少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材（试用）

# 线性代数

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

全一册

国家行政学院出版社
红旗出版社

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材(试用)

# 线性代数

(全一册)


教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

主 编 阮传概 钮心忻



国家行政学院出版社

红旗出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会编.－北京：国家行政学院出版社，2006
ISBN 7-80140-517-X

Ⅰ.线... Ⅱ.教... Ⅲ.线性代数－研究生教育：少数民族教育－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第082076号

# 线性代数

（全一册）

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社 出版
北京市海淀区长春桥路6号(100089)
新华书店总经销
开封市第一印刷厂印刷
880×1230毫米 1/16开本 20.5印张 410千字
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1－1000
ISBN 7-80140-517-X/0·43 定价：32.80元

# 教育部“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训教材编写委员会

# 前 言

大力培养少数民族高层次骨干人才是实践“三个代表”重要思想、落实科学发展观、全面建设小康社会的迫切需要，是贯彻党的民族政策、增强民族团结、维护祖国统一的现实需要，是贯彻科教兴国战略、推进西部大开发战略的重大举措，是内地高校责无旁贷的政治任务。

为顺利实施国家“少数民族高层次骨干人才”培养计划，适应“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训教学的需要，教育部民族教育司组织编写了《古典文学》、《高等数学》、《线性代数》、《信息技术》、《英语》、《马克思主义理论》、《民族理论与民族政策》等“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训系列教材。本套教材的使用对象为参加“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训的学生。

按照教育部对硕士研究生基础强化培训的教学要求，本套教材参照近年来少数民族本科毕业生的普遍水平，以及少数民族学生在研究生入学考试中的重点难点，遵循强化基础、突出重点的原则进行编写，使这套教材的基础课程综合水平达到攻读硕士研究生课程的基本要求，从而全面提高学生的科学和人文素养，增强学生的实践能力和科研创新能力，为在西部大开发和民族地区发展中的骨干打下坚实的知识基础。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

# 编写说明

《线性代数》的内容具有较强的抽象性与逻辑性，是工程与经济管理各专业的一门重要基础理论课。它的基本内容与方法，不仅在数学的各个分支中有很多应用，而且在科学技术的各领域也有广泛应用。通过学习这一门基础课，学生在掌握线性代数的基本理论与方法的同时，培养逻辑思维与解决实际问题的能力。

本书是为“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训编写的教材。内容主要包括本科线性代数课程的基本内容与方法，还增加了当前研究生课程的一些基础知识，以及在工程技术中有很多应用的某些内容。增加的内容都加“*”号，可根据实际情况进行教学或让学生自学。为了使学生能更好地理解课程内容，我们编写了各章的内容提要、范例分析、习题解答，供学生参考，希望学生能想出更好、更新的方法。本书注重基本理论与方法，条理清晰，论证详细，例题丰富，便于学生自学。

本书编写过程中得到了教育部民族教育司、红旗出版社、国家行政学院出版社的大力支持，西南大学陈映萍教授、北京邮电大学牛少彰教授、闵祥伟教授等对本书进行了认真的审阅，提出了宝贵意见和建议，在此我们表示衷心感谢。同时对北京邮电大学民族教育学院的朱建平、樊玲老师，信息工程学院信息与计算科学教研中心的陆传赉、罗群、卓新建教授，余翊华博士以及研究生祝瑜等的帮助与支持，表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，一定有不妥之处，殷切希望读者指正。

编　者

# 目　录

# 第一章

# 矩　阵

矩阵的理论与方法是线性代数最重要的组成部分，它不但是学习数学各学科的基本工具，而且是自然科学与工程技术中解决理论与实际问题的有力工具.

## 第一节　向量、矩阵的概念

### 一、向量

在平面直角坐标系中，每一个点 $M$ 都有一对有序实数$(x,y)$和它对应，其中 $x$ 与 $y$ 分别是点 $M$ 的横坐标与纵坐标. 在空间直角坐标系中，每一个点 $M$ 都有 3 个有序实数$(x,y,z)$和它对应，其中 $x,y,z$ 分别是点 $M$ 的横坐标、纵坐标与立坐标.

**定义 1.1.1**　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n$ 个数，由它们构成的有序组

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 $n$ 维向量. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分量，$a_i$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个分量.

虽然 $n>3$ 时，$n$ 维向量没有直观的几何意义，但在这里还是把 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为向量.

我们规定：两个 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，当它们的各个对应分量都相等时，就称它们相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，即当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$时，

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

下面规定 $n$ 维向量的两种运算.

**定义 1.1.2**　设 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$与$(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$分别称为 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 的和与差，分别记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

**定义 1.1.3**　设 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$k$ 为数，称$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$为 $k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记为 $k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

**例 1.1.1**　设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-3,0,2)$

于是

$$4\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(8,-12,4)+(-9,0,6)=(-1,-12,10)$$

## 二、矩阵

**例 1.1.2** 在商店 $A_1,A_2,A_3$ 分别买商品 $n_1,n_2,n_3,n_4$ 的价格(单位为元),可列表如下:

| 商品的价格 (商店\商品) | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 15 | 22 | 18 | 7 |
| $A_2$ | 17 | 22 | 16 | 9 |
| $A_3$ | 16 | 21 | 18 | 8 |

上表可简单地用以下形式表示

$$\begin{pmatrix} 15 & 22 & 18 & 7 \\ 17 & 22 & 16 & 9 \\ 16 & 21 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

其中第 1 行数字的和 $15+22+18+7=62$(元)表示在商店 $A_1$ 买商品 $n_1,n_2,n_3,n_4$ 共需要 62 元. 第 2,3 行数字的和分别表示在商店 $A_2,A_3$ 买商品 $n_1,n_2,n_3,n_4$ 共需要 64 元与 63 元.

在科学理论与工程技术中,经常使用上述形式的表作为工具来解决问题.

**定义 1.1.4** 由 $mn$ 个数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵,有时把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或简记为 $(a_{ij})$. $a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行,第 $j$ 列的元素,有时也记为 $(i,j)$ 元素;当 $m=n$ 时,$\boldsymbol{A}$ 称为 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵,或 $n$ 级矩阵;当 $n=1$ 时,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为列矩阵或 $m$ 维列向量;当 $m=1$ 时,即

$$\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$$

称为行矩阵或 $n$ 维行向量.

$n$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素. 如果 $\boldsymbol{A}$ 中主对角线外的元素都为零时,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}=0(i\neq j)$,这种矩阵称为对角矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对角矩阵,且 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$,这种矩阵称为单位矩阵或幺阵,记为 $\boldsymbol{E}$.

只有一行一列的矩阵 $(a_{11})$ 就看成数 $a_{11}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n$ 阶矩阵:

(1)如果主对角线以下的元素都为零,即 $a_{ij}=0(i>j)$,则称这种矩阵为上三角矩阵;

(2)如果主对角线以上的元素都为零,即 $a_{ij}=0(i<j)$,则称这种矩阵为下三角矩阵;

两个 $m$ 行 $n$ 列矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,如果对应位置的元素都相等,即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,则称这两矩阵相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

## 第二节 矩阵的运算

### 一、加减法与数量乘法

**定义 1.2.1** 设两个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

**定义 1.2.2** 设一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 为数.

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $k$ 与 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的数量乘积,$k\boldsymbol{E}$ 称为数量矩阵.

如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,$k$ 为数,则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$$
$$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$$

所有元素都为零的矩阵,称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{0}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{0}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中各元素都变号,得到的矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记为 $-\boldsymbol{A}$,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad -\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

矩阵的减法定义为：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

**注：两个行、列数都相同的矩阵才可以相等，也才可以相加、相减，其和与差的行、列数与它们相同.**

**例 1.2.1** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

则

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & -4 & 6\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 3 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -7 & 12\\ 3 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

## 二、乘法

**例 1.2.2** 设：

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{cases}$$

即 $y_i=\sum\limits_{k=1}^{3}a_{ik}x_k(i=1,2)$. 其系数构成的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

又设：$\begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2\\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2\\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2\end{cases}$，即 $x_k=\sum\limits_{j=1}^{2}b_{kj}t_j(k=1,2,3)$. 其系数构成的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}$$

求 $y_1,y_2$ 与 $t_1,t_2$ 的关系.

**解** 设 $y_1,y_2$ 与 $t_1,t_2$ 的关系为

$$\begin{cases}y_1=c_{11}t_1+c_{12}t_2\\ y_2=c_{21}t_1+c_{22}t_2\end{cases}$$

即

$$y_i=\sum_{j=1}^{2}c_{ij}t_j\qquad i=1,2\tag{1.2.1}$$

系数构成的矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}y_i&=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\sum_{j=1}^{2}b_{kj}t_j\\ &=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}t_j=\sum_{j=1}^{2}\Big(\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\Big)t_j\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

比较式(1.2.1)与式(1.2.2)得：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}\qquad i=1,2;j=1,2$$

于是

$$\begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{cases}$$

**定义 1.2.3** 设两矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times p} \qquad \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{p\times n}$$

若有 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

从两矩阵乘积的定义，可得下面一些简单的结论：

(1)两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 只有在第 1 个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与第 2 个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 才能相乘；

(2)两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，等于第 1 个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与第 2 个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列的对应元素乘积的和；

(3)两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的行数与列数分别等于第 1 个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与第 2 个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

**例 1.2.3** 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$，并问 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可以相乘吗?

**解**

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列数与 $\boldsymbol{A}$ 的行数不相同，所以 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不能作乘积.

**例 1.2.4** 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

**解**

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由例 1.2.3 与例 1.2.4 可以看出：两矩阵的乘积，交换律不成立，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等，且两个不为零的矩阵乘积可能为零矩阵.

两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对乘法可交换.

**例 1.2.5** 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}$.

**解**

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

由例 1.2.5 可以看出:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$,因此,矩阵乘法的消去律不成立,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时,不一定有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(4)如果 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$的第 $i$ 行构成的行矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $i$ 行为 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{B}$;

如果

$$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{pj}\end{pmatrix}$$

表示矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$的第 $j$ 列构成的列矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $j$ 列为 $\boldsymbol{A\beta}_j$.

**例 1.2.6** 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&4\\0&1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 的第 3 行与第 2 列.

**解** 由于 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行构成的行矩阵为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)$,于是 $\boldsymbol{AB}$ 的第 3 行为

$$\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{B}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}3&-1\\-2&4\\0&1\end{pmatrix}=(3,-2)$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列构成的列矩阵为

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{AB}$ 的第 2 列为

$$\boldsymbol{A\beta}_2=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是矩阵,且 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BC}$ 均有意义,则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\qquad\text{(结合律)}$$

若 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$ 有意义,则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} \qquad \text{(分配律)}$$

若 $\boldsymbol{BA}$ 和 $\boldsymbol{CA}$ 有意义,则有

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

**三、转置**

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换,所得的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然,$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

**定理 1.2.1** 矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的转置矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$,等于 $\boldsymbol{B}$ 的转置 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的乘积,即

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

**例 1.2.7** 设

$$\boldsymbol{A} = (1,\ -1,\ 2) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = (1,\ -1,\ 2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (9,\ 2,\ -1)$$

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 不存在

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

**例 1.2.8** 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

**解**

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}6&6&8\\2&1&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&4&4\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&6&8\\2&1&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

**推论 1.2.1** $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

**定义 1.2.4** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n$ 阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵或斜对称矩阵.

**例 1.2.9** 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&0&-1\\-3&-1&4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵.

**例 1.2.10** 设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

**证** 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$

必要性：若 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{AB})$，而

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{BA})$

于是 $-(\boldsymbol{AB})=-(\boldsymbol{BA})$ 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

充分性：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{BA})=-(\boldsymbol{AB})$，

即 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵.

## 第三节 排列、行列式

### 一、排列

**定义 1.3.1** 由 $n$ 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序组，称为一个 $n$ 排列.

例如,1234,2134,1423,3142 等都是 4 排列. 在一个 $n$ 排列中,如果某一个较大的数码排在一个较小的数码前面,则称这排列有一个逆序或一个反序. 一个 $n$ 排列的逆序个数,称为这排列的逆序数或反序数. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 例如,5 排列 13245, 31245,12345 与 54321 的逆序数分别为 1,2,0 与 10. 一个排列的逆序数为奇数时,称这排列为奇排列;逆序数为偶数时,称这排列为偶排列.

如果把一个排列的某两个数码互换位置,而其余的数码位置不变,得到另一个排列,称这种互换为对换. 不难看出:把某排列的两个相邻的数码互换位置,而其余的数码位置不变,则所得新排列的逆序数比原来排列的逆序数多 1 或少 1,即改变了排列的奇偶性. 例如, 51423 的逆序数为 6,如果把 1 与 4 互换位置,则得 54123,其逆序数为 7.

**定理 1.3.1** 一个排列施以一次对换后,其奇偶性改变.

**证** 设给定 $n$ 个数码的任意一个偶排列

$$\cdots ia_1a_2\cdots a_sj\cdots \tag{1.3.1}$$

把 $i$ 与 $j$ 互换位置,得到新的排列

$$\cdots ja_1a_2\cdots a_si\cdots \tag{1.3.2}$$

现在要证明:排列(1.3.2)是奇排列. 我们先把排列(1.3.1)的 $i$ 与 $a_1$ 互换,变成排列

$$\cdots a_1ia_2\cdots a_sj\cdots$$

再把 $i$ 与 $a_2$ 互换. 这样继续下去,把 $i$ 再依次与 $a_3,\cdots,a_s$ 互换,得到新的排列

$$\cdots a_1a_2\cdots a_sij\cdots \tag{1.3.3}$$

然后再把 $j$ 依次与 $i,a_s,\cdots,a_2,a_1$ 互换,最后得到排列(1.3.2). 按照这样的方法,一共经过了$(2s+1)$次相邻的两数码的互换. 因为一个排列的两个相邻的数码互换位置后,其逆序数差一. 所以,排列(1.3.1)经过$(2s+1)$次这样的互换后,其逆序数的差必为奇数,而排列(1.3.1)是偶排列,所以排列(1.3.2)是奇排列. 同理可证如果排列(1.3.1)是奇排列,则排列(1.3.2)是偶排列.

**二、行列式**

设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,用消元法可得:

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

记

$$\begin{aligned}D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\\&=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 的所有排列 $j_1j_2$ 取和.

设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$