21世纪高职高专教育统编教材

高等数学

霍本瑶　田长申　主编

黄河水利出版社

21世纪高职高专教育统编教材

高等数学

主　编　霍本瑶　田长申
副主编　张滨燕　郝艳莉
　　　　孙全宝　孙红伟

黄河水利出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写完成的.本书共分9章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、数学实验等.为便于学生系统掌握数学知识,消化理解所学内容,培养学生的数学应用意识,在学习专业课时能训练运用数学工具解决实际问题,书中精选了大量例题,在节后附有练习,在章后单列了数学建模的实例,并附有小结和习题,书后附录列有初等数学常用公式、简明积分表,供学习时参考.本书可供高职高专院校及成人高校的师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/霍本瑶,田长申主编.—郑州:黄河水利出版社,2006.9

ISBN 7-80734-123-8

21世纪高职高专教育统编教材

Ⅰ.高… Ⅱ.①霍… ②田… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学院-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第098156号

策划组稿:王路平　电话:0371-66022212　E-mail:wlp@yrcp.com

出 版 社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路11号　　邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话:0371-66026940　　传真:0371-66022620

E-mail:hhslcbs@126.com

承印单位:河南第二新华印刷厂

开本:787 mm×1 092 mm　1/16

印张:15.25

字数:350千字

版次:2006年9月第1版　　印次:2006年9月第1次印刷

书号:ISBN 7-80734-123-8/O·18　　定价:25.00元

《高等数学》编写委员会

前　言

《高等数学》是学习现代科学技术必不可少的基础知识.一方面它为学生后继课程的学习做好铺垫,另一方面它对学生科学思维的培养和形成具有重要意义.因此,它既是一门重要的公共必修课,又是一门重要的工具课.本书是根据教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的.

本书力求贯彻"应用为主,够用为度,学有所用,用有所学"的原则,内容精练,重点突出,概念简明,浅显易懂.与同类教材相比,具有以下特点:

(1)重视知识产生的历史背景介绍,在概念的导入上以实例为背景,遵循实例—抽象—概念的形成过程.

(2)涉及性质与定理的内容,以图形或文字描述说明加以适当解释,淡化了逻辑证明.

(3)在知识与技能的运用上强调数学应用意识的培养,融入数学建模的思想与方法.同时介绍数学实验,培养学生用数学知识解决实际问题的意识与能力.

(4)重视相关知识的整合.如在一元微积分部分,将不定积分与定积分整合,先从应用实例引入定积分的概念,再根据定积分计算的需要引入不定积分.

(5)根据高职高专教学实际,有针对性地选择适当的教学内容,淡化计算技巧(如积分技巧等).

本教材中打"*"号的内容,可根据不同专业需要及教学时数进行适当取舍.

本书由霍本瑶、田长申主编,张滨燕、郝艳莉、孙全宝、孙红伟副主编.编写人员及分工如下(按章节顺序排列):第一章、第二章,郝艳莉;第三章,张滨燕;第四章,张滨燕(第一、二节),孙红伟(第三、四、五节);第五章,霍本瑶;第六章,田长申;第七章,田长申(第一、二节),孙全宝(第三、四、五节);第八章,孙红伟(第一、二、三节),王艳红(第四、五节);第九章,郝艳莉.

本书由王卫平主审.

参加编写的院校有:河南职业技术学院、河南省劳动人事干部学校、河南交通职业技术学院.

本书在编写过程中,得到了各编写同志所在院校领导及诸多同志的大力支持与协作,在此谨致深切的谢意.

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学中最基本的研究对象.函数关系是变量之间最基本的一种依赖关系.为便于读者学习,本章在回顾中学关于函数知识的基础上进一步讨论了函数的概念、特性、基本初等函数、复合函数、初等函数及其图形等.

第一节　函数概念及其性质

一、区间与邻域

在高等数学中,经常用区间和邻域去表示一些数集.因此,我们对区间与邻域的概念加以介绍.

(一)区间

区间是介于两个实数之间的一切实数构成的数集,这两个实数称为区间的端点.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.

(1)数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),a 和 b 称为区间的端点.

(2)数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,a 和 b 称为区间的端点.

(3)类似地,有半开半闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$;$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$.

以上三类区间称为有限区间,另外还有无限区间.

引进记号 $+\infty$ 及 $-\infty$ 分别表示正无穷大和负无穷大.由于“$+\infty$”和“$-\infty$”不是数,因此不能作为区间的端点.

类似地,定义下列无限区间:

(1) $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$;$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$.

(2) $(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}$;$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$.

(3) $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 即全体实数的集合.

(二)邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,或简记为 $U(a)$.点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$,所以 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$,即 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$.

集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的空心邻域,记作 $U^0(a,\delta)$ 或简记为 $U^0(a)$.这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$.显然,$U^0(a,\delta)$ 是两个开区间的并集,即 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

二、函数的概念及表示方法

(一)函数的概念

在考察某些自然现象或社会现象时,往往会遇到几个变量.这些变量不是孤立变化的,而是存在着某种相互依赖关系.下面我们来看几个例子(以两个变量为例).

例 1 已知圆的半径为 r,面积为 A,则 $A=\pi r^2$.

例 2 空调普快列车的票价和里程之间的关系,如表 1-1 所示(截取其中的一部分).

表 1-1

里程(km)	71～80	81～90	91～100	101～110	111～120	121～130	131～140	…
票价(元)	10	12	13	14	16	17	18	…

例 3 某气象观测站的气温自动记录仪,记录了气温 T 与时间 t 之间在某一天的变化曲线,如图 1-1 所示.

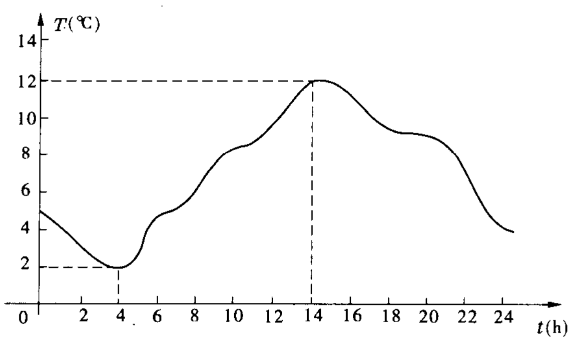


图 1-1

以上几个例子虽然涉及的问题各不相同,但它们都表达了两个变量之间的一种对应关系,而这种变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量,D 是一给定的数集.如果对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

x 称为自变量,y 称为因变量.数集 D 称为函数的定义域,数集 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

由定义 1.1 可知在上述三个例子中,圆的面积 A 是半径 r 的函数,列车票价是里程的函数,气温 T 是时间 t 的函数.

如果自变量取某一数值 x_0 时,函数 $y=f(x)$ 有确定的值与之对应,则称函数在点 x_0 处有定义,且记 x_0 处的函数值为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

由定义不难看出,函数是由定义域和对应法则所确定的.因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才表示同一函数,而与自变量及因变量用什么字母表示无关.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例 1 中,函数的定义域是 $D=(0,+\infty)$.未标明实际意义的函数,其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.例如,$y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(二)函数的表示方法

函数常用的表示方法有三种:解析法、表格法和图形法.

(1)以数学式子表示函数的方法叫做解析法(也称公式法),如例1.高等数学中所讨论的函数大多是由解析法给出的.解析法的特点是便于对函数进行计算和理论上的研究,但不够直观.

(2)以表格形式表示函数的方法叫做表格法,如例2.数学用表中的对数表等都是以这种方法表示函数的.表格法的特点是使用方便,简单明了,但数据有限.

(3)以图形表示函数的方法叫做图形法,如例3.图形法的特点是直观形象,但不便于理论上的推导运算.

三、反函数

在例1中,已知圆的半径 r 时,则其面积 $A=\pi r^2$,此时,A 是 r 的函数.若已知圆的面积 A,求它的半径 r,显然有 $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$,这时面积 A 是自变量,r 是 A 的函数.这里称函数 $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ 为函数 $A=\pi r^2$ 的反函数.

定义 1.2 已知函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 M;若对于每一个 $y\in M$,通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应,则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.同时把 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,例如 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

四、函数的特性

(一)奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-l,l)$,对于每一个 $x\in(-l,l)$,若有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;若有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

例如 $y=\sin x$ 是奇函数;$y=\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数;而 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称,如图1-2所示.

(二)有界性

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个常数 $M>0$,使得对于每一个 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界,否则称 $f(x)$ 无界.

例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的;$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的;$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界而无上界.

(三)单调性

设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义,任取 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,

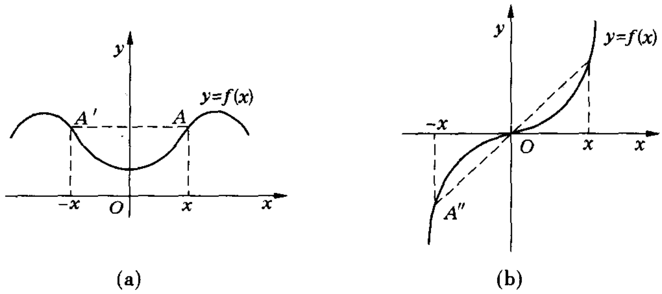


图 1-2

则称函数 $f(x)$在 I 上是单调增加的;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 I 上是单调减少的. 单调增加与单调减少的函数统称为单调函数. 区间 I 叫做单调区间.

从几何直观上看,单调增加(或减少)的函数其图形是自左向右上升(或下降)的,如图 1-3所示.

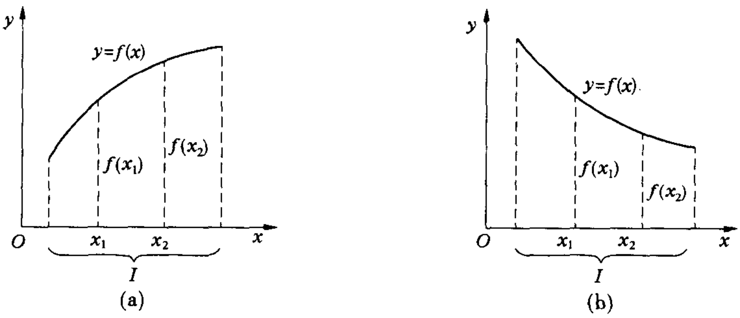


图 1-3

(四)周期性

对于给定的函数 $f(x)$,若存在常数 $T\neq 0$,使得对于其定义域内的每一个 x,都有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称函数 $f(x)$为周期函数. 通常称使得上式成立的最小正数 T 为 $f(x)$的周期.

例如 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数;$y=\tan\frac{x}{2}$是周期为 2π 的周期函数.

练习一

1. 用区间表示下列邻域.

(1)$U(1,0.3)$　　　　(2)$U^0(2,0.5)$

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$　　(2)$y=\arcsin(x-3)$　　(3)$y=\ln(x^2-x-2)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

3. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\frac{2x+3}{x-2}$　　　　(2)$y=1+\lg(x+2)$

4. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$　　(3) $y=(x^{2}+x)\sin x$

第二节　初等函数与分段函数

一、基本初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等六类函数统称为基本初等函数.

(一)常量函数

常量函数 $y=c$(c 是常数),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,它的图像是经过点$(0,c)$,且与 x 轴平行的直线,如图 1-4 所示.

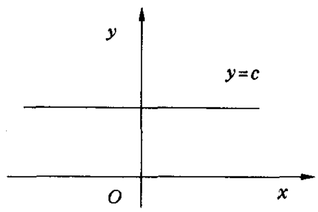


图 1-4

(二)幂函数

$y=x^{\alpha}$(α 是任意常数),其定义域随指数 α 而定.但无论 α 取何值,幂函数在$(0,+\infty)$内总是有定义的.其图形如图 1-5 所示.

(三)指数函数

$y=a^{x}$($a>0,a\neq1$),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意实数 a,$y=a^{x}$ 都过点$(0,1)$,其图形如图 1-6 所示.

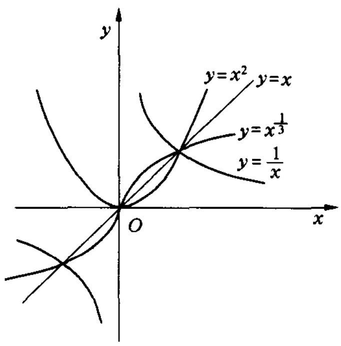


图 1-5

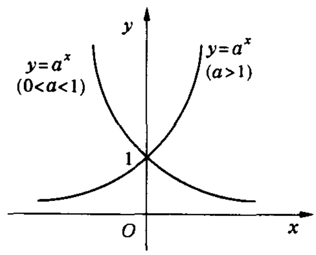


图 1-6

当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 单调减少.

在工程问题中常用的是底数为 $e=2.718\,28\cdots$ 的指数函数 $y=e^{x}$.

(四)对数函数

对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq1$)是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,其图形如图 1-7 所示.

当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 是单调减少的.

特别地,以 e 为底的对数称为自然对数,记作 $y=\ln x$.

(五)三角函数

常用的三角函数有：

正弦函数　$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$；

余弦函数　$y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$.

它们的图形如图 1-8 所示.值域为$[-1,1]$,且均是以 2π 为周期的周期函数,正弦函数为奇函数,余弦函数为偶函数.

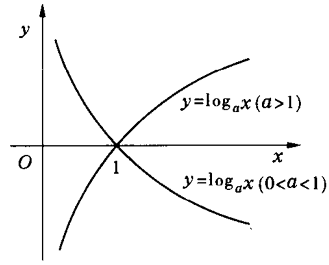


图 1-7

正切函数　$y=\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$；

余切函数　$y=\cot x, x\neq k\pi, k\in Z$.

它们的图形如图 1-9 所示.它们均是以 π 为周期的周期函数,且均为奇函数.

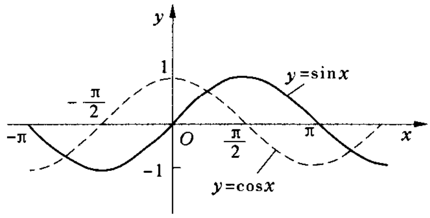


图 1-8

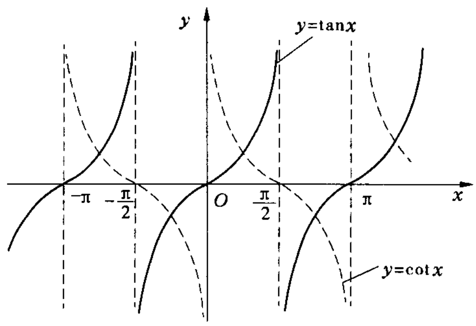


图 1-9

另外还有两个三角函数:正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$；

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}, x\neq k\pi, k\in Z$.

(六)反三角函数

反三角函数主要有：

反正弦函数　$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数　$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$；

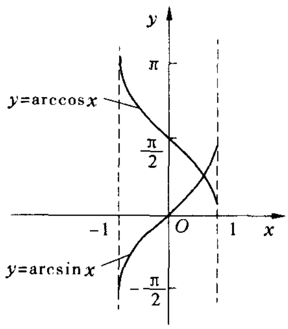
反正切函数　$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

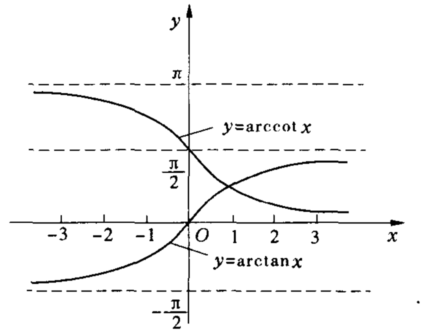
图形如图 1-10 所示.

二、复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$的定义域为 D, $u=\varphi(x)$值域为 M,若 $D\cap M$ 非空,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$,称此函数为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成



(a)反正弦函数与反余弦函数



(b)反正切函数与反余切函数

图 1-10

的复合函数,其中 u 为中间变量.

例 1 由 $y=\sin u, u=\sqrt{x}$复合而成的复合函数为 $y=\sin\sqrt{x}$,其定义域为$[0,+\infty)$.

复合函数还可以由两个以上的函数复合而成.

例 2 函数 $y=\sqrt{\ln(1+x^2)}$可以看成是由函数 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=1+x^2$ 复合而成的复合函数.

例 3 函数 $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$可以看成是由 $y=\sqrt{u}, u=\tan v, v=\frac{x}{2}$复合而成的复合函数.

需要注意的是,并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$,$u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数.这是因为,$u=x^2+2$ 的值域与 $y=\arcsin u$ 的定义域的交集为空集.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成的,并且结果用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\ln(\sin 2x)+x^2, y=e^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$ 都是初等函数.

今后讨论的函数绝大多数都是初等函数.

四、分段函数

例 4 某公司销售某种商品,规定购买 3 kg 以下,每千克 10 元;超过 3 kg 者,超过的部分 7 折,试写出应付款 y 与购买量 x 之间的函数关系,并求出购买 10 kg 商品所需的款数.

解 由题意有 $y=\begin{cases}10x, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 30+10\times 0.7(x-3), & x>3.\end{cases}$

当 $x=10$ 时,$y=30+10\times 0.7\times(10-3)=79$.

这个函数的特点是由多个表达式构成,它不是初等函数.在实际问题中,这也是一类常见的函数.

一个函数在其定义域的不同区间用不同的表达式表示,这样的函数叫做分段函数.

练习二

1.指出下列函数的复合过程.

(1)$y=(2x+5)^4$　　(2)$y=\sin^3(2x-1)$　　(3)$y=\ln[\tan(2x+1)]$

(4)$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$　　(5)$y=\lg(\arcsin x^2)$　　(6)$y=e^{-x^2}$

2.设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$,求 $f[\varphi(x)]$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$,求 $f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(3)$.

* 第三节　建立数学模型

随着科学技术的进步、经济的发展,大部分人都会经常遇到许多实际问题,而这些实际问题是难以用现成的数学方法解决的.因此,建模已不仅仅是少数专家的专利,而已经成为大部分人都需要掌握的方法.

一、数学模型的含义

模型是把对象实体通过适当的过滤,用适当的表现规则描绘出的简洁的模仿品.通过这个模仿品,人们可以了解到所研究实体的本质,而且在形式上便于人们对实体进行分析和处理.

例如,玩具、照片、火箭模型等实物模型;电路图、分子结构图等经过一定抽象的符号模型;大型水箱中的舰艇模型、风洞中的飞机模型等物理模型.

那么,什么是数学模型?

数学模型是描述实际问题数量规律的、由数学符号组成的、抽象的、简化的数学命题、数学公式、图表及算法.

当我们使用数学方法解决实际问题时,首先要把实际事物之间的联系抽象为数学形式,这就是所谓的建立数学模型(Mathematical Modeling).可以说,从数学诞生的第一天起,就有了数学模型.原始人类从具体的一只羊、一头牛等事物中抽象出自然数 1 的概念,而自然数 1 也就是具体的一只羊、一头牛等的数学模型;从光线、木棍等具体事物中抽象出直线的概念,而直线也就是光线、木棍等的数学模型.因为每一个数学概念都是从客观世界中抽象出来的,所以每一种数学概念、每个数学分支都是客观世界中某些具体事物的数学模型.

二、数学模型的建立

建立一个实际问题的数学模型,需要一定的洞察力和想象力,筛选、抛弃次要因素,突出主要因素,做出适当的抽象和简化.全过程一般分为表述、求解、解释、验证几个阶段,并

通过这些阶段完成从现实对象到数学模型,再从数学模型到现实对象的循环.可用流程图表示,如图 1-11 所示.

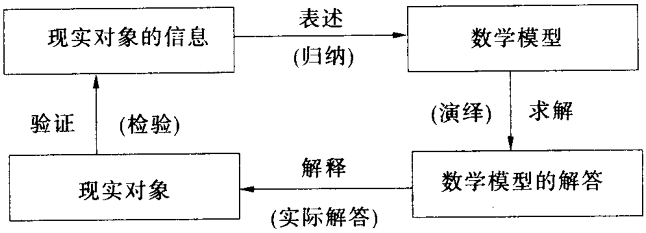


图 1-11

表述　根据建立数学模型的目的和掌握的信息,将实际问题翻译成数学问题,用数学语言确切地表述出来.

这是一个关键的过程,需要对实际问题进行分析,甚至要做调查研究,查找资料,对问题进行简化、假设、数学抽象,运用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表现客观对象及其关系.如果现有的数学工具不够用时,可根据实际情况,大胆创造新的数学概念和方法去表现模型.

求解　选择适当的方法,求得数学模型的解答.

解释　数学解答翻译回归现实对象,给实际问题的解答.

验证　检验解答的正确性.

例如,哥尼斯堡有一条普雷格尔河,这条河有两个支流,在城中心汇合成大河,河中间有一小岛,河上有七座桥,如图 1-12 所示.18 世纪哥尼斯堡的很多居民总想一次不重复地走过这七座桥,再回到出发点.可是试来试去总是办不到,于是有人写信给当时著名的数学家欧拉,欧拉于 1736 年,建立了一个数学模型解决了这个问题.他把 A、B、C、D 这四块陆地抽象为数学中的点,把七座桥抽象为七条线,如图 1-13 所示.

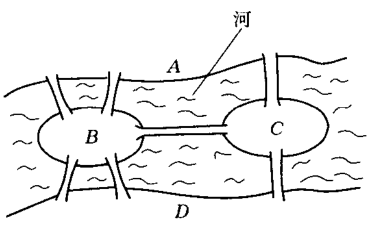


图 1-12

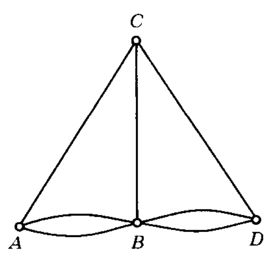


图 1-13

人们步行七桥问题,就相当于图 1-13 的一笔画问题,即能否将图 1-13 所示的图形不重复地一笔画出来,这样抽象并不改变问题的实质.

哥尼斯堡七桥问题是一个具体的实际问题,属于数学模型的现实原型.经过理想化抽象所得到的如图 1-13 所示的一笔画问题便是七桥问题的数学模型.在一笔画的模型里,只保留了桥与地点的连接方式,而其他一切属性则全部抛弃了.所以从总体上来说,数学模型只是近似地表现了现实原型中的某些属性,而就所要解决的实际问题而言,它更深