ 时, $\triangle ABC$ 到 $\triangle A_2B_2C_2$ 的旋转角为多少度?

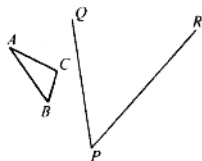


图 2-4

解：画图过程略。画出的图形见图 2-5。

(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 是关于点 P 旋转对称的图形。

(2) 连 PB, PB_1, PB_2 , 则 $\angle BPQ = \angle B_1PQ$, $\angle B_1PR = \angle B_2PR$

$\therefore \angle BPB_2 = 2\angle RPQ = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$, 即旋转 100° 。

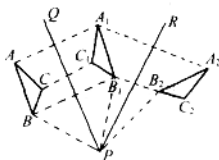


图 2-5



思维训练

一、填空题

1. 正三角形绕中心至少旋转 _____ 度, 可以与原来位置重合。

2. 如图 2-6, $\triangle ABC$ 绕 C 点顺时针旋转 90° 后, 能与 $\triangle EFC$ 重合, 且 F 点在 AC 上, 若 $AC=6, BC=4, \angle B=\alpha$ 度, 则 $AF=$ _____, $\angle E=$ _____ 度, AB 与 EF 的位置关系是 _____。

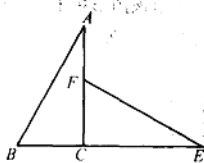


图 2-6

3. 甲乙两人在一个圆盘上做放相同硬币的游戏, 两人轮流放, 谁先放不下谁就输, 现在甲先放, 为了赢他应放在 _____。

4. 能平稳旋转的图形(如电风扇叶子, 风车, 螺旋桨等)都是 _____ 图形。

二、选择题

5. 在 26 个大写的英文字母中, 可以写成中心对称图形的有 ()

- A. 5 个 B. 6 个
C. 7 个 D. 8 个

6. 如图 2-7, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AC=BC$, D 是 AC 中点, $\triangle ADE$ 也是等腰直角三角形, 将 $\triangle ADE$ 绕 D 点逆时针旋转 90° 后, 出现的图形应是 ()

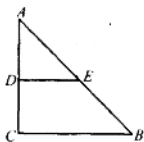
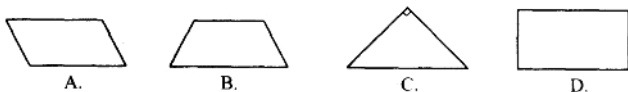


图 2-7



7. 如图 2-8 长方形 $ABCD$ 中, $AB=a, AD=b, BD=c$, 将这个长方形绕 B 点顺时针旋转 90° 至长方形 $EBGF$ 的位置, 那么在旋转的过程中, 被此长方形扫过的面积是 ()

- A. $4ab$ B. $2ab$
C. $ab + \frac{\pi}{4}c^2$ D. $2ab + \frac{\pi}{4}c^2$

8. 利用对称方法计算:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \dots + \frac{59}{60},$$

结果正确的是

- A. 885 B. 590 C. 177 D. 59

三、解答题

9. 现有由 4 个正方形拼起来的“L”形图形 1 个(如图 2-9), 请你用 4 种不同的拼法给该图形拼上一个同样的正方形, 使拼成的 4 个图形中的一个成为中心对称的图形、另外 3 个成为轴对称的图形.

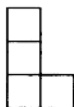


图 2-9

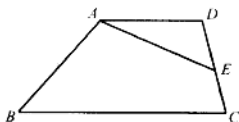


图 2-10

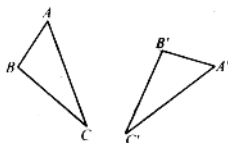
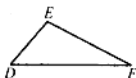
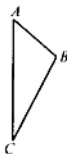


图 2-11

10. 如图 2-10, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 是 DC 的中点, 画出 $\triangle ADE$ 绕 E 点顺时针旋转 180° 后的三角形, 并指出上述作图揭示了一个什么数学问题?

11. 如图 2-11, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是成旋转对称的两个三角形, 请你用正确的方法找出旋转中心 O .

12. 电脑屏幕上有两个如图 2-12 甲的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$, 现在 $\triangle ABC$ 不动, 而 $\triangle DEF$ 运动, 最后在屏幕上出现如图 2-12 乙的图形, 请问 $\triangle DEF$ 要经过怎样的运动?



甲

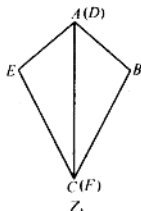


图 2-12

3 路政作业车的升降原理



抛砖引玉

如图 3-1 是路政高空作业车示意图,它的升降结构主要由 $\square ABCD$ 和 $\triangle CDEF$ 组成,请你用学到的数学知识说明:在升降的时候工人站在网格的篮内,为何不会觉得倾斜?

要解决这个问题,我们只要分析为什么 EF 与 AB 平行即可,事实上,根据平行四边形的对边平行可知 $EF \parallel DC$, $DC \parallel AB$,故 $EF \parallel AB$,即在升降过程中,篮子始终保持水平的,所以不会觉得倾斜.

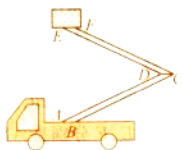


图 3-1



温故知新

1. 平行四边形的概念

- (1) 有两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.
- (2) 平行四边形有不稳定性.
- (3) 平行四边形是中心对称图形,对角线的交点是对称中心.

2. 平行四边形的性质

- (1) 平行四边形的对边平行且相等,对角相等,对角线互相平分.
- (2) 平行线之间的距离处处相等.

3. 平行四边形的判定

如果一个四边形满足下列条件之一的,就可以判定为平行四边形:① 两组对边相等;② 两组对边平行;③ 一组对边平行且相等;④ 两组对角相等;⑤ 对角线互相平分.



思路点拨

例 1 如图 3-2, $\square ABCD$ 对角线交于 O , E, F 在 BD 上,且 $BE = DF$,请说明 $AE = CF$.

解: 连结 AF, CE .



由已知 $\square ABCD$

可得 $AO=CO, BO=DO$

$\therefore BE=DF, \therefore EO=FO$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形

$\therefore AE=CF$.

说明 请在括号内填上推理的依据(下同).

例 2 如图 3-3, $\square ABCD$ 中, E, F 分别是 AD, BC 的中点, AF 与 BE 交于 G, DF 与 CE 交于 H , 请说明 $EH=FG$.

解: 由已知 $\square ABCD$

可得 $AD \parallel BC$ (),

$\therefore E, F$ 分别是 AD, BC 的中点, $\therefore AE \parallel CF$,

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形 (),

$\therefore AF \parallel EC$ (),

同理 $BE \parallel FD$,

$\therefore$ 四边形 $GFHE$ 是平行四边形 (),

$\therefore EH=FG$.

注意 我们常利用平行四边形的性质来判定两条线段平行、相等或互相平分. 所以当问题的结论是上述三种之一时, 我们就会去寻找平行四边形, 如果平行四边形暂时没有出现, 就要想办法添辅助线, 造出平行四边形.

例 3 如图 3-4, D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上移动(不与 B, C 重合), 作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于 E , 作 $DF \parallel AB$ 交 AC 于 F .

(1) 设 $S_{\triangle ABC} = S, S_{\triangle BED} = S_1, S_{\triangle FDC} = S_2$, 求 $S_{\triangle EDF}$ 的值.

(2) 猜想: D 在何处时, $S_{\triangle EDF}$ 最大?

解: (1) $\because DE \parallel AC, DF \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形 (),

$\therefore S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} S_{\text{AEDF}}$ (平行四边形是中心对称图形)

$\because S_{\text{AEDF}} = S - S_1 - S_2, \therefore S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} (S - S_1 - S_2)$.

(2) 在 D 向 B 靠近的时候, S_{AEDF} 逐渐变小, 而且越接近 B , 面积越接近零. 在 D 向 C 靠近时有同样的现象. 我们来观察一下变化的全过程, D 首先在 B 处, S_{AEDF} 为零, 然后慢慢地向 C 移动, S_{AEDF} 先变大, 后变小. 当 D 位于 C 处时 S_{AEDF} 又为零. 于是我们有理由猜想: 当 D 在 BC 中点时 S_{AEDF} 最大, 即 $S_{\triangle EDF}$

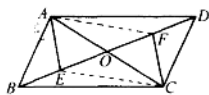


图 3-2

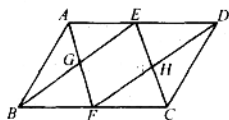


图 3-3

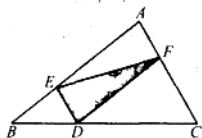


图 3-4

最大.

说明 在这里我们看到运动所带来的效果,运动是我们探索几何问题,作出正确合理猜想的重要策略.我们常把这种数学思想称为运动思想.虽然在以上的叙述中缺乏严密的逻辑推理,但在强调实验几何、形象思维的今天,猜想、合情推理正在被提倡.

例 4 如图 3-5,每个三角形都是等腰直角三角形.请用四种不同方法,将三角形剪成两块,能拼成平行四边形(拼出的四个平行四边形的形状各不相同).



图 3-5

解:



思维训练

一、填空题

1. $\square ABCD$ 的对角线交于 O , 周长是 180cm , $\triangle BOC$ 的周长比 $\triangle AOB$ 的周长大 10cm , 则 $AD =$ _____.
2. 在 $\square ABCD$ 中, E 是 BC 上一点, F 是 AD 上一点, 为使 $AE \parallel CF$, 请你补上一个条件是 _____ (只写一种即可).
3. 如图 3-6, D 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的一点, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$, 四边形 $AEDF$ 的周长是 8cm , 那么 AB 的长为 _____.
4. 平行四边形一组邻边长分别为 5 和 8 , 一条高线为 6 , 则平行四边形的面积为 _____, 另一条高线为 _____.

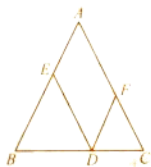


图 3-6

二、选择题

5. 如图 3-7, H 是 $\square ABCD$ 对角线 BD 上一点, 过 H 作 $EF \parallel AB$, $MN \parallel AD$. 设四边形 $AMHE$ 的面积为 S_1 , 四边形 $HFCN$ 的面积为 S_2 , 则 S_1 与 S_2 的大小关系是 ()

- A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 = S_2$ C. $S_1 < S_2$ D. 无法确定



6. $\square ABCD$ 中, $AC=6$, $BD=4$, 则 AB 的取值不可能是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 要判定 $ABCD$ 是平行四边形, 那么还需要满足 ()

- A. $\angle A + \angle C = 180^\circ$ B. $\angle B + \angle D = 180^\circ$
C. $\angle A + \angle B = 180^\circ$ D. $\angle A + \angle D = 180^\circ$

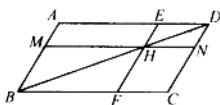


图 3-7

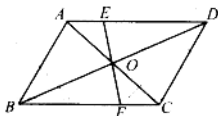


图 3-8

8. 如图 3-8, $\square ABCD$ 的对角线交于 O , 过 O 点的直线交 AD 、 BC 于 E 、 F , 则图中形状和大小完全相同的三角形有 ()

- A. 6 对 B. 5 对 C. 4 对 D. 3 对

三、解答题

9. 如图 3-9, $\square ABCD$ 中, E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点, G 、 H 分别 BE 、 DF 的中点, 试说明四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

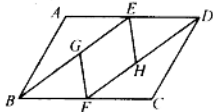


图 3-9

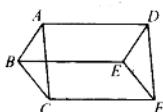


图 3-10

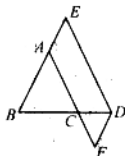


图 3-11

10. 如图 3-10, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, 试说明 $AC \parallel DF$.

11. 如图 3-11, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 是 BC 延长线上的一点, $DE \parallel AC$ 交 BA 的延长线于 E , $DF \parallel AB$ 交 AC 延长线于 F , $DE=7\text{cm}$, $DF=2\text{cm}$, 求 AB 的长.

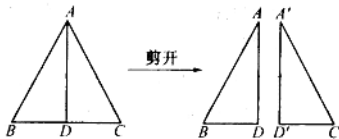


图 3-12

12. 如图 3-12, AD 是正 $\triangle ABC$ 的高, 将此三角形沿 AD 剪开, 成为两个三角形, 再把这两个三角形拼成平行四边形, 请你画出各种不同拼法的图形.

4 彩带上的几何

抛砖引玉

李莉同学在元旦联欢活动中,用宽度相同的彩带布置教室时,把两种不同颜色的彩带粘在一起时,发现重叠部分是一个菱形.如图 5-1,聪明的同学,你知道这是为什么吗?

如果你已学过菱形的概念,就不难回答这个问题.因为彩带两边缘互相平行,所以 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$,从而重叠部分是平行四边形,又因为彩带的宽度相同,所以邻边 BC 、 CD 上的高 AE 、 AF 相等,根据平行四边形面积公式可知邻边相等,因而重叠部分是一个菱形.

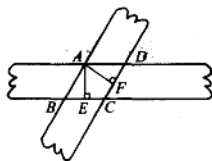
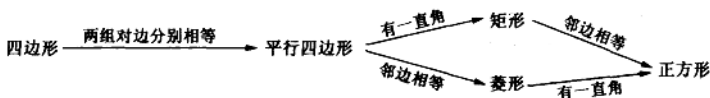


图 5-1

温故知新

1. 几种特殊平行四边形的概念



2. 几种特殊的平行四边形的关系



3. 几种特殊的平行四边形的性质及识别

(1) 性质

	边	角	对角线	对称形
矩形	对边平行且相等	四个角都是直角	互相平分且相等	既是轴对称又是中心对称图形
菱形	对边平行, 四边相等	对角相等	互相垂直平分, 每条对角线平分一组对角	
正方形	对边平行, 四边相等	四个角都是直角	互相垂直平分且相等, 每条对角线平分一组对角	

(2) 识别

识别特殊的平行四边形的方法较多, 限于篇幅, 这里不详述.



思路点拨

例1 一个边长分别为 2 和 3 的平行四边形, 若边长保持不变, 内角大小可变化, 则它可以变为 ()

- A. 正方形 B. 菱形 C. 矩形 D. 矩形或菱形

分析 平行四边形增加一些条件后, 可成为矩形、菱形或正方形. 本题的前提是边长保持不变, 所以变化后的四边形邻边不可能相等, 这与正方形或菱形的四边相等的性质不符, 所以选 C.

例2 如图 5-2, 菱形 ABCD 的周长为 20cm, 邻角 $\angle ADC : \angle DAB = 1 : 2$, 求较短对角线 AC 的长.

分析 菱形是四条边都相等的四边形, 因此菱形的每条对角线都将它分成两个等腰三角形, 而 $\angle ADC : \angle DAB = 1 : 2$, 所以 $\angle ADC = 60^\circ$, 从而 $\triangle ADC$ 为等边三角形, 所以 $AC = AD$. 又因为菱形的周长为 20cm, 所以 $AC = AD = 5\text{cm}$.

说明 菱形的对角线还把菱形分成了 4 个完全一样的直角三角形, 所以菱形的面积也可用对角线乘积的一半来计算.

例3 如图 5-3, 已知在矩形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 相交于点 O, $\angle AOB = 60^\circ$, AE 平分 $\angle BAD$, AE 交 BC 于 E, 求 $\angle BOE$ 的度数.

分析 矩形是对角线互相平分且相等的四边形, 所以矩形的对角线把矩形分成 4 个等腰三角形, 而 $\angle AOB = 60^\circ$, 所以 $\triangle OAB$ 为等边三角形, $\angle 1 = 60^\circ$, $BA = BO$, 又 AE 平分 $\angle BAD$, 所以 $\triangle BAE$ 为

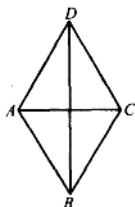


图 5-2

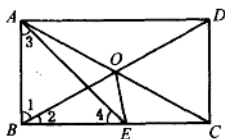


图 5-3

等腰直角三角形,从而 $BE=BA$,因而 $\triangle OBE$ 为等腰三角形,而 $\angle 2=90^\circ-\angle 1=30^\circ$,
所以 $\angle BOE=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

例 4 小丽在百货大楼看到一块漂亮的方纱巾,非常想买,但当她拿起来看时,感觉纱巾不太方,销售小姐看她犹豫的样子,马上过来拉起一组对角,让小丽看另一组对角是否对齐,小丽还是有些疑惑,小姐又拉起另一组对角让小丽检验,小丽终于买了这块纱巾.你认为小丽买的这块纱巾真是正方形的吗?当时采用什么方法就能检验出来?

解: 这块纱巾不一定是正方形.当时,只要拉起一组对边的中点,将其对折,看另一组对边是否重合就能检验出来.

说明 要识别一个四边形是否是正方形,常从边和角两方面去识别:四条边都相等,4个角都是直角.销售小姐拉起一组对角,看另一组对角是否对齐,反复两次,只能保证四边形的4条边都相等、对角线平分一组对角,这些都是菱形的特征,但不一定能保证纱巾的4个角都是直角.



思维训练

一、填空题

1. 对角线_____的矩形是正方形;对角线_____的菱形是正方形;对角线_____的平行四边形是矩形;对角线_____的平行四边形是菱形;对角线_____的平行四边形是正方形.

2. 如图 5-4,把大小完全相同的两个矩形拼成“L”形图形,则 $\triangle FAC$ 的形状是_____.

3. 菱形的两条对角线长分别为 6 和 8,则菱形的面积为_____.

4. 如图 5-5,正方形 $ABCD$ 中,点 E 在 BC 上, $EG \perp OB$, $EF \perp OC$,垂足分别为 G, F ,若 $AC=12$,则 $EG+EF=$ _____.

二、选择题

5. 小明用两个大小一样的直角三角形进行拼图,他一定可以拼成下列图形中的:① 平行四边形;② 矩形;③ 菱形;④ 正方形;⑤ 等腰三角形. ()

A. ①④⑤ B. ①②④ C. ①②⑤ D. ①②④⑤

6. 在菱形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$, $AF \perp CD$,垂足为 E, F ,且 $BE=EC, CF=FD$,则 $\angle AEF$ 等于 ()

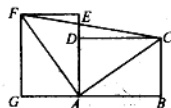


图 5-4

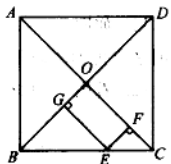


图 5-5