gao deng dai shu xue xi zhi dao

高等代数学习指导

主　编　周亚兰

副主编　王文良　陈　露　邓方安

西北大学出版社

高等代数学习指导

主　编　周亚兰
副主编　王文良　陈　露　邓方安

西北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数学习指导/周亚兰主编. 一西安：西北大学出版社，2007.2

ISBN 978-7-5604-2246-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 周… Ⅲ. 高等代数–高等学校–教学参考资料 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第014125号

书　　名　高等代数学习指导
主　　编　周亚兰
出版发行　西北大学出版社
社　　址　西安市太白北路 229 号
邮政编码　710069
销售电话　029-88302590
经　　销　新华书店
印　　刷　汉中天汉印务有限责任公司
开　　本　880mm × 1230mm　1/32
印　　张　15.375
字　　数　408 千字
版　　次　2007 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5604-2246-6
定　　价　28.60 元

前　言

高等代数是数学专业的重要基础课，作为其中核心部分的线性代数，是理工科各专业的重要数学工具，该课程的内容和方法不仅对于后继课程的学习必不可少、有很大影响，而且对培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力也起着非常重要的作用. 高等代数课程的特点是内容比较抽象，概念、定理比较多，前后联系紧密、环环相扣、相互渗透、因果依存；其习题类型较多，技巧性强，难于概括和统一处理；学生在学习过程中普遍感到抽象，抓不住概念的实质，解题总结不出一般的思考方法. 为此，由多年来一直主讲高等代数课程的几位教师，根据多年教学经验积累及学生对该课程学习的要求，编写了《高等代数学习指导》一书，希望能帮助学生把握住该课程的基本脉络，为他们提供在解题的方法与技巧方面的一把入门钥匙，也为那些报考研究生的学生提供帮助. 同时本书也可作为讲授高等代数和线性代数的教师的参考书.

本书分为十章，除 λ - 矩阵和双线性函数两章外，每一章包括六部分：内容提要、主要知识网络图、重点难点解析、典型例题、检测题、习题及检测题简解（其中习题及补充题见北京大学数学系编《高等代数》第三版，本书从略），最后给出了综合练习题（八套往届考研题及解答）. 本书有下列几大特点：

1. 每章给出知识网络结构，有助于学生梳理该章知识.

2. 每章给出该章知识的重点及难点，并对重点、难点及一些重要的方法作了较详细的解析，对学生理解本章内容，把握住本章的核心是很有帮助的.

3. 每章给出近 20 道典型例题，将本章对应的各种类型的问题、方法尽可能地展示了出来. 典型例题中有多所高校的考研试题，许多例

题提供多种解法，并且对有启示的例题给出"评注"，起到画龙点睛的作用.

4. 每章有一套自测题，包含5～6种题型，可以检测读者对本章知识的掌握情况.

5. 习题及自测题解答部分给出了北京大学数学系编《高等代数》(第三版)相应章的习题、补充题、检测题的解答(习题部分：计算题给出答案，证明题给出了详细的提示；补充题及检测题部分全部给出详解，解法不唯一的给出多种解法).

说明：对习题中的证明题未作详解而给出详细提示的原因是想训练学生的动手能力.

6. 本书的最后给出了综合练习题(八套往届考研题及解答).

本书由周亚兰副教授编写第三、五、七章，王文良副教授编写第四、六、九章，陈露副教授编写第一、二章，邓方安教授编写第八、十章及综合练习题. 全书由周亚兰同志统稿. 由于编写水平所限，书中未免存在错误和疏漏，恳请读者指正.

编　者

2006年9月

目　　录

第一章　多项式 …………………………………………… (1)
　内容要点 …………………………………………… (1)
　主要知识网络图 …………………………………… (11)
　重点、难点解析 …………………………………… (12)
　典型例题 …………………………………………… (22)
　检测题 ……………………………………………… (36)
　习题及检测题简解 ………………………………… (38)
第二章　行列式 …………………………………………… (51)
　内容要点 …………………………………………… (51)
　主要知识网络图 …………………………………… (57)
　重点、难点解析 …………………………………… (57)
　典型例题 …………………………………………… (61)
　检测题 ……………………………………………… (79)
　习题及检测题简解 ………………………………… (82)
第三章　线性方程组 ……………………………………… (99)
　内容要点 …………………………………………… (99)
　主要知识网络图 …………………………………… (101)
　重点、难点解析 …………………………………… (102)
　典型例题 …………………………………………… (106)
　检测题 ……………………………………………… (124)
　习题及检测题简解 ………………………………… (127)
第四章　矩阵 ……………………………………………… (143)

内容要点 …… (143)
主要知识网络图 …… (156)
重点、难点解析 …… (156)
典型例题 …… (157)
检测题 …… (177)
习题及检测题简解 …… (181)
第五章　二次型 …… (201)
内容要点 …… (201)
主要知识网络图 …… (203)
重点、难点解析 …… (203)
典型例题 …… (208)
检测题 …… (222)
习题及检测题简解 …… (225)
第六章　线性空间 …… (251)
内容要点 …… (251)
主要知识网络图 …… (262)
重点、难点解析 …… (263)
典型例题 …… (265)
检测题 …… (283)
习题及检测题简解 …… (288)
第七章　线性变换 …… (302)
内容要点 …… (302)
主要知识网络图 …… (305)
重点、难点解析 …… (306)
典型例题 …… (311)
检测题 …… (329)
习题及检测题简解 …… (333)
第八章　λ-矩阵 …… (350)

内容要点 …………………………………………………… (350)
典型例题 …………………………………………………… (351)
习题解答 …………………………………………………… (354)
第九章　欧几里得空间 ……………………………………… (380)
内容要点 …………………………………………………… (380)
主要知识网络图 …………………………………………… (390)
重点、难点解析 …………………………………………… (390)
典型例题 …………………………………………………… (391)
检测题 ……………………………………………………… (416)
习题及检测题简解 ………………………………………… (420)
第十章　双线性函数* ……………………………………… (433)
内容要点 …………………………………………………… (433)
典型例题 …………………………………………………… (435)
综合练习题 ………………………………………………… (440)
参考书目 …………………………………………………… (481)

第一章　多项式

内容要点

1　数环与数域

(1) 设 P 是非空数集，如果 P 中任意两个数的和、差、积仍是 P 中的数，则称 P 为一个数环.

(2) 设 P 是至少包含两个数的数集，如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数，则称 P 为一个数域.

(3) 任何数域都包含有理数域.

2　一元多项式的概念和运算

(1) 多项式的定义

形式表达式　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

称为系数在数域 P 中的关于文字 x 的一元多项式，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 全属于数域 P，n 为一个非负整数. 当 $a_n \neq 0$ 时，$a_n x^n$ 称为多项式 $f(x)$ 的首项，a_n 称为首项系数，n 称为 $f(x)$ 的次数，记作 $\partial(f(x)) = n$. $a_i x^i$ 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数.

当 $a_n = \cdots = a_1 = 0$，而 $a_0 \neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，即 $\partial(f(x)) = 0$；当 $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ 时，称 $f(x)$ 为零多项式，记为 0，零多项式是惟一不定义次数的多项式.

注　这里的文字 x 只是一个符号，表示一个广义元，可以表示数、矩阵等不同的事物.

(2) 多项式的运算

两个多项式可以相加、相减、相乘.

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad (n \geqslant m),$$

则

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \quad (\text{其中 } b_n = \cdots = b_{m+2} = b_{m+1} = 0).$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \cdots$$
$$+ (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0 = \sum_{s=0}^{m+n} (\sum_{i+j=s} a_i b_j)x^s.$$

数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘运算后，所得结果仍然是数域 P 上的多项式.

(3) 多项式次数的性质

1）当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时，

$$\partial(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial(f(x)), \partial(g(x))\}.$$

2）$\partial(f(x) \cdot g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$.

多项式乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积.

(4) 多项式的运算规律

1）加法交换律　$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$；

2）加法结合律　$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$；

3）乘法交换律　$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；

4）乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；

5）乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x);$$

6）乘法消去律

如果 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$，且 $f(x) \neq 0$，那么 $g(x) = h(x)$.

注　*以上运算规律和通常数的加法、乘法运算规律类似.*

(5) 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一

元多项式环,记为 $P[x]$,P 称为 $P[x]$ 的系数域.

3 多项式的整除性

(1) 带余除法定理

设 $f(x),g(x) \in P[x]$,$g(x) \neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x)$,$r(x) \in P[x]$,使 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立,其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$. 上式中的 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商,$r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

(2) 整除定义

设 $f(x),g(x) \in P[x]$,如果存在多项式 $h(x) \in P[x]$,使等式 $f(x) = g(x)h(x)$ 成立,则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$,或称 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除,用 $g(x) \mid f(x)$ 表示,此时 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的因式,$f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式. 用 $g(x) \nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

(3) 整除的判别

$f(x),g(x) \in P[x]$,$g(x) \neq 0$,则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x) = 0$.

(4) 整除的性质

1) 如果 $f(x) \mid g(x)$,$g(x) \mid f(x)$,那么 $f(x) = cg(x)$,其中 c 为非零常数.

2) 如果 $f(x) \mid g(x)$,$g(x) \mid h(x)$,那么 $f(x) \mid h(x)$.

3) 如果 $f(x) \mid g_i(x)$,$u_i(x)$ 为 $P[x]$ 上任意多项式($i = 1,2,\cdots,r$),那么 $f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_r(x)g_r(x))$.

4 最大公因式

(1) 最大公因式的定义

设 $f(x),g(x) \in P[x]$,如果存在 $\varphi(x) \in P[x]$,使得 $\varphi(x) \mid f(x)$,$\varphi(x) \mid g(x)$,则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

若 $d(x) \in P[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,同时 $f(x)$,$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

(2) 最大公因式的性质

1) $P[x]$ 中任意两个多项式都有最大公因式. 两个零多项式的最大公因式为0. 两个不全为零的多项式的最大公因式总是一个非零多项式.

2) 两个多项式的最大公因式在可以相差一个非零常数倍的意义下是惟一确定的. 用 $(f(x),g(x))$ 表示首项系数为1的最大公因式.

3) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果有等式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立,则 $f(x),g(x)$ 和 $g(x),r(x)$ 有相同的公因式,进而有 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.(这是辗转相除法的理论依据)

4) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若它们有最大公因式 $d(x)$,则 $d(x)$ 可以表示成 $f(x),g(x)$ 的一个组合. 即存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

(3) 最大公因式的求法:辗转相除法(即连续多次使用带余除法)

(4) 最大公因式的概念可以由两个多项式推广到多个多项式的情形,并且有

1) $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$,

2) 存在多项式 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$,使 $u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$.

5 互素多项式

(1) 定义

设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若 $(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是互素的. 即两个多项式互素,当且仅当它们的最大公因式是非零常数.

(2) 互素多项式的性质

1) $f(x),g(x)\in P[x]$ 互素的充要条件是:存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

2) 如果 $(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,那么 $f(x)\mid h(x)$.

3) 如果 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且 $(f_1(x),f_2(x))=1$,那么 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

6 不可约多项式

(1) 定义

设 $p(x) \in P[x]$ 且 $\partial(p(x)) \geqslant 1$,如果 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比 $p(x)$ 低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式.

注 (a)一次多项式总是不可约多项式;(b)一个多项式是否不可约和系数域有关.

(2) 不可约多项式的性质

1) 不可约多项式 $p(x)$ 的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍 $cp(x)(c \neq 0)$ 这两种. 反之,具有这个性质的次数 $\geqslant 1$ 的多项式一定不可约.

2) 设 $p(x)$ 为不可约多项式, $\forall f(x) \in P[x]$,则 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $(p(x), f(x)) = 1$. 反之,具有这个性质的次数 $\geqslant 1$ 的多项式一定不可约(见检测题5).

3) 设 $p(x)$ 为不可约多项式, $\forall f(x), g(x) \in P[x]$,若 $p(x) \mid f(x)g(x)$,则一定有 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$. 反之,具有这个性质的次数 $\geqslant 1$ 的多项式一定不可约(见习题补充题6).(这个结果可以推广为:若不可约多项式整除一些多项式的乘积,则它一定至少整除这些多项式中的某一个.)

注 上面三条不可约多项式的性质也是次数≥1的多项式不可约的判别方法.

7 多项式的因式分解

(1) 因式分解及惟一性定理

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以"惟一地"分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓惟一性是指,如果 $f(x)$ 有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有 $s = t$,并且适当地排列因式的次序后有 $p_i(x) = c_i q_i(x)$. 其中

$c_i \in P(i = 1,2,\cdots,s)$ 为非零常数.

注 不存在一个普遍可行的方法对任意多项式进行因式分解.

(2) 多项式的标准分解式

设 $f(x) \in P[x]$,且 $\partial(f(x)) \geqslant 1$,把 $f(x)$ 的分解式表示成为 $f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 其中 c 为 $f(x)$ 的首项系数,$p_1(x)$,$p_2(x)$,$\cdots$,$p_s(x)$ 是互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式,r_1,r_2,$\cdots$,r_s 为正整数. 这种分解式称为 $f(x)$ 的标准分解式.

注 多项式的标准分解式是惟一的.

(3) 利用多项式的标准分解式,求两个多项式的最大公因式

若已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式,那么它们的最大公因式就是同时在 $f(x)$、$g(x)$ 的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积,所带方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带方幂中的较小的一个.

注 用这种方法求多项式的最大公因式看上去比较简单,但需要知道多项式的标准分解式,而求多项式的标准分解式没有一般的通用方法;辗转相除法求最大公因式虽然看起来计算较繁琐,但对任意多项式都适用.

8 重因式

(1) 定义

设 $p(x)$ 为不可约多项式,$f(x) \in P[x]$,如果 $p^k(x) \mid f(x)$,而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式.

$k = 0$ 时,$p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;$k = 1$ 时,一重因式叫做单因式;$k > 1$ 时,$p(x)$ 叫做 $f(x)$ 的重因式.

注 如果 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 那么 $p_1(x)$,$p_2(x)$,$\cdots$,$p_s(x)$ 分别是 $f(x)$ 的 r_1 重,r_2 重,$\cdots$,r_s 重因式 .

(2) 多项式的微商

1) 定义　设多项式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,那么 $f(x)$ 的微商是 $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$

2）微商的性质

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),$$
$$(cf(x))'=cf'(x),$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$
$$(f^m(x))'=m(f^{m-1}(x))f'(x).$$

3）高阶微商　微商$f'(x)$称为$f(x)$的一阶微商;$f'(x)$的微商$f''(x)$称为$f(x)$的二阶微商,…,$f(x)$的k阶微商记为$f^{(k)}(x)$.

4）一个n次多项式的一阶微商是$n-1$次多项式,它的n阶微商是一个常数,$n+1$阶微商为0.

(3) 重因式的性质

1）如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geqslant 1)$,那么$p(x)$是微商$f'(x)$的$k-1$重因式.

2）如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geqslant 1)$,那么$p(x)$是$f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式,但不是$f^{(k)}(x)$的因式.

3）不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的充分必要条件是$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

4）多项式$f(x)$没有重因式充分必要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素.

注　可以用辗转相除法来判别多项式有没有重因式.进而在$(f(x),f'(x))$中找出重因式.

5）设$f(x)$有标准分解式$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$,则$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$,它是一个与$f(x)$有完全相同的不可约因式,但没有重因式的多项式.可以用这种办法求一些多项式的不可约因式.

9　多项式函数

(1) 定义

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$是$P[x]$中的多项式,$\alpha$是$P$中的数,用$\alpha$代替$f(x)$表达式中的$x$,得$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n$是$P$中的一个数,这个数称为$f(x)$当$x=\alpha$时的值,记作$f(\alpha)$.

任意给一个P中的数α,就可以得到P中一个惟一确定的数$f(\alpha)$,即由多项式$f(x)$可以定义一个数域P上的函数.这样由多项式定义的函数称为数域P上的多项式函数.

注 在前面多项式定义中文字x是一个广义元,在本节中赋予x具体的含义,x取数域P中的数,就得到了多项式函数.

(2) 多项式的根

设$f(x) \in P[x]$,如果$f(x)$在$x = \alpha$时的函数值$f(\alpha) = 0$,则称α为$f(x)$的一个根或零点.如果$x - \alpha$是$f(x)$的k重因式,则称α为$f(x)$的k重根.$k = 1$时,α称为单根,$k > 1$时,α称为重根.

(3) 多项式函数的性质

1) 余数定理　设$f(x) \in P[x]$,用一次多项式$x - \alpha$去除$f(x)$,所得余式为一个常数,这个常数等于函数值$f(\alpha)$.

注 利用余数定理求$f(\alpha)$,往往比将α代入$f(x)$的表达式计算起来更为简便,可以利用综合除法去计算.

2) 设$f(x) \in P[x]$,α是$f(x)$的根的充分必要条件是$(x - \alpha) \mid f(x)$.

3) $P[x]$中n次多项式$(n \geq 1)$在数域P中的根不可能多于n个,重根按重数计算.

4) 设$f(x),g(x) \in P[x]$,且$\partial(f(x)) \leq n$,$\partial(g(x)) \leq n$,如果对P中$n+1$个不同数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$,有$f(\alpha_i) = g(\alpha_i)(i = 1, 2, \cdots, n+1)$,则$f(x) = g(x)$.

10　复系数多项式的因式分解

(1) 代数基本定理

每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中有一根.即每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中一定有一个一次因式.

注 复数域上所有次数大于1的多项式都是可约的,复系数不可约多项式只有一次因式.

(2) 复系数多项式因式分解定理

每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域上都可以惟一地分解成一次因式的乘积.

(3) 复系数多项式的标准分解式

$$f(x) = c(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s},$$

其中 c 为 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为不同的复数，$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 是正整数.

(4) 每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

11 实系数多项式的因式分解

(1) 设 $f(x)$ 是实系数多项式，如果 α 是 $f(x)$ 的复根，那么 α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 可也是 $f(x)$ 的根.

(2) 实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含非实共轭复数根的二次多项式.

(3) 实系数多项式因式分解定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

(4) 实系数多项式的标准分解式

$$f(x) = c(x-b_1)^{l_1}\cdots(x-b_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 c 为 $f(x)$ 的首项系数，$b_1,\cdots,b_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r$ 都是实数，$l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_r$ 是正整数，并且 $p_i^2-4q_i<0(i=1,\cdots,r)$.

12 有理系数多项式

(1) 如果一个非零的整系数多项式 $g(x)$ 的系数是互素的，则称它为一个本原多项式.

(2) 任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示成一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积，即 $f(x)=rg(x)$，并且这种表示法除了相差一个正负号是惟一的.

注　(a) 对于任何一个多项式 $f(x)$，把它所有系数的最大公因数 r(r 为有理数)提出来，就可以得到一个本原多项式 $g(x)$. (b) 有理系数多项式 $f(x)$ 的因式分解问题可以归结为整系数多项式或本原多项式 $g(x)$ 的因式分解问题.

(3) 高斯引理：两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

(4) 如果一个次数大于 1 的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(5) 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$ 是本原的，如果 $f(x)=$