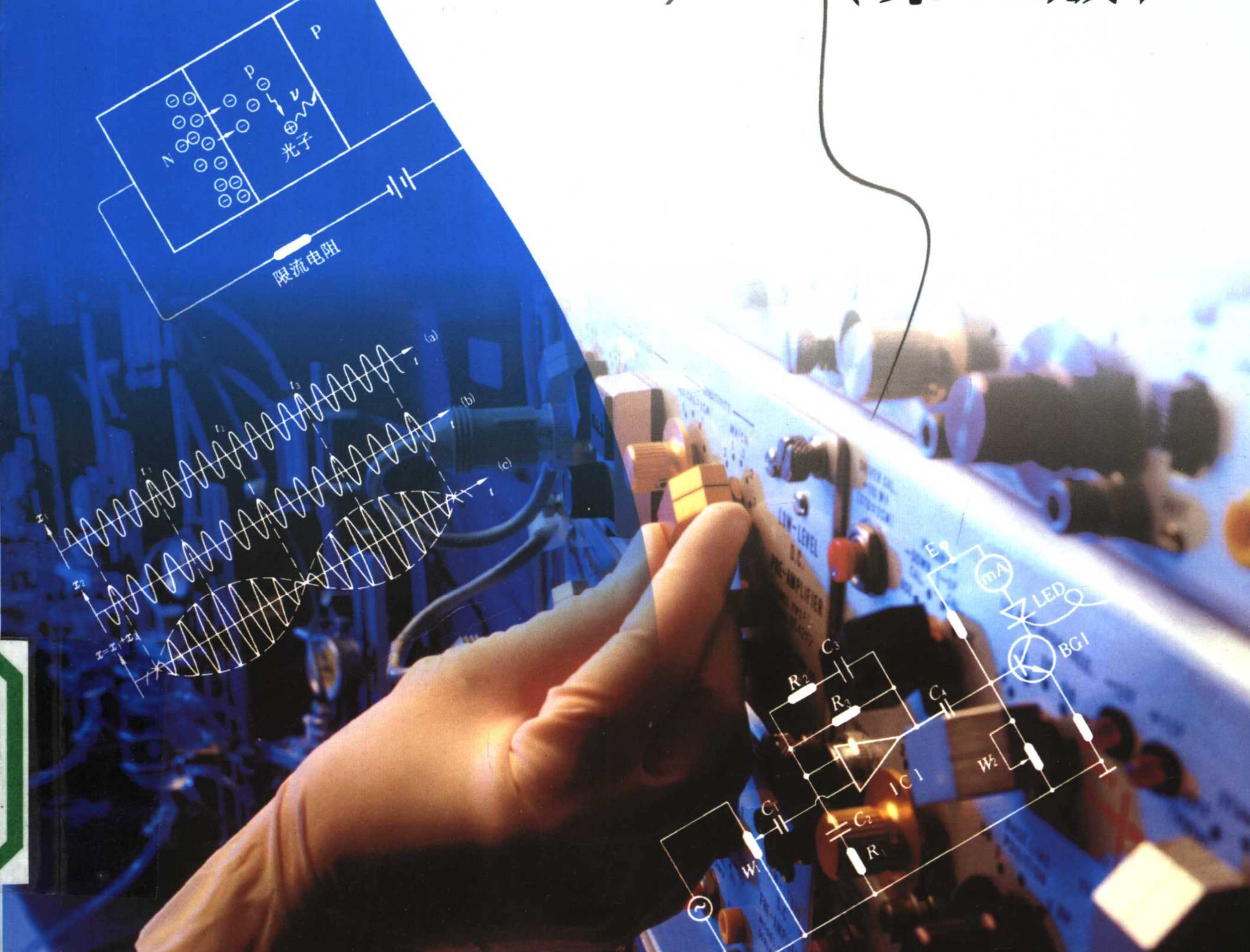
主编 方建兴 江美福 朱天淳

WULISHIYAN

物理实验

（第二版）



苏州大学出版社

物 理 实 验

（第二版）

主　编　方建兴　江美福　朱天淳
主　审　包　仁

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理实验/方建兴，江美福，朱天淳主编．-2版．—苏州：苏州大学出版社，2007．1
ISBN 978-7-81090-797-2

Ⅰ．物…　Ⅱ．①方…②江…③朱…　Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ．O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第005424号

物理实验(第二版)
方建兴　江美福　朱天淳　主编
责任编辑　周建兰

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号　邮编：215021)
宜兴文化印装厂印装
(地址：宜兴市南漕镇　邮编：214217)

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 19.75　字数 492千
2007年1月第1版　2007年1月第1次印刷
ISBN 978-7-81090-797-2　定价：29.00元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-67258835

前　言

《物理实验》自2002年出版以来，受到全国许多高校工作在大学物理实验教学第一线的教师的关心，提出了不少有益的建议。2004年《物理实验》被列入"苏州大学精品教材"建设行列，结合几年来教材使用过程中老师与学生反馈回来的意见和对教育部新版"大学物理实验大纲"的理解，在苏州大学基础物理实验中心全体教师和实验技术人员的积极参与、苏州大学精品教材建设基金的资助和苏州大学出版社的大力支持下，本书第二版终于与读者见面了。

本书第二版保留了第一版的特色和风格，即在体系上仍按力学和热学、电磁学、光学以及综合设计性实验四大模块编写，但将实验项目重新进行了编排，删除了内容重复或与教学大纲不相适应的12个实验项目，更新和加强了综合设计性实验内容，增加了"真空的获得与测量"实验，形成了薄膜的制备、薄膜的介电常数和折射率的测量系列。

本书第二版的编写人员也作了适当调整，由方建兴、江美福和朱天淳负责主编，参编人员包括江美福（绪论，第1篇，实验2.1、2.5、3.2、3.6、4.8、5.16）、蔡恒（实验2.2、2.4、5.2、5.3、5.15）、俞公达（实验2.3、2.6、2.7、2.9、2.10、2.12、2.13、2.14、2.15、2.17、5.1、5.4）、储炳寿（实验2.8、2.11）、戴永丰（实验2.16、4.3）、包仁（实验3.1、3.5、3.15、5.5）、钱依（实验3.3、3.4、4.10）、张毓麟（实验3.7、3.8、3.9、3.10、3.11、5.6、5.7）、朱天淳（实验3.12、3.13、3.14、3.16）、张橙华（实验4.1、4.6、4.9、4.11、4.15、5.11、5.13以及附录1、2、3）、方建兴（实验4.2、4.4、4.5、4.12、4.14、5.8、5.9、5.10、5.12、5.14）、吴茂成（实验4.7、4.13），最后由方建兴、江美福、朱天淳统稿和修改定稿。

虽然编者为本书第二版进行了较长时间的酝酿和多次研讨，对提高书稿的质量做了许多工作，但由于水平有限，书中仍会存在许多缺点和不足，敬请广大读者批评指正。

编　者

2006年11月

目　录

绪　　论

一、物理实验课的地位、作用和任务

物理学是实验科学.物理学的概念、规律和理论的建立、发现与形成,都以物理实验为基础并受到实验的检验.物理学在自然科学的其他领域的广泛应用也离不开实验.历史上每次重大的技术革命都来源于物理学上的重大突破.热学、热力学的研究(18世纪下半叶)导致蒸汽机的发明和广泛应用,引发了第一次工业革命,使人类进入了热机、蒸汽机时代.电磁感应的研究、电磁学理论的建立(19世纪中叶)导致发电机、电动机的发明及无线电通信的发展,从而引发了第二次工业革命,人类从此跨入了电气化时代.相对论、量子力学的建立(1900～1930年)使物理学进入了高速、微观领域;核物理的研究和发展导致核能的释放和应用成为现实;原子、分子物理的研究和发展导致了激光的发明和应用;半导体、固体物理、材料科学的研究和发展导致了晶体管、大规模集成电路、新材料、电子计算机的发明和广泛应用.人们把新能源、新材料、激光技术、信息技术的发展称为第三次工业革命.物理实验的思想、方法和技术已广泛应用于其他学科和生产实践之中,成为推动科学技术发展的强有力的工具.

作为21世纪的理、工科大学生,不仅要掌握比较深厚的基础理论和专业理论知识,还应在物理实验的基本知识、基本方法、基本技能等方面受到较系统的训练,加深对物理学基本概念和基本规律的理解和掌握,培养良好的科学素质、创新精神和实践能力.

物理实验课是学生必修的独立开设的一门基础实验课,是学生进入大学后接受系统实验方法和实验技能训练的开端,是理、工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础课程.

物理实验课的具体任务是:

(1) 通过对实验现象的观察、分析,研究物理现象、验证物理规律和对物理量进行测量,掌握常用基本物理实验仪器的原理和性能,学会正确使用、调节和读数,了解一些物理量的测量方法.

(2) 培养与提高学生的科学实验能力,其中包括:

① 自行阅读实验教材或资料,做好实验前的准备;

② 借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器;

③ 运用物理学理论对实验现象进行初步分析和判断;

④ 学会对实验进行误差分析和不确定度评定的基本方法,正确记录和处理实验数据,绘制曲线,说明实验结果,撰写合格的实验报告;

⑤ 完成简单的设计性实验,为以后独立设计实验方案和解决新的实验课题创造条件;

⑥ 提高进行科学实验工作的综合能力,包括实际动手能力、分析判断能力、独立思考能

力、革新创造能力、归纳总结能力、口头表达能力等.

(3) 培养与提高学生的科学实验素养,使学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风,严肃认真的工作态度,主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财物的优良品德.

二、物理实验课的基本程序

1. 预习.

实验前必须认真阅读教材及有关参考资料,着重于理解实验原理,明确实验目的、测量方法和主要实验步骤,并在上课前写好预习报告.预习报告的内容主要包括:了解实验名称;回答预习思考题;列出有关测量的计算式或将要被验证的定律;画出电路图、光路图或设备示意图;设计出数据记录表格.

2. 实验操作.

首先应根据教材或仪器说明书熟悉仪器,在老师指导下了解仪器的正确使用方法,对照仪器,明确要测什么物理量,弄清先测什么、再测什么、最后测什么、如何测等,做到心中有数,绝对不可盲目动手.

实验中,应集中精力仔细观察,认真思考观察到的物理现象;正确读数,及时将采集的实验数据和观察到的现象如实地记录下来,尤其是对所谓反常现象要仔细观察分析,不要单纯追求"顺利",要养成对观察到的现象和所测得的数据随时进行判断的习惯;对实验过程中出现的故障要学会即时排除.

实验结束后,要将测得的数据交给老师检查,检查合格并整理好仪器后,方可离开实验室.

3. 撰写实验报告.

写实验报告是为了培养、训练学生以书面形式总结工作或报告科研成果的能力.一份完整的实验报告一般包括以下内容:① 实验名称和日期;② 实验目的;③ 实验原理(应用自己的语言简要叙述,切忌照抄教材,应画出实验的原理图、电路图、光路图等,并列出测量和计算所依据的公式);④ 实验仪器及装置(仪器应标明规格、型号);⑤ 主要实验步骤(对实验中关键性的调整方法和测量技巧应着重写出);⑥ 数据表格、实验曲线;⑦ 数据处理及结果分析(要求写出数据处理的主要过程,进行误差分析和不确定度评定,并给出最后结果);⑧ 问题讨论(包括对实验现象的分析、实验中存在的问题、改进实验的建议、回答讨论题等).

实验报告要求书写清晰,字迹端正,数据记录整洁,图表合格,文理通顺,内容简明扼要.实验报告一律用物理实验报告纸书写.

第1篇 物理实验的基本知识

所谓实验，就是在理论思想指导下，由实验者选用一定的仪器设备，在一定的条件下，人为地控制或模拟自然现象，使它以比较纯粹和典型的形式表现出来，再通过对某些物理量的观察与测量去探索客观规律的过程．由于实验方法的不完善，且仪器都有一定的准确度，测量条件并非总能满足理论上假定的或测量仪器所规定的使用条件，因此任何测量都不可能是绝对准确的．进行一项实验，除了要懂得如何正确获取应有的数据外，如何正确处理实验中得到的数据，如何正确表达测量结果，并给出对测量结果的可靠性评价（合理估计出误差范围或不确定度），也是实验工作者必须掌握的基本知识．

本章就是针对上述问题，通过实例，系统地对物理实验的基本知识作一简单介绍．主要内容包括：测量与误差，误差与不确定度，不确定度的评定，测量结果的质量评价，有效数字及其运算，数据处理的基本方法，物理实验的基本测量方法及测量仪器和测量条件的选择等．

1.1 测量与误差

所谓测量，就是将待测量与选做法定标准的同类计量单位进行比较，从而确定待测量是标准单位的若干倍，这一过程称之为测量．显然，测量值（结果）应包含数值和单位两部分，两者缺一不可．我国采用的单位是以 SI 制为基础的法定计量单位．

测量得到的数值称为测量值，用“x”表示．

1.1.1 测量的分类

一、直接测量和间接测量

用测量仪器能直接获得测量结果的测量称为直接测量，相应的物理量称之为直接测量量，直接测量是实验中最基本最常见的一种测量方式．如用米尺量物体的长度，用天平称物体的质量等．

实际上很多物理量是不能用仪器直接测量的，往往是通过若干可直接测量的物理量经过一定的函数关系运算后获得结果的，这种测量称为间接测量，相应的物理量称为间接测量量．

如测圆柱体的密度时，可以用游标卡尺或螺旋测微计量出它的高度 h 及直径 d，用天平

称出它的质量 m，则圆柱体的密度为

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{4m}{\pi d^2 h}$$

值得指出的是，同一物理量由于选用的测量方法不同，它可以是直接测量量，也可以是间接测量量. 例如，采用上述方法测出的圆柱体体积为间接测量量，若改用量筒排水法测量，它又成为直接测量量了.

二、等精度测量与不等精度测量

如对某一物理量进行多次重复测量，而且每次的条件都相同（同一观察者、同一组仪器、同一种实验方法、同一实验环境等），测得一组数据（$x_1, x_2, \cdots, x_n$），尽管各次测得的结果有所不同，我们没有充足的理由可以判断某次测量比另一次测量更精确，这样只能认为每次测量的精确程度是相同的. 于是将这种相同精确程度的测量称为等精度测量，这样的一组数据称为测量列. 在诸测量条件中，只要有一个发生了变化，这时所进行的测量就成为不等精度测量.

严格说来，在物理实验中，保持测量条件完全相同的多次测量是极其困难的，但当某一条件的变化对测量结果影响不大，甚至可以忽略时，仍可视这种测量为等精度测量. 在本章中，除了特别指明外，我们所讨论的测量均为等精度测量.

1.1.2 误 差

一、真值

在一定的客观条件下，被测量的物理量具有一个客观的真实数值，称为该物理量的“真值”，用“X”表示. 测量的目的就是力图得到这些真值. 由于在具体测量时，各种条件（仪器、测量者、客观条件、实验方法等）的限制使得测量不可能绝对准确，实际上真值永远得不到. 测量只可能尽量得到真值的近似值或称近真值，有时也称最佳值.

二、误差

测量值与真值之差，称之为误差，可表示为

$$\Delta x_i = x_i - X \tag{1.1-1}$$

式中 Δx_i 为某次误差，x_i 为某次测量值，显然 Δx_i 可正也可负.

既然真值永远得不到，按照误差定义，误差也就无法精确求出. 为了解决这个问题，实际测量时，有时可以用下列各类值与测量值之差来估算误差.

1. 理论值. 如三角形内角之和为 180°等.

2. 公认值. 世界各国公认的一些常数，如在标准大气压下，0℃ 时水的密度为 999.84kg/m³ 等.

3. 计量学约定真值. 如国际及国家计量部门规定的长度、时间、质量等标准.

4. 相对真值. 用准确度高一个等级的仪器校正的测定值.

三、误差的分类

为了得到尽可能接近真值的测量结果，测量者必须分析和研究误差的来源和性质，有针对性地采取适当措施，尽可能地减小误差.

误差按其特征和表现形式可以分为系统误差、偶然误差两大类.

1. 系统误差.

系统误差的特点是,在同一条件下(实验方法、仪器、环境和观察者等不变),每次测量同一物理量时,误差的大小和符号始终保持恒定或按一定的规律变化.

系统误差的来源有以下几个方面:

(1) 仪器的固有缺陷. 如刻度不准,零点未调准,仪器水平或铅直未调整好,砝码本身未经校准等.

(2) 实验方法的不完善. 实验所依据的原理不尽完善,公式的近似性或实验条件达不到理论公式所要求的条件而引起的误差. 如称重时未考虑空气浮力,忽略摩擦、接触电阻等.

(3) 环境条件的变化. 外界环境(如温度、湿度、电磁场等)发生变化或不满足测量仪器规定的使用条件所造成的误差. 例如,标准电池是以 20℃ 时的电动势作为标准值的,若在 5℃ 时使用而不加修正就引入了系统误差.

(4) 测量者自身的某些因素. 由测量者感觉器官的不完善或某种不良习惯所引起的误差. 例如,有的人习惯侧坐斜视读数而造成读数偏大或偏小,几个人同时用秒表计时会因每个人的反应快慢不同而结果不一致等.

系统误差的数值和符号(正、负)一般来说是定值或按某种规律变化,因此系统误差是可以被发现、减小、消除或修正的,但不能通过多次测量来减小或消除. 对操作者来说,系统误差的规律及其产生原因可能知道,也可能不知道. 已被确切掌握了其大小和符号的系统误差称为可定系统误差;对大小和符号不能确切掌握的系统误差称为未定系统误差. 前者一般可以在测量过程中采取措施予以消除或在测量结果中进行修正;而后者一般难以作出修正,只能估计出它的极限范围.

2. 随机误差(偶然误差).

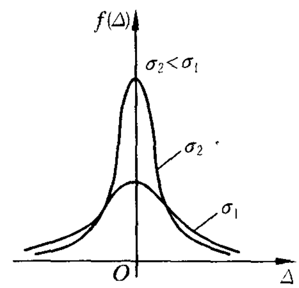


图 1.1-1

在一定条件下,每次测量同一物理量时,测量值仍会出现一些似乎毫无规律的起伏,这种大小和符号随机变化的误差,称为随机误差,又称偶然误差.

随机误差可能的来源是:人们感官(如听觉、视觉、触觉)的分辨能力不尽相同,表现为每个人的估读能力不一致;外界的干扰(如温度不均匀、振动、气流、噪声等)既不能消除又无法精确估量;所有影响测量的次要因素不尽全知等. 这种误差是无法控制的,但在同一条件对同一物理量进行多次测量时,随机误差的分布显示出一定的统计规律,大多数情况下遵守正态分布,如图 1.1-1 所示. 横坐标表示误差 $\Delta = x - X$,纵坐标表示与误差出现的概率有关的概率密度函数 $f(\Delta)$. 应用概率论的数学方法可导出:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1-2}$$

式中的特征量 σ 为

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^{\,2}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - X)^2}{n}} \tag{1.1-3}$$

σ 称为标准误差.

服从正态分布的随机误差具有下面一些特性：

(1) 单峰性. 绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大.

(2) 对称性. 绝对值相等的正负误差出现的概率相同.

(3) 有界性. 在一定的测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度.

(4) 抵偿性. 随机误差的算术平均值随着测量次数的增加而越来越趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = 0 \tag{1.1-4}$$

综上所述，系统误差的特点是确定性；随机误差的特点是随机性. 它们是两种不同性质的误差，在一定的实验条件下，它们有自己的内涵和界限；但当条件改变时，彼此又可能相互转化. 例如，系统误差与随机误差的区别有时与空间和时间的因素有关. 测量时环境温度在短时间内可保持恒定或缓慢变化，但在长时间内却是在某个平均值附近作无规律的变化，这种由于温度变化所造成的误差在短时间内可以看成是系统误差，而在长时间内则宜作为随机误差处理. 随着技术的发展和设备的改进，某些产生随机误差的因素能够得到控制，这些随机误差就可以确定为系统误差并得到改善或修正；而有些规律复杂的未定系统误差也可以通过改变测量状态使其随机化，这种系统误差又可以当做随机误差来处理.

还有一种过失误差，是由于测量系统偶然偏离所规定的测量条件和方法或记录、计算数据时出现失误而产生的，实际上是一种测量错误. 错误不同于误差，它是不允许存在的，是完全可以事先发现和避免的.

值得指出的是，不应当把有某种异常的观察值都作为过失误差来处理，因为它可能是数据中固有的随机性的极端情况. 判断一个观察值是否为异常值，通常应根据技术上或物理上的理由作出决定. 本篇 1.3 节将给出一个简单的判定方法.

如上所述，误差自始至终存在于一切科学测量的全过程之中，因此作为一个科学实验的结果，不仅应当提供被测对象的量值大小和单位，还应当对测量数值本身的可靠程度作出判断(即给出误差范围或不确定度). 一个不知道可靠程度的测量值是没有多大意义的. 因此，一个正确的实验结果应该包括数值、单位和误差(或不确定度)，三者缺一不可. 下面分别就系统误差的发现和消除及随机误差的估算作简单介绍.

1.1.3 系统误差的发现和消除

分析和消除系统误差是一个比较复杂的问题，任何一个实验者都应在实验前、实验中和实验后对可能产生的或已经产生的系统误差加以分析和研究. 但由于系统误差的分析很难脱离具体的实验内容，在此仅作简单介绍，在以后的仪器误差及不确定度的评定中也将涉及.

一、系统误差的发现

如前所述，系统误差的数值和符号(正、负)一般来说是定值或按某种规律变化的，因此系统误差不能通过简单地重复测量来发现或消除. 下面介绍几种常用的揭示系统误差的方法.

1. 理论分析.

测量过程中因理论公式的近似性等原因所造成的系统误差常常可以从理论上作出判断并估计其量值. 例如,利用伏安法测电阻时,电流表内接时将产生正误差,电流表外接时将产生负误差.

2. 将实验结果与公认值或相对真值比较.

对已经调好的仪器或系统,可通过测量已有公认值或相对真值的物理量来发现该仪器或系统是否存在重大的系统误差. 例如,在光学实验中,常常通过测量波长已知的钠双线(589.0nm 和 589.6nm)或氦氖激光器发出的红光(632.8nm)等来检查测量系统的准确度.

3. 进行不同测量方法的比较测量.

比较用不同的测量方法或设备去测量同一物理量所得出的结果也可以判断是否存在系统误差. 例如,用两种不同型号的天平来测量某物体的质量、用两只不同的电流表先后测量某电路的电流值等.

4. 进行不同实验条件的比较测量.

改变产生某项系统误差的具体条件进行比较测量,常常可以发现有关的系统误差. 例如,用电位差计来测量某电池的电动势时,可以通过改变辅助电源的电压来突出电阻丝不均匀所带来的影响.

二、系统误差的消除或修正

发现系统误差之后需要对测量的各个环节进行全面的分析,进一步验证并找出其产生的具体原因,才有可能作出针对性的处理.

1. 通过理论公式引入修正值.

例如,利用伏安法测电阻时,电流表内接或外接必须分别考虑电流表和电压表的内阻等.

2. 消除造成某项系统误差的因素.

例如,在弹性模量和简谐运动的研究等实验中,钢丝和弹簧的自然状态均非完全伸直,常常采用加起始载荷的方法来消除这类"起始"误差.

3. 改进测量方法.

例如,质量称衡时,用复称法或交换法来消除天平的不等臂误差;用分光计测量三棱镜的顶角等实验中,采用对径读数法来消除度盘的偏心差;光栅实验中,采用对± 1级衍射角取平均的办法来改善光束偏离垂直入射造成的测角误差;在电表校准实验中,用高级别的电表来对低级别的电表示值作出修正,以改善其可定系统误差.

4. 实验曲线的内插、外推和补偿.

如采用多管法测定液体的粘度系数实验时,测出同一钢球在不同内径的管子中经过相同距离时所用的时间,再作出$\frac{d}{D}$-t 曲线,然后外推到管子内径 $D\to\infty$时极限时间值等.

5. 系统误差的随机化处理.

改变测量条件时,系统误差也将时大时小,时正时负,平均的结果可实现系统误差的部分抵偿. 因此对有些系统误差,可在均匀改变测量状态下作多次测量,并取测量的平均值来削弱. 例如,使用测微目镜测间距,由于测微丝杠的螺距不可能做得绝对均匀,测量中有意利用丝杠的不同部位进行测量,螺距不均匀所造成的系统误差在一定程度上被随机化了,用平均值来表达测量结果就较为准确;在圆柱或钢丝的不同截面、不同方位进行直径测量,可以

部分抵偿因材质和加工等原因造成试样直径不均匀或形状不规则所带来的微小误差.

1.1.4 随机误差的统计处理

对某一物理量 x 进行多次直接测量后,得到的是一组含有误差的数据,如何从这组数据中获得待测量及其误差的最佳估计值呢?

从前面的讨论中可知,随机误差具有抵偿性,即随机误差的算术平均值随着测量次数的增加而逐渐趋向于零,见式(1.1-4).为此我们可以用增加测量次数的办法来减小随机误差,当测量次数 $n \to \infty$ 或足够多时,测量列的随机误差趋于零,此时各次测量结果的算术平均值就趋近于真值.

一、近真值

如果在相同条件下对某物理量 x 进行了 n 次(等精度)重复测量,测量值分别为 x_1,x_2,…,x_n,其算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.1-5}$$

根据误差理论,在一组 n 次测量的数据中算术平均值最接近于真值,因此定义 $\bar{x}$ 为测量结果的最佳值或近真值.测量值与最佳值的差称为偏差.由于真值永远得不到,只能得到近真值,进行误差估算,严格说来应是偏差估算(两者在测量次数 $n \to \infty$ 或足够多时一致),在以后的讨论中,本书不再严格区分误差和偏差,而笼统地称为误差.

二、误差估算

物理实验中,多次测量的误差可用算术平均绝对误差或标准误差(方均根误差)来表示.另外,误差估算时还会用到极限误差.

1. 算术平均绝对误差.

n 次测量(等精度)中,每次测量值 x_i 与 $\bar{x}$ 的偏差为 $\delta_i = x_i - \bar{x}$,定义算术平均绝对误差为

$$\delta = \frac{1}{n}(|\delta_1| + |\delta_2| + \cdots + |\delta_n|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \tag{1.1-6}$$

根据误差理论可算出,误差出现在$(-\delta, +\delta)$区间内的概率分布函数值为 57.5%,可见算术平均绝对误差的物理意义是:任作一次测量,测量值的误差在 $-\delta \sim +\delta$ 之间的可能性为 57.5%.

2. 标准误差(方均根误差).

前面已约定,每次测量的随机误差的分布遵守正态分布,其概率密度函数 $f(\Delta)$ 的特征量 σ 即为标准误差,见式(1.1-3),式中 X 为真值.用误差的概率密度函数可以得出,误差出现在$(-\sigma, +\sigma)$区间内的概率为

$$P(-\sigma < \Delta < +\sigma) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\Delta$$

查拉普拉斯积分表可得:$P(-\sigma < \Delta < +\sigma) = 68.3\%$.

可见,标准误差 σ 所表示的意义是:任作一次测量,测量误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的可能

性为 68.3%. 真值实际上得不到，但当测量次数 $n\to\infty$ 或足够多时，$\bar{x}\to X$，此时标准误差 σ_x 的计算式应为

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum\Delta_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}\quad(n\to\infty\text{ 或足够多})\qquad(1.1\text{-}7)$$

当测量次数 n 有限时，$\bar{x}\neq X$，我们只能得到偏差，此时只能根据偏差来估算标准误差，由误差理论可以证明，此时可以把

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\quad(n\text{ 有限时})\qquad(1.1\text{-}8)①$$

作为 σ_x 的最佳估计. S_x 称为测量列的标准误差，式(1.1-8)即为贝塞尔公式. 不难发现，当 $n>10$ 时，式(1.1-7)与式(1.1-8)计算出的结果已很接近. 实验教学中，测量次数 n 都是有限的，一般 $5\leqslant n\leqslant 10$，故常用式(1.1-8)来估算测量值的随机误差，并近似认为测量次数不是很少(10 次左右)时，测量列中任一测量值的误差落在区间$(-S_x,+S_x)$内的概率仍在 68% 左右.

另外，查拉普拉斯积分表可得：$P(-2\sigma<\Delta<+2\sigma)=95.4\%$，$P(-3\sigma<\Delta<+3\sigma)=99.7\%$，它表明任作一次测量时，测量值的误差落在 -3σ 到 $+3\sigma$ 之间的概率为 99.7%，即在 1 000 次测量中只有 3 次测量其误差绝对值会超出 3σ，而一般测量中次数很少超过几十次，因此可以认为测量值误差超出 $\pm3\sigma$ 范围的概率是极小的，故称 3σ 为极限误差.

3. 算术平均值的标准误差.

如上所述，对物理量 x 进行了 n 次等精度测量后，通常取其平均值 $\bar{x}$ 作为最佳值. 显然 $\bar{x}$ 比任何一次测量值 x_i 更可靠，但 $\bar{x}$ 毕竟不是真值，其可靠性如何呢?

根据误差理论，算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差 $S_{\bar{x}}$ 可写成

---

① 关于式(1.1-8)的导出. 如果在相同条件下对某物理量 x 进行了 n 次(等精度)重复测量，测量值分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，其算术平均值为：$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，而真值为 X，则按定义各次测量的误差和偏差分别为：$\Delta_i=x_i-X$，$\delta_i=x_i-\bar{x}$，对 Δ_i 求和(注意到 $\sum x_i=n\bar{x}$)得：$\sum\Delta_i=\sum x_i-nX=n\bar{x}-nX$，$\bar{x}=X+\frac{\sum\Delta_i}{n}$，

相应的偏差可表示为：$\delta_i=x_i-X-\frac{\sum\Delta_i}{n}=\Delta_i-\frac{\sum\Delta_i}{n}$.

对上式两边平方再求和得：$\sum\delta_i^2=\sum\Delta_i^2-2\frac{(\sum\Delta_i)^2}{n}+n\left(\frac{\sum\Delta_i}{n}\right)^2$，即 $\sum\delta_i^2=\sum\Delta_i^2-\frac{(\sum\Delta_i)^2}{n}$. 对上式右边第二项展开可得：$\sum\delta_i^2=\sum\Delta_i^2-\frac{\sum\Delta_i^2}{n}-2\frac{\sum_{i<j}\Delta_i\Delta_j}{n}$. 由于误差有正有负，当 $n\to\infty$ 时，上式右侧第三项趋于零，于是有

$$\sum\delta_i^2=\sum\Delta_i^2-\frac{\sum\Delta_i^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sum\Delta_i^2\text{，即 }\frac{\sum\delta_i^2}{n-1}=\frac{\sum\Delta_i^2}{n}=\sigma^2.$$

用偏差计算测量列的标准误差的公式为

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

上式即为贝塞尔公式. 必须指出的是，以上讨论中假定了 $n\to\infty$，而实际测量次数 n 是有限的，故 S_x 只是对 σ_x 的一种估计. 当测量次数较少时(如 $n<5$)，随机误差不再遵守正态分布，而符合 t 分布. 有关进一步的探讨，请参阅有关误差理论的书籍.

$$S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1.1-9}$$ [①]

上式表明算术平均值的标准误差是测量列的标准误差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍. 可以证明，算术平均值 $\bar{x}$ 的误差落在区间$(-S_{\bar{x}},+S_{\bar{x}})$内的概率为 68.3%.

标准误差 σ_x 是一个描述测量结果的离散程度的统计参量，S_x 是作为 σ_x 的估计值出现的，它提供的是单次测量的标准误差信息，尽管计算 S_x 时用到了平均值和多次测量的结果.

如果直接测量中系统误差已减至最小，被测量量是稳定的，并且对它作了多次测量，那么就应该用算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量值的最佳估计，用算术平均值的标准误差 $S_{\bar{x}}$ 作为标准误差的最佳估计.

必须指出的是，S_x 和 $S_{\bar{x}}$ 是分别作为 σ_x 和 $\sigma_{\bar{x}}$ 的估计值出现的，它们都不是原来意义上的误差，而属于不确定度的范畴. 另外，算术平均误差 δ、测量列的标准误差 S_x 和算术平均值的标准误差 $S_{\bar{x}}$ 都与测量值有相同的单位，都没有考虑待测量的大小，是以误差的绝对值来表示测定值的误差，故都属于绝对误差. 但由于算术平均误差 δ 反映的是每次测量误差绝对值的平均值，显然夸大了误差，且不能反映随机误差的统计特性，但是一般仅在极粗略的误差估算时才用到，本书约定绝对误差一律采用标准误差来表征.

以上讨论是针对随机误差而言的，对未定系统误差，如果通过改变测量条件使之呈现某种随机变化的特征，式(1.1-8)和式(1.1-9)仍然有效.

1.1.5 仪器误差

任何测量都需要借助一定的仪器或装置进行，任何仪器在制造或装配过程中都难免有一些缺陷，如轴承摩擦、游丝不匀、分度不匀、检测标准本身的误差等，即使在正确使用情况下，这种缺陷也会带来误差. 仪器误差或允许误差限就是在正确使用仪器的条件下，测量所得结果和被测量量的真值之间可能产生的最大误差，它包含了在规定条件下可定系统误差、未定系统误差和随机误差的总效果. 如数字仪表是通过对被测信号进行适当放大(或衰减)后作量化计数，给出数字显示的. 其中由于放大(或衰减)系数和量化单位不准造成的误差属于可定系统误差，来自测量过程中电子系统的漂移而产生的误差属于未定系统误差，而量化过程的尾数截断造成的误差又具有随机误差的性质.

对照通用的国际标准，按允许出现的误差的大小，国家计量局将仪器分级称为准确度级别. 使用时根据仪器的量程和准确度级别，有些只根据级别就可计算出该仪器的仪器误差. 结合物理实验的特点，下面作一简单的介绍.

---

① 关于式(1.1-9)的证明. 如果在相同条件下对某物理量 x 进行了 n 次(等精度)重复测量，测量值分别为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，其算术平均值为：$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，由标准误差的传递公式(参见本书 1.2.4 节)有 $S_{\bar{x}}=\sqrt{\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2 S_i^2}$，对于多次等精度测量，$S_1=S_2=\cdots=S_x$，则有 $S_{\bar{x}}=\sqrt{\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2 S_x^2}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}$.