李漢光編著

分析力學概論

臺灣中華書局印行

弁　言

分析力學原本是科學研究院的一門專門課程，但隨着近代微觀理論的發展，現在却變成大學本科基本課程之一了。作者編輯這本分析力學概論的目的，是爲有志於研究近代物理學的讀者，提供一些基本觀念和資料，俾爲正在發展中的量子力學和它的數學形式，奠定一個基礎。當我們熟習了分析力學的技巧以後，則在古典宏觀物理學渡到近代微觀理論的行程上，已踏入了一條平坦的大路。

編輯此書時，雖曾盡量採用淺入深出的手法，希望它生動而易於瞭解；但編者學識有限，疏漏之處，在所難免，如蒙國內先進予以指導批評，則衷心感激焉。

編　者　識

緒　論

自從牛頓創立的運動定律把動力學置於堅固的基石上之後，力學便循兩個支流而發展。從牛頓運動定律直接發展下來的一支，稱爲向量力學(Vectorial mechanics)。向量力學的特徵，是以"動量"測定"力"的效應。若一質點所受的力爲已知，則該質點的運動情況便可完全確定。由於動量和力等具有方向性，故稱爲向量力學。

由萊伯涅 (Leibnitz) 創始，又經拉格倫日 (Lagrange) 和哈密頓 (Hamilton) 發展下來的一支力學，稱爲分析力學(Analytical mechanics)。分析力學的特徵，在於依循變分原理(Variational principle)僅用兩個無向量(動能和勢能)，便可決定一個複雜系統的運動。

分析力學把力學問題歸納於一個統一的解法。它的最大優點是討論一個複雜的系統時，係把系統當作一個整體來研究，不像向量力學必須考慮每一個質點所受的力以及其相互的關係，才能決定系統的運動。

分析力學在力學中扮演的角色，好像是在馬路行駛的一架飛機。用它去解決普通的動力學問題，似乎是牛刀殺鷄，大才小用；惟遇到複雜的動力學問題時，它的廣泛性和卓越性便可顯示出來了。

近數十年來，原子現象的科學在近代物理學中成爲重要的一章。在原子現象的領域中，原子性的基本粒子在宏觀世界中是不存在的。假使用研究宏觀物體的牛頓力學來研究微觀粒子，那就犯了方法上的錯誤。牛頓力學只適合研究質量大的物體在變化很小的場中（宏觀場）的運動。在尺度較小的領域內，量子力學代替了牛頓力學。微觀粒子的運動是量子力學所研究的對象。

量子力學不是建立在任何個體的微觀的理論上，它一開始就和統計集合(即系綜)打交道。這些統計系綜是用分析力學的特徵(如能量，廣義動量等)來確定的。因而分析力學便成爲通往量子力學的跳板。哈

密頓・雅科畢方程式(Hamilton-Jacobi equation)和最小作用量原理(Principle of least action)是波動力學的先導，而泊松括號(Poisson brackets)和正則轉換(Canonical transformation)是引往量子力學的通路。

由於量子力學在二十世紀原子物理學發展中有了巨大的成就，所以分析力學雖屬古典力學的範疇，但現在却不得不以嶄新的眼光去看待它了。

分析力學概論

目　　次

第一章　虛位移原理

§1·1　約　束

在研究質點或物體的運動時，可以發見它們的運動之間，有一個重要的原則性的區別。有些質點或物體可以完全自由地運動；在已知力的作用下，它們的運動軌跡由起始條件來確定。例如由炮口射出的炮彈，由於所選起始速度和發射角的不同，就可擊中某一區域的任一點。值得注意的是：炮彈的運動取決於作用力和起始條件，沒有對運動本身預先加上任何的限制。

有些質點或物體的運動，因受着預先給予的條件限制，不能自由的運動；無論作用力和起始條件如何，運動恆沿已知軌跡而發生，而軌跡是和起始條件無關的。火車沿車軌而運動就可作爲這種運動的例子；不管起始條件如何，火車恆沿車軌而運動，火車的軌跡已是預先知道的。

這樣看來，所有的運動都可區分爲兩類：一類是自由運動，另一類是非自由運動。

凡可自由運動的質點系，稱爲**自由質點系**。與此相反，凡系之運動受着某些已知的幾何上或運動學上的限制的，則稱爲**非自由質點系**。

在日常生活中所見的質點系，大多數都屬於非自由系。至於自由系的運動，則是很少見的。如果把各個行星看成質點，那麼行星系可以作爲自由系的例子。同樣地，原子系統亦可當作是電子和核所組成的自由系。行星沿着完全確定的軌道而運動，但這些軌道不是固定的或預先規定的；假如行星旁邊走過一個可以干擾運動的物體，如彗星，則行星將要改變它自己的軌道。

加在系的運動上而使系變成不自由的限制，稱爲約束 (Constraints)。

在已討論過的火車一例中，起約束作用的顯然是車軌。在機器中作

爲約束的是：迫使各機件繞預定的軸作轉動的軸承；使滑塊作直線運動的導面和導槽等。在構造上說來，這些約束可能是極其複雜的，因此必須借助於數學公式把約束對運動的限制寫出來。這樣便有**約束方程式**(Equation of constraints)的產生。

現在來研究幾個例子：

數學擺就是一個質點被約束沿鉛垂面而作圓周運動的簡單例子。借助於一無重量而長爲 l 的細桿，一端固定在軸上，他端懸着重物(圖1·1)，就可實現這種運動；或者把細桿換成一條繩子亦可。但無論用細桿或用繩子，約束方程將具有同一的形式：

$$x^2+y^2=l^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}1)$$

式中的 x 和 y 爲重物的坐標，而軸 $0x$ 和 $0y$ 選取在鉛垂的平面內。

第二個例子是一般所熟習的瓦特調節器上任一重物所作的運動（圖1·2）。根據機器運動的快慢，調節器的臂將與調節器的轉動軸構成各種不同的角度，而且這個角度在機器運動時是改變着的，這樣重物就走着一個複雜的軌跡。然而我們可以指

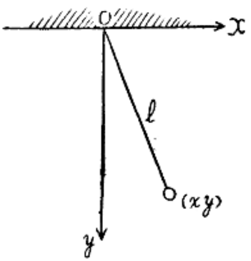

圖 1·1

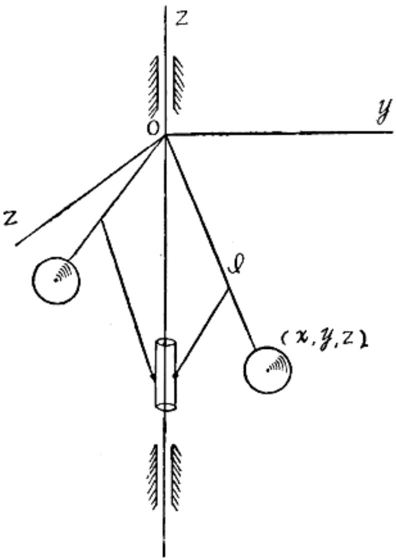

圖 1·2

出，由於構造而預先加於重物運動上的限制，就是重物的中心始終在一球面上運動。該球面的半徑等於重物中心到接裝重物的臂與轉動軸的聯接點的距離。約束方程式為：

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \quad \cdots\cdots(1\text{-}2)$$

這個方程式表明重物的中心沿某一已知半徑 l 的球面而運動。在機器運動的各種不同情況下，重物的中心所走的軌跡是球面曲線。

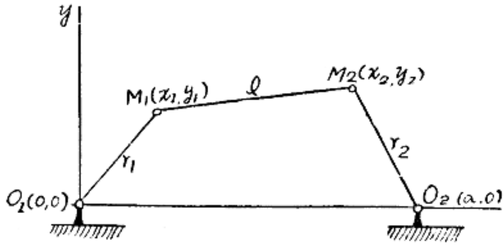

圖 1·3

現在再討論一個例子。四聯桿平面機構 $O_1M_1M_2O_2$（圖 1·3）是由鉸鏈聯接的四根桿子所組成的。如選擇坐標如圖所示，則下列方程式可表示出約束的性質：

$$x_1^2+y_1^2=r_1^2 \quad \cdots\cdots(1\text{-}3)$$

$$(x_2-a)^2+y_2^2=r_2^2 \quad \cdots\cdots(1\text{-}4)$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \quad \cdots\cdots(1\text{-}5)$$

這些方程式給出 x_1, y_1, x_2 和 y_2 四個流動坐標間的三個關係式。

§1·2　單面約束和雙面約束

對運動具有同樣的限制並用同一方程式來表示的兩個約束，由於構成形式的不同，在某些條件下它們之間有原則上的區別。

例如，借助於剛桿或不可伸長的繩子可以實現質點沿圓周的運動。假如桿子和繩子的長度相同，則這個約束方程式應該是相同的。但這兩

種約束之間顯然的有物理上的區別：剛桿在任何條件下（祇要桿子不斷），均使質點沿圓周而運動；繩子則可能鬆弛或彎曲而使質點離開圓周。

像桿子那樣，凡是在運動的任一瞬時都存在的約束，稱爲**雙面約束或固執約束** (Persistert constraints)。反之，像繩子那樣，在運動的某一已知階段有鬆弛或消失的可能性的，稱爲**單面約束或非固執約束** (Nonpersistent constraints)。

如同剛才說過的，給予同樣限制的單面約束和雙面約束，它們的方程式是相同的。爲了考慮到約束有鬆弛的可能，單面約束方程式常寫成等式附帶有不等式的形式，不等式表明約束可以鬆弛的一方面。例如謇才研究的懸於長爲 l 的繩子之一端的重質點之運動情形，單面約束可表爲：

$$x^2+y^2\leqslant l^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}6)$$

今後將不把約束特別區分爲雙面與單面的。因爲雙面約束本來和單面約束是相同的；至於約束鬆弛以後的運動，屬於自由運動的範疇，本書將不討論這類問題，因此亦不至遇見以不等式表示的約束。

§1·3 固定約束與非固定約束

在上節裏說明的那些約束例子中，它們的約束方程式只含有組成系統之質點的坐標，它們的普遍形式爲：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots\cdots x_n, y_n, z_n)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}7)$$

式中的 n 表質點的數目。同時這樣的方程式不止一個，而是好幾個，即符號 j 可能取一連串的數值：$j=1, 2, \cdots\cdots$ 直到某數 S，視約束的數目而定。

關於約束的數目 S，現在只能這樣說，它在任何情況下均應少於坐標數目 $3n$；因爲若不是這樣，坐標的數目就會等於或少於約束方程式的數目；在此情形下，系的坐標可由約束方程式來決定，因而使運動方程式變成多餘的。

約束方程式的用處，在於補充運動微分方程式的不足。同時由於約

束方程式的存在，在運動微分方程式中的未知數的數目，應相應地減少。

方程式組(1–7)不包含時間，卽它所表的約束不隨時間而變，這樣的約束稱爲**固定約束**(Scleronomic constraints)。與此相對，約束之隨時間而變的，則稱爲**非固定約束**(Rheonomic constraints)。關於非固定約束我們可研究長度隨時間而變的擺。設有小重物 M 掛在繩 MOA 的一端，繩穿過固定的圓環 O (圖 1·4)。假設以速度 C 抽動繩的 A 端，於是得到可變長度的數學擺。用 l 代表擺長 OM，則有：

$$l=l_0-ct \quad \cdots\cdots(1\text{–}8)$$

式中 l_0 代表擺在 $t=0$ 時的長度。

用 x, y 表 M 點的直角坐標，於是約束方程式爲：

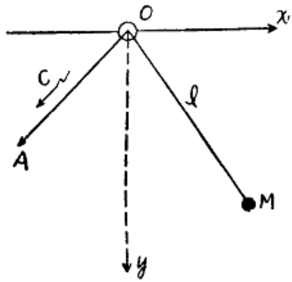

圖 1·4

$$x^2+y^2=(l_0-ct)^2 \quad \cdots\cdots(1\text{–}9)$$

這個約束方程式除了包含質點的坐標外，尙含有自變數 t，所以它所表的是一種非固定約束。

普遍說來，非固定約束方程式的一般形式爲：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n; t)=0 \quad (j=1, 2\cdots S) \quad (1\text{–}10)$$

§1·4　完整約束與非完整約束

有時我們遇到的約束不僅和時間有關，且與質點的運動速度有關。這樣的約束稱爲**運動約束**(Moving constraints)。運動約束的普遍形式爲：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n;\ \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \cdots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t)=0 \cdots(1\text{–}11)$$
$$(j=1, 2\cdots\cdots s)$$

依照赫芝(Hertz)的術語，所有約束可區分爲**完整約束**(Holonomic constraints)和**非完整約束**(Nonholonomic constraints)兩種：

在約束方程式中不包含坐標對時間的微商的約束，稱爲完整約束。換言之，完整約束是用有限形式的方程式來表示，而不是用形式(1-11)的微分方程式來確定的。例如前節中的方程式(1-7)和(1-10)就是屬於完整約束；(1-7)式是固定的完整約束，(1-10)式是非固定的完整約束。

非完整約束亦卽其方程式不可能用有限形式來表示的約束，可以想見要複雜的多。這些約束方程式總是成微分的形式，而且**不可能積分成有限形式的。**所以非完整約束也稱爲**不可積分約束**(Nonintegrable constraints)，而完整約束則稱爲**可積分約束**(Integrable constraints)。

圓環在粗糙平面上任意作無滑動的滾動，是非完整約束的經典例子。事實上，半徑爲 a 的圓環在 xOy 平面上滾動(圖1·5)，有一個顯明的完整條件，卽環心 c 到平面的距離 a 始終不變：

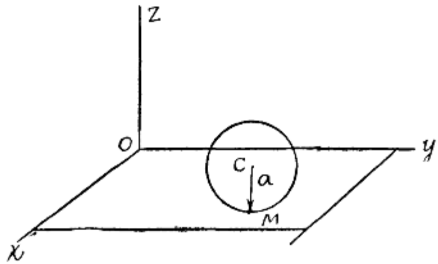

圖 1·5

$$z_c = \mathrm{a} \quad \cdots\cdots (1\text{–}12)$$

除了這個完整條件外，尙有一個運動約束，卽環上和平面相接觸的 M 點的瞬時速度爲零。這個條件由運動學知道可以寫成下式：

$$v_c - a\,\dot{\theta} = 0 \quad \cdots (1\text{–}13)$$

式中 v_c 是圓環質心的速度，$\dot{\theta}$ 是環對質心的角速度。若以 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 表 v_c 的兩個分速度，ψ 表環的運動方向和 x－軸所夾的角(圖 1·6)，則 (1–13) 式可換寫爲下列兩個式子：

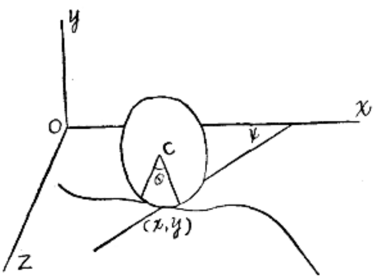

圖 1·6

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}-a\,\dot{\theta}\cos\psi=0\\ \dot{y}-a\,\dot{\theta}\sin\psi=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}14)$$

因爲 ψ 角和坐標 x, y 之間無任何幾何關係存在，所以(1–14)式是不能積分的，因而得到非完整約束的例子。

這裏應當特別指出，假如圓環的運動限制於沿着已知曲線上進行，則 (1–14) 式便可積分了。譬如令環沿着平行於 x 軸的直線上運動，則 $\psi=0$ 而(1–14)式變爲：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}-a\,\dot{\theta}=0\\ \dot{y}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}15)$$

這兩個條件可以積分爲：

$$\left.\begin{aligned}x=a\theta\\ y=c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}16)$$

這樣約束方程式中的時間微商已被消除，因而所討論的約束變成了完整約束。

§1·5　虛位移

我們現在來確定約束對於運動的系統究竟發生些什麼限制。

首先，假定約束是完整的固定的，它們的方程式有如下的形式：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n)=0 \quad (j=1,2\cdots s)\cdots\cdots\cdots(1\text{-}17)$$

現在研究系中的一點 M_i，它的位置是由向徑 $\boldsymbol{r}_i$ 確定的，即 M_i 的三個直角坐標爲 x_i, y_i, z_i。設 M_i 作了一個無限小位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，其在坐標軸上的三個分位移(即投影)爲 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$。若系是自由系，則所有的 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$——它們共有 $3n$ 個——將是可以完全任意選取的。但約束的存在將給這些數值加以限制；這些限制是易於求得的，只要把方程式(1–17)的兩邊全微分，就可看出是些什麼限制了；這樣我們有：

$$\delta f_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$(j=1,2\cdots\cdots s)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}18)$$

這些分位移(即在三個坐標軸上的投影)$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$——記着它們共有 $3n$ 個——是由(1-18)式中的 s 個方程式聯繫起來的。因此任意的獨立的投影只有 $3n-s$ 個,其餘的 s 個投影是這些獨立投影的函數。

滿足約束所加的限制的位移,或換句話說,**與約束符合的位移**,稱**爲可能位移或虛位移**(Virtual displacement)。

系之虛位移的投影數目 $k=3n-s$,稱爲系的**自由度數** (Number of degrees of freedom)。

在眞正運動中,系統所作的位移,稱爲**眞位移** (Actual displacement)。眞位移以 $d\boldsymbol{r}_i$ 表之,其投影以 dx_i, dy_i, dz_i 表之。當然,系在每一瞬時的眞位移,就是它所有虛位移中的某一組位移。

現在討論一個例子如下:

瓦特調節器中重物的虛位移,如同大家所知道的,由於約束,重物中心被迫沿着球面而運動,故切於球面的任何無限小位移,都是可能的虛位移。當調節器轉動而重物轉到另一高度的時候,重物的中心依次產生眞位移,這些眞位移形成了重物的軌跡。在數學分析上說來,寫出球面方程式:

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \quad \cdots\cdots(1\text{-}19)$$

全微分之後,我們得到約束的條件:

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}20)$$

寫成向量式:

$$\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}21)$$

這就是虛位移垂直於球半徑的條件,亦卽位移切於球面的表示式。

約束的存在使得 $\delta x, \delta y, \delta z$ 三個量中只有兩個是獨立的,卽調節器有兩個自由度。

在一般情況中亦是這樣,如果一個質點沿着某一面

$$f(x, y, z)=0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}22)$$

而運動,則可能位移所應滿足的條件爲:

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}23)$$

偏微商 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ 與曲面(1–22)法向單位向量 $\boldsymbol{n}$ 的投影相等，因之條件(1–23)相當於：

$$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}24)$$

垂直性條件(1–24)恰好表明：點的所有虛位移應在已知面的切面上。點在一個面上具有兩個自由度。

如果某點被迫沿某一曲線而運動，而此曲線爲下列二已知面的交線：

$$f_1(x,y,z)=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}25)$$

$$f_2(x,y,z)=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}26)$$

則按照上述，我們有：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}27)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}28)$$

或

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}=\delta 0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}29)$$

$$\boldsymbol{n}_2\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \qquad\cdots\cdots(1\text{–}30)$$

這就是說，點的虛位移應沿曲線的切線方向。點在曲線上具有一個自由度。

其次，假定約束是完整的非固定的，它們的約束方程式有如下的形式：

$$f_j(x_1,y_1,z_1\cdots x_n,y_n,z_n;t)=0 \quad (j=1,2\cdots s) \qquad\cdots\cdots(1\text{–}31)$$

在非固定約束的情形中，虛位移應理解爲**約束在某一瞬時停息之後的可能位移**，換句話說，約束方程式中的變數 t 須視爲一個不變的常數值。在這樣的虛位移定義中，約束方程式(1–31)所加於系的限制，仍爲(1–18)式的形式，卽：

$$\delta f_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

$$(j=1,2\cdots\cdots s) \qquad\cdots\cdots(1\text{–}32)$$

很顯明的，這時的眞位移不能和虛位移相重合。因爲眞位移不能把時間 t 當作常數。眞位移所受的限制條件爲：

$$df_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0$$

$$(j=1,2\cdots\cdots s)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{–}33)$$

方程式組(1–33)比(1–32)多了一項 $\frac{\partial f_j}{\partial t}dt$，故眞位移不能和虛位移相重合。

在非固定約束中眞位移不能和虛位移相合一事，用一例子說明，或更爲明瞭。例如假設質點不許脫離一個球面，而這個球面的半徑依時間而增大；在此情形下，約束隨時間而變。質點的虛位移是它在一個球面上的任何一個位移(如圖 1.7 之 AB)，這個球面是假定它的半徑在指定的瞬時已停止變化的。但是質點的眞位移是它在球面上移動時，同時球面亦在增大的情況下產生的(如圖 1.7 之 AC)。故虛位移 AB 不與眞位移 AC 相重合。

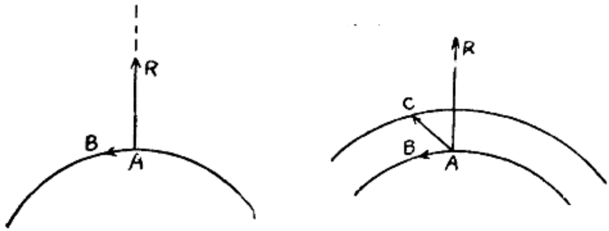

圖 1·7

δf_j 的運算是把約束方程式中的變數 t 當作不變的參數而全微分，稱爲函數 f_j 的 **"變分運算"** (Operation of variation)。而方程式(1–32)的本身稱爲函數 f_j 的 **"變分"** (Variation)。

爲了求虛位移，無論是在固定約束的情形或是在非固定約束的情形，都必須對約束方程式作**變分運算**。至於求眞位移，則須對約束方程

式作**微分**。變分運算在非自由系動力學中具有重要的意義。

§1·6　約束反作用力

直到現在爲止，我們僅從運動學方面研究約束所表現的限制。現在轉過來站在動力學的立場，來研究約束對於系統的動力作用。

當約束迫使系統按預先規定的方式而運動時，約束加在系上的力，稱爲**約束反作用力**或簡稱**約束力**(Constrained force)。

我們常在靜力學和動力學中遇到支點的反作用力和軸的反作用力等，這些都是約束力的實例。但現在必須稍爲深入並推廣約束力的概念。

在解自由系動力學問題時，作用於系上的力，經常是利用力與坐標之間的關係（例如彈力和引力等），或力與速度之間的關係（例如阻力等）來表達。這些作用力和運動學之間的關係是預先確定的，特稱之爲**主動力**(Applied force)。

約束力在本質上和主動力是有區別的。約束力除了決定於約束本身，還依賴於系統本身的運動；**在沒有研究運動之前，約束力是不可能確定的**。同時，如果約束是固定的，那麼只有約束本身就不會引起質點的加速運動。從這一點可以看出約束力是被動性質的力。

根據以上所說，在非自由系運動時，作用於其上之力，依性質可分爲兩類：**主動力**和**約束力**。

有了這些概念，我們再引進一個實用上極有用處的原理，即**釋放原理**(Principle of release)。這個原理的內容是：**可以除去各個約束，同時給系以這些約束相當的約束力，而不破壞系的原來的動靜狀態**。換言之，**用約束力來代替約束作用，就可把非自由系問題變成自由系來處理**。

驟然看來，這個原理是這樣的簡單和明瞭，似乎並不包含有任何新的意義；因爲消除約束而易以約束力，粗看起來是互相抵消的過程。然而事實上並不是這樣，約束的消除，增加了系的自由度數，即改變了系的運動性質，而隨後所加的約束力對於運動的結構則沒有影響。所以釋