中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

解析幾何學

И. И. ПРИВАЛОВ 著

蘇步青 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

解析幾何學

И. И. 勃立瓦洛夫著
蘇 步 青 譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的勃立瓦洛夫（И. И. Привалов）著"解析幾何學"（Аналитическая геометрия）1952年修訂第十七版譯出的。原書係蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

解　析　幾　何　學

蘇　步　青　譯

★版權所有★

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館上海廠印刷

（52425）

1953年7月初版　版面字數310,000

印數1—11,000　定價¥14,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

第十七版的序文

在修訂這一版的 И. И. 勃立瓦洛夫著"解析幾何學"時，曾進行了下面的一些主要的修正和補充：

(1)在全書之中，徹底地劃分了作爲幾何圖象的「線段」與它的大小(卽數)這兩種概念之間的區別。

(2)第一部份裏，在講曲線的究研之前，先講關於曲線與方程之間的關係一章「曲線及其方程」。

同樣地在第二部份裏，在曲面和曲線各章之前先講「方程的幾何意義」一章。

(3)由於近年來在高等工業學校的教學大綱中添加了若干新的問題(直線的極式方程，二次曲面的母線等等)，因此對這些問題已給以簡單的敍述。

(4)有些學校對於二階曲線通論只要簡要地學一些就夠，因此在第七章第十四節到第十九節裏又把上面已經講過的重新加以簡單的敍述。

(5)某些公式和結論更加精確了。

本書的修訂工作是在培養鐵路運輸工程師的莫斯科電工學院高等數學教研室工作人員 Н. Я. 色索葉夫和 Е. Е. 布勒堯夫的密切協力參加下由 Н. А. 奧里索夫所完成的，並且是在教研室主任 П. К. 拉捨夫斯基的督導下進行的。在教研組的會議上曾經討論工作的成效。

莫斯科許多高等工業學校的高等數學教研室和其一些個別教師們曾把自己對 И. И. 勃立瓦洛夫著"解析幾何學"的意見交給國營技術理論書籍出版社。當修訂本書的時候，在不變更本書的體裁和基本特性的範圍內，對於這些意見凡是可能做到的都曾考慮到。

第十三版的序文

這一次刊行的拙著「解析幾何學」一書，係修改前一版的材料而編成的。許多高等工科學校教師們在教學過程中，發覺書中好些地方對於學生們的理解頗有困難。筆者依據這些意見竭力進行修訂。對於所提的一切意見，筆者深切誠懇地表示感謝，特別從密羅爾斯基副教授獲得很寶貴的指示，筆者表示衷心的謝意。

И.勃立瓦洛夫

緒　言

解析幾何學的對象是以代數分析法研究幾何圖形。在初等數學各科,應用代數學解決許多幾何問題。例如,在幾何學中必須用數來定義線段及弧的長度,某些圖形的面積和體積等等;在三角法中利用數的比值來確定角度與線段比間的關係。可是在這些數學分科裏,關於各種幾何圖形的問題是依靠分析法來解決的,但在解析幾何學裏則依靠數表徵這些幾何圖形的最本質的特性——它的位置。

凡定義幾何圖形本身位置的數稱爲它的坐標。用以決定幾何圖形位置的方法稱爲坐標法。幾何圖形的種類很多;建立解析幾何學之際,自然地要選定其中一個做基礎,而依它表示其他一切圖形。比較簡單的方法是採取幾何的點,作爲這類圖形的基礎。於是其他一切幾何圖形如曲線、曲面等都可以看做點的幾何軌跡。

以點做基始的原素之後,首先要表明如何用數定義空間點的位置。坐標法的第一個觀念是建立在各種幾何課題解答的基礎上的。坐標法的第二個觀念是成立在如何運用屬於一曲線的點的坐標來表達曲線的幾何性質的。從坐標法的這些有效的觀念產生了在數學和力學各科上的應用。由於微積分的發展,這些觀念變成數學研究上的最有力的工具。

爲敍述解析幾何學的方便起見,把全書劃分爲兩部分。第一部分是在坐標應用的基礎上,以代數的方法研究平面幾何圖形。第二部分是用同樣的方法討論空間的幾何圖形。

爲輔助講義內容進行順利起見,設置一章,專敍二階及三階行列式的理論。這章和其他附錄一樣,可以删去。

爲了更多地發揚幾何的明確性，把空間的平面和直線的最初的方程寫成向量的形式。在末章相應地敍述向量代數的必要知識。但是，考慮到在那些不用向量代數做解析幾何學討論方法的高等工科學校的需要，我們除了平面論及直線論的向量方式的敍述外，同時並用坐標形式的方法。

目　　錄

解析幾何學

第一部　平面解析幾何學

第一章　坐標法

§1. 關於有向線段的概念　觀察一條無限直線和這直線上的兩點 A 和 B。這兩點決定了線段 $\overline{AB}$（圖 1）。在初等幾何裏比較兩線段之際，照慣例只顧及其長度。至於圍成線段的兩點中那一點是它的起點且那一點是它的終點，並不加以注意。

圖 1

可是在幾何和力學的許多問題中，不但線段的長度而且它的方向是有意義的。

爲表示線段，我們商定把代表它的起點的字母寫在第一位。

如果把線段看做一動點所畫的道路，那末兩線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BA}$ 就有區別；這是因爲它們描寫長短相等而方向相反的兩條道路。因此，關於線段所應該討論的，不僅是它的長度，而且必須考察它的方向。方向是用符號來區別的。這樣，如果商定線段 $\overline{AB}$ 做正的話，那末 $\overline{BA}$ 就該是負的，並且 $\overline{BA}=-\overline{AB}$，就是說，把線段的起點與終點互相對調後，它的長度雖然不會改變，符號變成相反的。當某線段在一直線上時，爲了比較它們的方向起見，在這直線上選擇一定方向做正向，凡按這方向放置的線段都看做正的，按相反方向的看做負的。例如，在圖 1 用矢號表出的，從左到右的方向照例取做正向。在這場合線段 $\overline{AB}$ 看做正的，而線段

$\overline{CB}$ 看做負的。凡在上面選定了正向的無限直線稱爲軸。

爲從線段轉到數上，選擇任意的但是一定的長度單位且以它來量有向線段的長度。在這些單位下把線段的長度表成爲一個數，且若線段是正的，便帶上正號；若線段是負的，便帶上負號。這個數稱爲原線段的大小。線段的大小是用線段的相同字母表示起來的，但無需上橫棒。例如，線段 $\overline{AB}$ 的大小是以記號 AB 表出的。明顯地，兩線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的大小僅相差一符號，就是 $AB=-BA$。

線段在不計較它的方向的意義下，它的長度是其大小的模數。如在代數學一樣，用直棒表示它。

例如，線段 $\overline{AB}$ 的長度可以寫成方式 $|AB|$。從上述得知 $|AB|=|BA|$❶。

§2. **線段的加法**　把軸上的線段看做相對的數量，我們建立其加法。把線段看做動點所畫的道路且對於相加的兩線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 取動點在雙方線段的連續不斷移動裏混合起來的線段做兩線段的和；換句話說，爲求已知兩有向線段的和，第一線段的終點必須合於第二線段的起點；於是第一線段的起點是線段和的起點，而第二線段的終點是線段和的終點，就是對於直線上任何三點 A, B, C 的位置

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}。\qquad (1)$$

特別把 C 當作是合於點 A，從關係(1)獲得：

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}。$$

線段 $\overline{AA}$ 的起點與終點一致。這樣的線段稱爲零線段。零線段的大小等於零。明顯地，從關係(1)得知，若一直線上有一連串的點 $A, B, C, D, \cdots, K, L$，那末其間的各線段必滿足關係

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\cdots+\overline{KL}=\overline{AL}。$$

❶ 當線段的方向不起作用時，我們有時不用直棒表示線段的長度。

由所導入的議論可見，對於軸上有向線段的加法其大小也相加，就是

$$AB+BC=AC。\tag{1'}$$

何以呢，若兩線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 有相同的方向，那末其和——線段 $\overline{AC}$——也有相同的方向。

在這場合所有三個數 AB, BC 和 AC 有同一符號，而量線段 $\overline{AB}$ 的長度的數等於量兩線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的二數之和，就是二數 $|AB|$ 與 $|BC|$ 之和。所以 $AB+BC=AC$。如果兩線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 有相反方向的話，那末為求其和的大小，必須求出二項線段的長度之差且取其中有較長的長度的一項符號做其符號。

可是這也是兩個相對數 AB 和 BC 的相加規則。因此，在這場合下等式(1')也是成立的。

特別是 $AB+BA=0$。

§3. 直線上的坐標　若這樣的數能完全決定點的位置且反轉來，從點的已知位置能完全決定這些數，那末這樣的數稱為點的坐標。

首先討論如何在直線上能夠決定點的位置。在這直線上取任何一點 O（從拉丁文 origo——原點）作為所有放置在直線上的線段的起點且在這直線上確立正方向，例如從左到右(圖 2)。選擇任何長度的線段 p 做比例尺。明白地，直線上的任何點 P 對應於線段 $\overline{OP}$ 且反轉來，各線段 $\overline{OP}$ 對應於一點 P——這線段的終點。明顯地，凡在 O 的右側的點將對應於正的線段，而在 O 的左側的點將對應於負的線段。這樣，點 P 的位置是完全由有向線段 $\overline{OP}$ 所決定的。

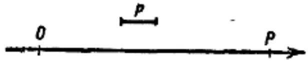

圖 2

同時它也由這線段的大小所決定，就是由相對數 OP 所決定。這數 OP 在這樣的場合下照例是用字母 x 表示

$$OP=x。$$

數 x 完全決定點 P 在直線上的位置且稱爲這點的坐標。明顯地，凡在 O 的右側的點 P 都有正坐標；凡在 O 的左側的點則有負坐標；點 O 本身有等於零的坐標。

§4. 平面上的坐標 爲了要決定平面上的點的位置，選定兩條正交的直線，叫做兩坐標軸；取兩直線的交點爲各軸上放置的線段的原點且稱爲坐標原點(圖 3)。此外在各軸上取兩可能方向中的一個做正向，其相反的做負向。在通稱爲橫軸的水平線坐標軸上，正向大半是取做從左到右的方向；在垂直軸上，此時稱爲縱軸，正向是從下到上的。簡便上橫軸稱爲 x 軸，縱軸爲 y 軸。

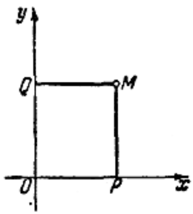

圖 3

最後取一定線段的長度做比例尺的單位，於是平面上的任何點 M 的位置是由兩個數 —— 這點的坐標 —— 所決定的。就是說，任何點 M 在兩坐標軸上有對應的兩點 P 和 Q，就是它在這些軸上的射影，且反轉來說，已知兩軸上的點 P 和 Q 的時候，可以在平面上作出唯一的點 M，使 P 和 Q 是它在軸上的射影。因此，平面上的點 M 的位置確定歸到在軸 Ox 和 Oy 上順次作它的射影 P 和 Q 的位置確定。

我們已經知道，直線 Ox 的點 P 的位置完全地就是唯一地是由一個數 x 所決定的，而這數本身是代表在線段 $\overline{OP}$ 中的比例尺單位的數目，並且若點 P 在 O 的右邊，那末數 x 是正的，且若點 P 在 O 的左邊，x 是負的。這個數 x 是作爲 M 在橫軸上的射影點 P 的坐標，也是點 M 的第一坐標且稱爲它的橫標。

完全同樣地對於點 M 在 y 軸上的射影，點 Q 的位置完全地就是唯