组合·算法·理论与应用

温一慧　编著

兰州大学出版社

组合·算法·理论与应用

温一慧　编著

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合·算法·理论与应用/温一慧编著．—兰州：兰州大学出版社，2006.3
ISBN 7—311—02732—2

Ⅰ.组...　Ⅱ.温...　Ⅲ.组合数学　Ⅳ.O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 004946 号

组合·算法·理论与应用

温一慧　编著

兰州大学出版社出版发行
兰州市天水南路 222 号　电话:8617156　邮编:730000
E—mail:press@onbook.com.cn
http://www.onbook.com.cn

甘肃地质印刷厂印刷
开本:850×1168 毫米 1/32　　印张:14

2006 年 3 月第 1 版　　2006 年 3 月第 1 次印刷
字数:348 千字　　印数:1～1500 册

ISBN 7—311—02732—2/O·187　　定价:25.80 元

内容简介

本书以组合数学与算法的应用为重点，阐述了组合数学及其算法的基本理论与应用.全书共十四章，包括了组合学的基本计数原理、鸽巢原理、母函数、递推关系、容斥原理、分配分析与特殊计数、Pólya计数定理、反演理论、相异代表系等原理及应用问题，组合设计中的区组设计、幻方及其与图论结合而产生的图的标号问题，同时还讨论了一些重要的组合算法、P问题、NP问题、算法复杂性及其相互关系等.

本书可供应用数学专业、计算机专业的本专科学生、研究生和相关科技工作者学习与参考.

前　言

组合数学及其算法是一个古老而又年轻的数学分支，称其古老是因为它大约起源于公元前 2200 年，草创时期经历了 4000 多年，说其年轻是因为它迅速发展的历史只有几十年.

组合数学与算法是研究离散对象“关系结构”的学科，其研究的对象泛称格局.所谓格局包括图、设计、算法过程、数学系统、工作程序等，内容十分广泛.其研究的问题是：如何将有限个离散元素，按照某些确定的约束条件进行安排搭配以及实现某种安排搭配算法的有效性.问题的主要表现形式是：满足要求的安排搭配是否存在；如何得到的这样的安排搭配；这样的安排方案共有多少，以及在所有的方案中是否有最优的.即研究格局的存在、设计、计数、优化及算法的复杂性等问题.

近年来，利用组合学方法已经解决了数学领域中一些颇具挑战性的问题.如 Van der Waerden，B. L 于 1926 年提出的关于双随机矩阵积和式猜想的证明；Heawood，P. J 于 1890 年提出的曲面地图着色猜想的解决；著名的四色定理的计算机验证和扭结问题的新组合不变量的发现等.

目前组合学及其算法已经成为许多学科的基础，特别与计算机科学、数字通信、规划和试验设计等理论和应用学科关系密切.尤其是计算机科学，因为其求解问题时，需要处理离散数据，需要设计数据结构和对数据结构进行运算，常常涉及算法的运行效率、算法的优化和存储需求的分析等，组合学与其算法为这些问题的研究提供了理论基础、分析方法和实用技巧. 因此成为计算机科

学及其软件产业的基础.

组合数学及其算法应用广泛,它不仅应用于物理学、力学、化学、生物学、遗传学等自然科学领域,还广泛应用于心理学、经济学、管理学,甚至政治学等社会科学的各个方面,是目前最活跃的数学分支之一.

本书力求从不同方面阐述组合数学及其算法的应用,展现其应用的价值和魅力,全书共十四章,第一至第九章论述了组合分析基本理论与应用,第十至第十四章涉及了组合设计、组合算法及算法的复杂性等方面的理论、方法与应用.具体实例突出体现组合的计数方法、计数技巧、算法分析等应用和模型,比如第十一章为信息隐藏、伪装提供了数学模型的幻方,与纠错码等问题有关的第十二章图的标号问题等.阐述了研究的主要成果、潜在应用的领域及未解决的问题.

现代科学技术的发展,为组合学及其算法提供了新的发展机会和广阔的空间.随着组合与算法的理论和应用向其他数学分支的渗透,一些新的交叉学科:组合拓扑、组合几何、组合数论、组合矩阵论、组合群论等已经或正在形成,这些新的研究领域将促进组合与算法理论的日益完善.

作者

2005 年 8 月于苏州

目　录

第一章　鸽巢原理与 Ramsey 定理

鸽巢原理又称抽屉原理，它是解决组合数学中某些存在性问题的基本原理之一．由于德国数学家 Dirichlet 在确立和应用这一原理上做出过重要贡献，因此亦称 Dirichlet 原理．

Ramsey 定理亦称“广义鸽巢原理”，它是英国逻辑学家 Ramsey 在 1930 年推广鸽巢原理而得到的定理．鸽巢原理与 Ramsey 定理在应用数学的许多分支中都有重要的应用．

§1.1　鸽巢原理

定理 1.1(鸽巢原理)　如果有 $n+1$ 个鸽子和 n 个鸽巢，当鸽子全部栖息在巢中时，至少有两个或多于两个鸽子栖息在同一个巢中．

这个原理十分简单，读者容易验证它的真实性．值得注意的是鸽巢原理并没有具体指出哪个巢里栖息着两个或两个以上的鸽子，它仅仅是断定这样的巢存在，因此，鸽巢原理常用来证明某种结构的存在性问题．题目中通常含“至少有”、“一定有”、“不少于”、“存在”、“必然有”等词语．

下面例子说明在应用这个原理时，根据问题特点，构造不同的鸽巢是求解问题的关键．

例 1　在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，证明：在以这些点为顶点的三角形中，必有一个三角形，其面积不超过 $\frac{1}{8}$．

证明 用三条平行于上下底边的直线,把正方形分成 4 个大小相等的长方形,9 个点任意放入这 4 个长方形中,于是至少有 3 个点落在同一个长方形内,以这 3 个点为顶点三角形面积不会超过正方形面积的$\frac{1}{8}$.

例 2 一个盒内有 8 只红球和 8 只白球,一次至少取出多少个球,才能保证取出一对红球? 取出红、白球各一个?

解 至少取出 10 个球才能保证取出一对红球;至少取出 9 个球,才能保证取出红、白球各一个.

例 3 证明:在任意一群人中,必然有两个人在这群人中认识的人的数目相同.

证明 不妨设这群人的数目为 $n(n\geqslant 2)$. 若这 n 个人中,有一人不认识其余的人,不妨设这个人是第 n 个人. 如果 $n=2$,则两人互不认识,命题得证;如果 $n\geqslant 3$,则考虑余下的 $n-1$ 人,若这 $n-1$ 人中有多人互不相识,则命题得证. 否则,不妨设这 $n-1$ 人中每人相识人数都不少于 1,由于第 n 个人认识的人数为 0,故这 $n-1$ 人中每人认识的人数不大于 $n-2$. 据鸽巢原理,这 $n-1$ 人中至少有两人认识的人数相同.

如果这群人中每个人认识的人数均不为 0,由于每个人至多认识 $n-1$ 个人,依据鸽巢原理,这 n 个人至少有两人认识的人数相同.

例 4 从整数 $1,2,\cdots,200$ 中选出 101 个整数. 证明:在选出的整数中必存在两个数,其中一个数可被另一个数整除.

证明 任意一个整数都可以表成 $2^k\cdot a$ 的形式($k\geqslant 0$,a 是奇数). 在 1 到 200 中有 $1,3,5,\cdots,199$,共 100 个奇数,这样在选出的 101 个整数中,必有两个数可写成 $2^r\cdot a$ 和 $2^s\cdot a$ 形式,如果 $r\leqslant s$,则后者可被前者整除;如果 $r>s$,则前者可被后者整除.

例 5　证明：对任意给定的 m 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，必存在 k 和 $l(0\leqslant k<l\leqslant m)$，使得 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 能被 m 整除. 换言之，在序列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中，必存在连续的若干项的和能够被 m 整除.

证明　考虑 $a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_m$，如果这些和式中有一个能被 m 整除，则结论成立；否则假设每个被 m 除后都有一个非零余数，这些余数为 $1,2,\cdots,m-1$ 中的一个，故必有两个和式具有相同的余数，设这两个和式分别为：

$$a_1+a_2+\cdots+a_k,\qquad a_1+a_2+\cdots+a_l;\quad k<l$$

它们有相同的余数 r，即：

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=bm+r,\qquad a_1+a_2+\cdots+a_l=cm+r,$$

两式相减，得：

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l=(c-b)m,$$

即　$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 可被 m 整除. 证毕.

例 6　从 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 中选出 $n+1$ 个不同的数，证明：其中至少有一对数互素.

证明　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 是选出的 $n+1$ 个数，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$，令 $b_i=a_i+1,i=1,2,\cdots,n,1<b_1<b_2<\cdots<b_n\leqslant 2n$. 据鸽巢原理，$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1},b_1,b_2,\cdots,b_n$ 这 $2n+1$ 个数中，至少有一对数相等，且只能是 a_{i+1} 与 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $a_{i+1}=a_i+1$，因此 a_{i+1} 与 a_i 互素.

例 7　从 $\{1,2,3,\cdots,90\}$ 中任取 19 个不同的正整数，两两的差中是否一定有三个相等.

解　设这 19 个数为 $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{19}\leqslant 90$，由于

$$x_{19}-x_1=(x_{19}-x_{18})+(x_{18}-x_{17})+\cdots+(x_2-x_1),$$

如果右边的 18 个差中无三个相等，而只有两个相等，则取不同的最小差，应有

$$x_{19}-x_1 \geqslant 2\times(1+2+\cdots+9)=90,$$

此与 $x_{19}-x_1 \leqslant 90-1=89$ 矛盾，所以两两的差中一定有三个相等.

§1.2 鸽巢原理的加强形式

定理 1.2(鸽巢原理的加强形式) 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是正整数，如果将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒子中，则至少有 q_1 个物体在第一个盒子中，或至少有 q_2 个物体在第二个盒子中，…，或者至少有 q_n 个物体在第 n 个盒子中.

特别当 $q_1=q_2=\cdots=q_n=2$ 时，即为定理 1.1.

证明 将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒子中，若在第 i 个盒中放入少于 q_i 个物体($i=1,2,\cdots,n$)，则盒子中的全部物体的总数不超过

$$\begin{aligned}&(q_1-1)+(q_2-1)+\cdots+(q_n-1)=q_1+q_2+\cdots+q_n-n\\&<q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1\end{aligned}$$

故将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒中时，至少存在某个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得第 i 个盒中含有 q_i 或多于 q_i 个物体. 证毕.

在定理 1.2 中，若取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=r$，则有

推论 1.3 如果把 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒里，那么至少有一个盒里含有 r 个或多于 r 个物体.

推论 1.4 若 n 个非负整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 满足 $\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}>r-1$，那么 $m_1, m_2, \cdots, m_2$ 中至少有一个大于或等于 r.

证明 因为 $\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}>r-1$，

所以 $$m_1+m_2+\cdots+m_n \geqslant n(r-1)+1,$$

根据推论 1.3，存在 m_i，使得 $m_i \geqslant r$. 证毕.

例 1　证明：将数字 1,2,3,…,10 随机摆成一圈，则必存在某三个相邻的数之和大于或等于 17.

证明　由于每个数被加三次，故平均数是

$$\frac{3(1+2+\cdots+10)}{10}=16.5>17-1.$$

据推论 1.4，必有某三相邻数字之和不小于 17.

例 2　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 是由 n^2+1 个不同实数组成的序列，证明：一定可以从这个数列中选出 $(n+1)$—长的子序列，使得这个子序列为递增序列或递减序列.

证明　设 l_i 是从 a_i 开始的（向右）最长的递增子序列的长度，则每个 a_i 对应一个数 $l_i(i=1,2,\cdots,n^2+1)$.

如果存在某个 $l_k \geqslant n+1$，则命题得证.

如果对所有的 l_i，均有 $l_i<n+1$，则一定存在长为 $n+1$ 的递减子序列. 事实上对于 $l_1,l_2,\cdots,l_{n^2+1}$ 中的每个元素 l_i，必有 $1\leqslant l_i \leqslant n$，据推论 1.3，在数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n^2+1}$ 中必有 $n+1$ 数是相等的，不妨设它们为 $l_{k_1}=l_{k_2}=\cdots=l_{k_{n+1}}$，这里 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}\leqslant n^2+1$，与其对应的 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_{n+1}}$，必满足 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_{n+1}}$. 如若不然，当 $k_i<k_j$，有 $a_{k_i}<a_{k_j}$，则应有 $l_{k_i}=l_{k_j}+1$，此与 $l_{k_i}=l_{k_j}$ 矛盾. 于是 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_{n+1}}$ 为 $n+1$ 个数构成递减序列.

例如，对于 $n=4$ 的情形，序列 3,8,6,12,5,18,4,7,15,13,14,9,16,11,21,2,10，存在递增序列（或递减序列）. 比如 4,7,15,16,21.（或 18,15,13,11,2）.

例 2 有个有趣的解释，如果有 n^2+1 个不同高度的人随机地站成一排，那么总可以从他们之中选出 $n+1$ 个人，让他们后退一步后，这 $n+1$ 个人的身高是递增的或是递减的.

下面是比例 2 更为一般的情形，它的证明方法也是别具一格

的，它就是著名的 Erdös-Szekeres 定理.

定理 1.5 由 $mn+1$ 个不同的实数 $u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}$ 构成的序列中或含有一个 $m+1$ 长的递增子序列，或含有一个 $n+1$ 长的递减子序列.

证明 对每个数 u_i，设 l_i^+ 是以 u_i 为开始的最长递增子序列的长度，l_i^- 是以 u_i 为开始的最长的递减子序列的长度. 如果 $l_i^+\leqslant m$，$l_i^-\leqslant n$，映射 $u_i\to(l_i^+,l_i^-)$ 是从 $\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}$ 到 $\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,2,\cdots,n\}$ 的映射，这个映射是单射的，(因为当 $u_i>u_j$ 时，$l_i^->l_j^-$，或者当 $u_i<u_j$ 时，$l_i^+>l_j^+$，因此任何情形下 $(l_i^+,l_i^-)\neq(l_j^+,l_j^-)$)，而 $|\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}|=mn+1>mn=|\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,2,\cdots,n\}|$，这是不可能的. 证毕.

§ 1.3 Ramsey 问题与 Ramsey 数

我们先来证明：在任意六个人中，一定有三个人互相都认识，或者有三个人互相都不认识.

这个问题可以转化为图论问题，它的一般提法是：

定理 1.6 设 G 是具有 6 个顶点的完全图 K_6，若将 K_6 的边涂以红、蓝两色，则一定会出现一个同色三角形.

证明 设 6 个顶点分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_6$，任取一个顶点，譬如 p_1，考察它与其余 5 个顶点所连的边的着色，若用 A，B 分别表示着红色、蓝色边的集合，那么五条边至少有三条边着同一种色.

若 $|A|\geqslant3$，不妨设边 $\overline{p_1p_2}$，$\overline{p_1p_3}$，$\overline{p_1p_4}$ 着上了红色，那么点 p_2，p_3，p_4 之间所连的边，$\overline{p_2p_3}$，$\overline{p_3p_4}$，$\overline{p_4p_2}$，(见图 1－1)有两种可能：这三条边均着蓝色，此时定理得证；这三条边至少有一条边为红色，此时它可与 A 中两条边组成同色三角形，定理亦得证.

同理可证当 $|B|\geqslant3$ 时，定理亦真.

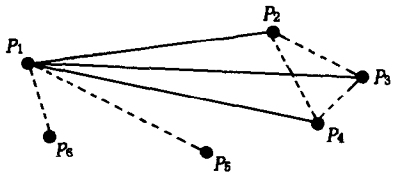

图 1—1

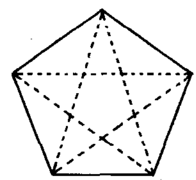

图 1—2

不难知道，当顶点数 $n>6$ 时，定理 1.6 也是成立的. 但当 $n\leqslant 5$，定理 1.6 的结论未必正确，如图 1—2 所示，在其上找不到同色的三角形，因此，一个完全图的边着二种颜色，必含有一个同色三角形的最小顶点数是 6.

如果设 p,q 是两个正整数，考虑至少需要多少个点，才能使用两种颜色去染这些点的两两之间的连线时，出现单色完全子图 K_p，或者出现单色完全子图 K_q，通常称使这个事实成立的最小点数为 Ramsey 数，记作 $R(p,q;2)$（2 表示每两点有一条边相连），简记为 $R(p,q)$. 这样定理 1.6 又可重述为：$R(3,3)=6$.

关于 Ramsey 数，目前人们知道的并不多，这方面还有许多的工作有待完成.

定理 1.7　$R(3,4)=9$.

证明　只需证将 K_9 的边着红、蓝两色时，必有一个红色三角形，或者一个蓝色的完全四边形即可.

设是 $p_1,p_2,\cdots,p_9$ 是 K_9 的九个顶点，先证 1）必存在一个顶点，其与另外八个顶点的连结线段中，同色线段或多于三条，或少于三条.

如若不然，假设这样的顶点不存在，即从每个顶点引出的线段中，蓝色（红色）线段均为三条，则 9 个顶点引出的蓝色线段总数为