机械振动

理论与应用

顾海明　周勇军／编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

机械振动理论与应用

JIXIEZHENDONGLILUNYUYINGYONG

顾海明　周勇军　编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了机械振动的基础理论知识、实验分析方法以及振动理论在工程中、特别是在机械故障诊断中的应用。全书共分 6 章。第 1 章至第 4 章介绍了机械振动的基本概念，单自由度系统、二自由度系统和多自由度系统的振动；内容包括无阻尼系统、有阻尼系统的自由振动和强迫振动，振动的消减与隔离方法，转子的平衡，振动理论的应用等。第 5 章介绍了机械振动实验及测试技术的基础知识。第 6 章介绍了振动理论在机械故障诊断技术中的应用。

本书可作为高等院校工科专业本科生技术基础或专业课教材，也可作为研究生以及机械振动和机器故障诊断领域工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动理论与应用/顾海明，周勇军编. —南京：东南大学出版社，2007.2

ISBN 978-7-5641-0661-4

Ⅰ.机… Ⅱ.①顾… ②周… Ⅲ.机械振动—高等学校—教材 Ⅳ.TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 008359 号

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼 2 号 邮编 210096）

出版人：江 汉

新华书店经销 兴化市印刷厂印刷

开本：787 mm×1092 mm 1/16 印张：11 字数：265 千字

2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5641-0661-4/TH · 7

定价：20.00 元

前　　言

随着现代科学技术的不断进步，机械设备向大型化、高速化、连续化和自动化发展，工业产品向高、精、尖发展已成为不争的事实。机械结构的振动问题日益受到关注，研究和解决各种振动问题成为当前工程技术领域的重要课题。以往结构设计只做简单的静力校核的方法在许多情况下已不能满足要求，而应当根据结构的动态特性进行产品设计。随着计算机技术和实验测试技术的飞速进步，人类已经拥有解决机械振动问题的方法和手段。作为现代工程技术人员，应该而且必须具备必要的机械振动知识。

本书是在多年教学基础上编写的，曾作为讲义在南京工业大学机械学院内部使用。编写时考虑了当前工科院校高年级本科生数学和力学的实际水平，对传统机械振动教材做了必要的取舍，主要讨论离散系统的线性振动理论，简要介绍了非线性振动理论。离散系统的线性振动理论用途最广，而且较易学习。考虑到学生的数学基础，本书没有涉及连续体振动问题，而是着重介绍了机械振动理论在工程实践中的应用。

全书共分 6 章。第 1 章介绍了机械振动的基本概念和学习所需的一些数学、力学知识。第 2 章全面介绍了单自由度系统的振动理论，包括自由振动，简谐强迫振动，周期振动、瞬态振动和随机振动；介绍了单自由度系统振动理论的工程应用，包括隔振防振、动平衡技术、转子临界转速及振动机械的运用；简单介绍了单自由度非线性系统振动。通过第 2 章的学习可了解掌握振动学的基本理论及对其重要性的认识。第 3 章介绍了二自由度系统自由振动、强迫振动及动力吸振器，涉及多自由度有关耦合、振型和主坐标的概念。第 4 章对多自由度系统振动理论给予较完整的叙述。包括运动方程的建立、坐标变换，多自由度系统振动问题求解的振型叠加法、求固有频率的矩阵迭代法和其他方法。第 5 章介绍了机械振动实验基础知识，包括振动实验设备和测试仪器的技术特点、振动特性参数的测量方法和信号分析技术基础。第 6 章介绍机械振动理论在机械故障诊断中的应用，介绍了旋转机械的状态监测和振动信号处理技术、转子各种故障的机理和振动信号特征，齿轮和滚动轴承等典型零部件的故障机理和

特征。同时，书中给出了一定量的思考题和习题。

本书由顾海明、周勇军合编；顾海明主编。顾海明编写了本书第2、4、5、6章，周勇军编写了第1、3章。研究生原成泽、顾佳玲、牛福春和朱翔参加了本书绘图及部分文字工作。

编写过程中得到了南京工业大学教务处和机械学院领导及许多老师的支持。编写时参考了大量国内外出版的有关书籍资料。作者在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2006年11月

于南京工业大学

目　　录

第 1 章　机械振动的基本概念

1.1　机械振动的研究内容及研究方法

1.1.1　机械振动的研究内容

机械振动问题广泛地存在于机械工程的各个领域内，常见的问题有：如何提高机械系统的抗振能力；如何防止系统产生共振；如何避免系统的自振；不平衡惯性力引起振动的平衡问题；减振与隔振；冲击与冲击隔离；噪声控制和振动利用等。

随着近代振动理论的迅速发展，以及电子计算机和测试仪器的发展和完善，振动分析的方法和手段发生了飞跃性变革，任何复杂的机械和结构几乎都可以进行工程所需精度的分析。

许多振动现象是有益于人类的，例如电磁波的激发、乐器的发声和各种振动机械的运用等。但是在多数情况下，振动却带来有害的影响。由于振动，降低了机器的动态精度和使用性能。由于振动，导致机械使用寿命的降低和灾难性事故的发生。此外，由于振动而产生的噪声公害日益严重，使人烦躁、厌倦和疲劳，降低工作效率，影响人体健康。因此，研究振动对机械的使用和设计具有重要的实际意义，随着大型复杂的高速旋转机械的不断增加和工业发展水平的不断提高，这种研究的迫切性也就越来越显现了。

在振动研究中，一般把被研究的对象，小到一个零件，大到一个庞大的工程结构或机器，称为系统；把外界对系统的作用或机器运动所产生的力称为激振或输入；把系统在激振作用下产生的动态变化称为响应或输出。机械振动这门学科就是分析系统、激振和响应这三者之间的关系。随着测试仪器的发展和完善，振动的实验研究已发展成一种独立的解决问题的手段。振动问题的理论分析和实验研究，这两种方法的相互补充，为解决复杂机械振动问题创造了有利的条件。

振动研究所要解决的问题可归纳为以下几类：

(1) 响应分析。已知输入和系统的参数，求系统的响应，即求系统的振动位移、振动速度和振动加速度响应，为设计计算机械结构强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。

(2) 系统设计。已知系统的激振，设计合理的系统参数，满足预定要求的动态响应。

(3) 系统识别。在已知输入和输出的情况下求系统参数，对已有的机械系统进行激振，测得在激振下的响应，然后识别系统的结构参数。

(4) 环境预测。已知系统的输出及系统的参数，确定系统的输入，以判别系统的环境特性。

1.1.2　机械振动的研究方法

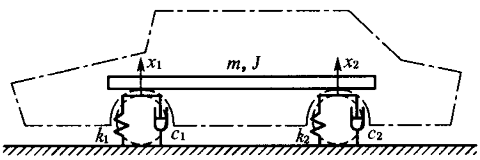
研究机械系统的振动问题，一般分为下列几个步骤：

1）建立力学模型

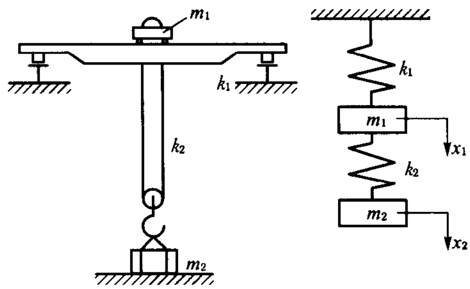
实际的机械振动系统往往是很复杂的，为便于分析和计算，必须抓住主要因素，而略去一些次要因素，将实际系统简化和抽象为动力学模型。简化的程度取决于系统本身的复杂程度、要求计算结果的准确性以及采用的计算工具和计算方法等。

动力学模型要表示系统的主要动态特性及外部激振情况。机械系统本身结构的动态特性参数是质量、刚度（或弹性）和阻尼，如何进行简化是值得认真研究的。

如图 1-1(a)表示一辆汽车沿道路行驶时车身振动的力学模型，它是一个二自由度系统，其中弹簧常数就是悬架和轮胎的等效刚度，阻尼器表示减振器、悬架和轮胎的等效阻尼，车身的惯性简化为平移质量 m 和绕质心的转动惯量 J。图 1-1(b)表示一桥式起重机起吊重物时的情况，研究突然吊起重物时绳索及桥架结构中的动力响应，可简化为双质量弹簧系统，其中 m_1 是小车质量加二分之一桥架质量，m_2 为重物的质量；k_1 是桥架跨中的刚度；k_2 是绳索的刚度。建立的力学模型与实际的机械系统越接近，则分析的结果与实际情况越接近。



(a) 汽车车身振动



(b) 起重机突然起吊时的振动

图 1-1　不同实验系统的力学模型

2）建立数学模型

应用物理定律对所建立的力学模型进行分析，导出描述系统特性的数学方程。通常振动问题的数学模型表现为微分方程的形式。

3）方程的求解

为得到描述系统运动的数学表达式，就需对数学模型求解。通常这种数学表达式是位移为时间函数的形式。它表明系统运动、系统性质和激振（含初始干扰）的关系。

4）分析结论

根据方程的解提供的规律和系统的工作要求及结构特点，可以作出设计和改进的决断，以获得问题的最佳解决方案。

1.2　机械振动的定义和表示方法

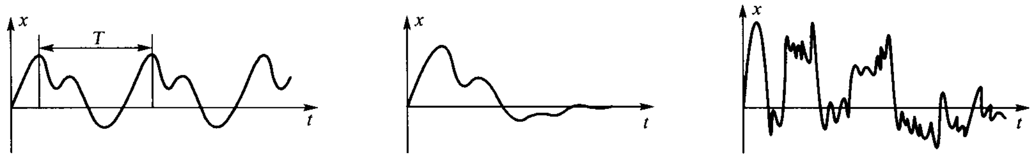
机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中，机械系统将围绕其平衡位置作往复运动。从运动学的观点看，机械振动是指机械系统的位移、速度、加速度在某一数值附近随时间的变化规律。这种规律如果是确定的，则可用函数关系式

$$x = f(t) \tag{1-1}$$

来描述其运动。也可以用函数图形来表示,图 1-2 就是以 x 为纵坐标、t 为横坐标表示的几种典型的机械振动。图 1-2(a)表示在相等的时间间隔内物体作往复运动,称为周期运动。运动往复一次所需的时间间隔称为周期 T,其单位以秒(s)计。周期振动可用时间的周期函数表示为

$$f(t) = f(t + nT)\ (n = 1, 2\cdots) \tag{1-2}$$

以一定周期持续进行的等幅振动称为稳态振动,而最简单的周期振动是简谐振动。



(a) 稳态振动　(b) 瞬态振动　(c) 随机振动

图 1-2　几种典型的机械振动

图 1-2(b)表示机械系统受到冲击后产生的振动,这种振动没有一定的周期,故不能用周期函数来表示,称为非周期振动,它往往经过一定周期后逐渐消失,故又称为瞬态振动。

图 1-2(c)表示机械系统在随机激振下产生的振动,这种运动不能用时间函数来描述,称为随机振动。

上面几种振动中,周期振动和瞬态振动可以用方程(1-1)来描述。这就是说运动是确定的,只要给定任一瞬时 t,就可得到确定的 x 值。而随机振动是一种不能预知运动物理量大小的振动,它不是时间的确定性函数,根据其运动参数的某些规律性,可用数理统计的方法来进行研究。

1.2.1　简谐振动

简谐振动是最简单的周期振动。其振动位移可用下面正弦函数(或余弦函数)来表示:

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{1-3}$$

式中:T——周期。

A——振动位移的最大值,称为振幅。

这种按时间的正弦函数(或余弦函数)所作的运动称为简谐振动。简谐振动常用做匀速圆周运动的点在铅垂轴上的投影来表示,如图 1-3。一长度为 A 的线段 OP,由水平位置开始,以等角速度 ω 绕 O 点做反时针方向转动,任一瞬时 t,P 点在铅垂轴上的投影为

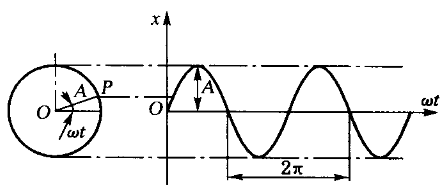


图 1-3　匀速圆周运动的点的投影

$$x = A\sin\omega t \tag{1-4}$$

式中:ω——圆频率,ω 的单位为 rad/s。

ωt——相位,表示 OP 在时间 t 的转角。

由于 OP 转过 2π rad 为一个周期,故上式应满足

$$A\sin\omega(t+T) = A\sin(\omega t+2\pi)$$

即
$$\omega T=2\pi \quad 或 \quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

代入(1-4)式，就得到和(1-3)式同样的形式，通常用(1-4)式表示简谐振动。

在周期振动中，周期的倒数定义为频率，以 f 表示

$$f=\frac{1}{T} \tag{1-5}$$

频率 f 的单位为 1/s，称为赫兹，写为 Hz，即每秒钟振动的次数，它和 ω 的关系为

$$\omega = 2\pi f \tag{1-6}$$

如果图 1-3 中做匀速圆周运动的点不是从水平位置开始，则其位移表达式具有一般形式

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1-7}$$

式中 φ 为初相位，表示做匀速圆周运动的点的初始位置。

对位移表达式求一阶导数和二阶导数，就可得简谐振动的速度和加速的表达式

$$\dot{x} = \omega A\cos(\omega t+\varphi) = \omega A\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1-8}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi) = \omega^2 A\sin(\omega t+\varphi+\pi) \tag{1-9}$$

由此可见，只要位移是简谐函数，则速度和加速度也是简谐函数，而且与位移具有相同的频率，但速度的相位比位移超前 $\pi/2$，加速度比位移超前 π。

从(1-7)式和(1-9)式可得

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1-10}$$

这表明在简谐运动中，加速度的大小与位移成正比，而其方向与位移相反，加速度的方向始终指向静平衡位置。

1.2.2 简谐振动的矢量表示法

简谐振动可用旋转矢量表示。设有一个模为 A 的旋转矢量 OP 以等角速度 ω 从水平位置开始作逆时针旋转，如图 1-4 所示。任一瞬时 t，旋转矢量 OP 在铅垂轴上的投影为

$$x = A\sin\omega t \tag{1-11}$$

它表示一简谐振动。其在水平轴上的投影为一余弦函数，也表示一简谐振动，故任一简谐振动都可以用一旋转矢量的投影来表示。旋转矢量的模 A 即为振幅，其旋转角速度 ω 即为简谐振动的圆频率。

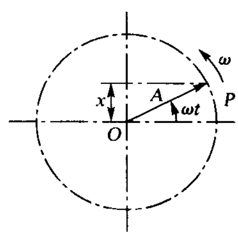


图 1-4 旋转矢量的投影

当一个简谐振动是两个同频率的简谐振动所合成时，则这个简谐振动可以用两个代表原简谐振动的旋转矢量的合成矢量来表示。如某一振动的表达式为

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{1-12}$$

可改写成

$$x = a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\omega t$$

等式右边的两项可以看成是旋转矢量 a 和 b 在铅垂轴上的投影，而且 a 比 b 超前 $\pi/2$ 相位，故两个矢量是相互垂直的，都可以角速度 ω 同步旋转。图 1-5 表示了这两个矢量。

根据矢量合成原理，将矢量 a 和矢量 b 合成旋转矢量 A，A 与 b 之间的夹角为 φ，A 在铅垂轴上投影为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1-13}$$

将(1-13)式展开为

$$x = A\sin\varphi\cos\omega t + A\cos\varphi\sin\omega t \tag{1-14}$$

由图 1-5 可知

$$a = A\sin\varphi,\ b = A\cos\varphi \tag{1-15}$$

将(1-15)式代入(1-14)式得

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

因此(1-12)式和(1-13)式表示同一个简谐振动，在数学上两式是可以互换的，由图 1-5 中还可看出两式常数之间的关系为

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\varphi = \frac{a}{b} \tag{1-16}$$

从物理概念上说，两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动；反之，一个简谐振动也可以分解为两个频率相同的简谐振动。

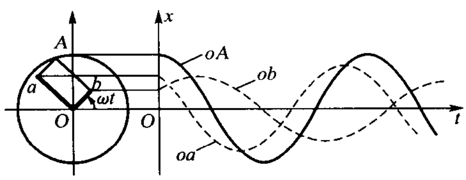


图 1-5　简谐运动的叠加

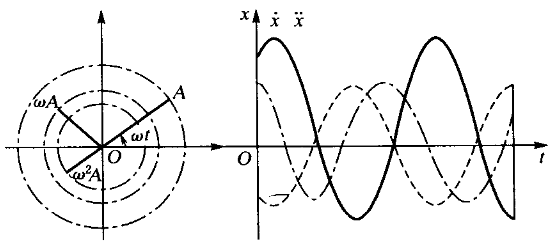
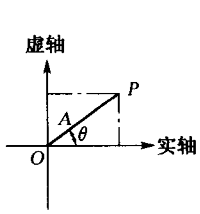


图 1-6　位移、速度及加速度的空间关系

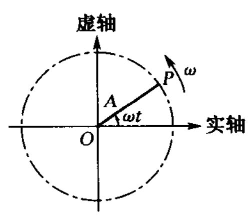
如果振动的位移是简谐函数，则振动的速度和加速度也必然是简谐函数，故速度和加速度也可以用旋转矢量来表示。根据(1-7)式至(1-9)式，这 3 个矢量之间的关系如图 1-6 所示。

1.2.3　简谐振动的复数表示法

在复平面上的一个矢量 OP 代表复平面上复数 Z。如图 1-7(a)所示。这个矢量的模 A 就是复数 Z 的模，其位置由幅角 θ 确定，若 j 表示虚轴上的单位长度，则其表达式为



(a) 复矢量



(b) 旋转复矢量

图 1-7　简谐振动的复矢量表示

$$Z=A(\cos\theta+j\sin\theta)=A\exp(j\theta)\text{或写作 } e^{j\theta}$$

如果使复矢量 OP 绕 O 点以等角速度 ω 在复平面内逆时针旋转，就成为一复数旋转矢量，如图 1-7(b)所示。它在任一瞬时的幅角 $\theta=\omega t$，则此复数表达式为

$$Z=A(\cos\omega t+j\sin\omega t)=A\exp(j\omega t)\text{或写作 } Ae^{j\omega t}$$

如前所述，我们同样可以用一复数旋转矢量在复平面的实轴上或虚轴上的投影来表示简谐振动。复数旋转矢量 OP 在虚轴上的投影为

$$x=A\sin\omega t=I_m Z=I_m[A\exp(j\omega t)]$$

符号 $I_m Z$ 指取复数 Z 虚数部分的值，它表示简谐振动，一般对复数表达式

$$x=A\exp(j\omega t) \tag{1-17}$$

不作特别说明时，则表示取虚数部分。

运用复数运算法则，可以方便地合成两个同频率的简谐振动。现将

$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\omega t$$

以复数形式表示为

$$x=a\exp\left[j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]+b\exp(j\omega t)$$

由复数相加原理得

$$x=A\exp[j(\omega t+\varphi)]$$

式中

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\ \varphi=\arctan\frac{a}{b}$$

速度和加速度同样可用复数旋转矢量表示，并用复数求导的方法得到位移、速度和加速度之间的关系，设 $x=A\exp(j\omega t)$，则

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=j\omega A\exp(j\omega t)$$

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}(\dot{x})=-\omega^2 A\exp(j\omega t)$$

因 $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$，$e^{j\pi}=-1$，故上两式可写成

$$\dot{x}=A\omega\exp\left[j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1-18}$$

$$\ddot{x}=A\omega^2\exp[j(\omega t+\pi)] \tag{1-19}$$

可见位移、速度和加速度在复平面上关系与图 1-7 所示一致。

1.3 构成机械振动系统的基本要素

机械系统之所以会产生振动是因为它本身具有质量和弹性。阻尼则使振动受到抑制。从能量观来看，质量可储存动能，弹性可储存势能，阻尼则消耗能量。当外界对系统做功时，系统的质量就吸收动能，使质量获得速度；弹簧就获得变形能，具有了使质量回到原来位置的能力。这种能量的不断转换就导致系统的振动，系统如果没有外界不断地输入能量，则由

于阻尼的存在，振动现象将逐渐消失。因此，质量、弹性和阻尼是振动系统的三要素。此外，在重力场中，当质量离开平衡位置后就具有了势能，同样产生恢复力。如单摆，虽然没有弹簧，但可看成等效弹簧系统。

现将质量、弹簧和阻尼器的特性讨论如下。

1.3.1 质量

在力学模型中，质量被抽象为不变形的刚体。根据牛顿第二运动定律，若对质量作用一力 F_m，则此力与质量在与 F_m 相同方向获得的加速度 $\ddot{x}$ 成正比。表示为

$$F_m = m\ddot{x} \tag{1-20}$$

式中的比例常数 m 为刚体质量，是惯性的一种量度。对于扭振系统，广义力为扭矩 M，广义加速度为角加速度 $\ddot{\varphi}$，则扭矩与角加速度成正比表示为

$$M = J\ddot{\varphi} \tag{1-21}$$

式中的比例常数 J 为刚体绕其旋转中心轴的转动惯量，质量 m 和转动惯量 J 是表示力(力矩)和加速度(角加速度)关系的元件。

1.3.2 弹性

在力学模型中，弹簧被抽象为无质量而具有线性弹性的元件。弹性元件在振动系统中提供使系统恢复到平衡位置的弹性力，又称恢复力。恢复力与弹性元件两端的相对位移的大小成正比。

$$F_g = -k(x_2 - x_1) \tag{1-22}$$

式中负号表示弹性恢复力 F_g 与相对位移的方向相反，k 为比例常数，通常称为弹簧常数或弹簧刚度。扭转弹簧产生的是恢复力矩，扭转弹簧的位移是角度。

1.3.3 阻尼

在力学模型中，阻尼器被抽象为无质量而具有线性阻尼系数的元件。在振动系统中，阻尼元件提供系统运动的阻尼力，其大小与阻尼器两端相对速度成正比

$$F_d = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{1-23}$$

式中负号表示阻尼力的方向与阻尼器两端相对速度的方向相反，c 为比例常数，称为阻尼系数，满足(1-23)式表示的这种阻尼称为黏性阻尼，系数 c 称为黏性阻尼系数。

在国际单位制(SI)中，质量的单位为千克(kg)；转动惯量的单位为千克·米^2(kg·m^2)；力的单位为牛顿(N)；位移的单位为米(m)；扭矩的单位为牛·米(N·m)。速度的单位为米/秒(m/s)；直线弹簧刚度的单位为牛/米(N/m)；扭转弹簧刚度的单位为牛·米/弧度(N·m/rad)；阻尼系数 c 的单位为牛·秒/米(N·s/m)。

1.4 谐波分析

简谐振动是最简单的周期振动，而实际问题中更多的是非简谐的周期振动或非周期振动，如图 1-8 所示。

任何一个周期函数，只要满足一定的条件，都可以展开成傅立叶级数。

把一个周期函数展开成一个傅立叶级数，即展开成一系列简谐函数之和，这个过程称为频谱分析或谐波分析。

设一周期函数为 $F(t)$，其周期为 T，展成傅立叶级数为

$$F(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \tag{1-24}$$

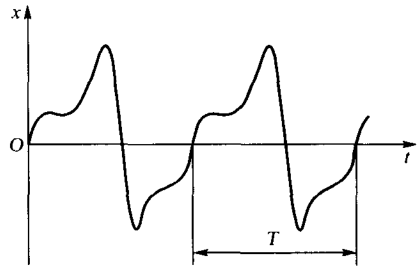


图 1-8 一般周期振动

式中 $\omega_o = 2\pi/T$ 称为基频，a_o、a_n 和 b_n 均为待定常数，称为傅立叶系数，只要 $F(t)$ 是已知的，它们可从三角函数正交性得到

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_o t\,\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_o t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1-25}$$

(1-24)式也可写成

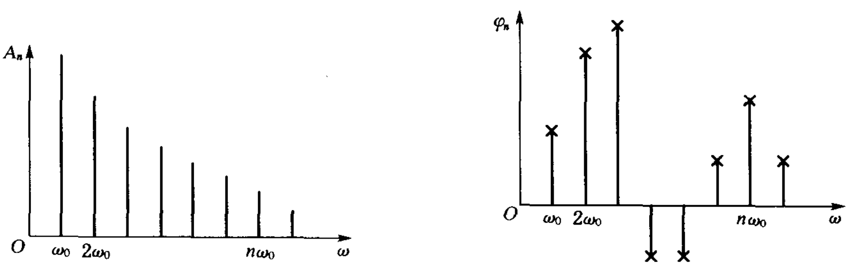
$$F(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_o t + \varphi_n) \tag{1-26}$$

式中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \arctan\frac{a_n}{b_n} \tag{1-27}$$

可见，周期函数可用傅立叶级数展开为各阶谐波分量的叠加来表示。组成各谐波分量的频率是基频的整数倍，即 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0 \cdots n\omega_0$，而不含有其他频率的谐波分量。

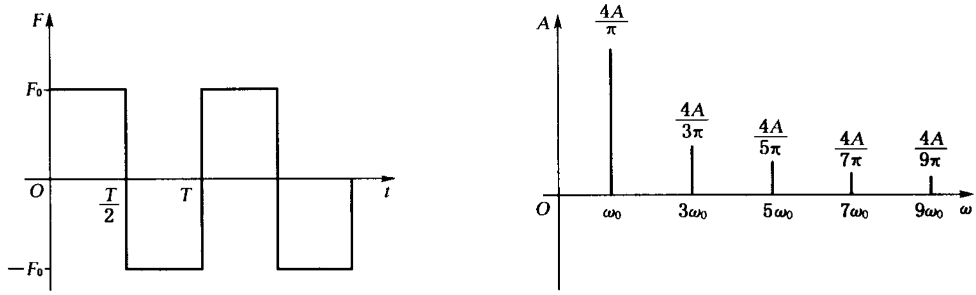
为了把谐波分析的结果形象化，可把 A_n、φ_n 与 ω_0 之间的变化关系用图形来表示，如图 1-9 所示。这种图形称为周期函数的频谱，这种分析称为频谱分析。由于只有在 $n\omega_0$（n=1, 2, 3…）各点 A_n 和 φ_n 才有一定的数值，所以周期函数的频谱图是一组离散的铅垂线。



(a) 幅值频谱图　　(b) 相位频谱图

图 1-9 周期函数的频谱图

【例 1-1】 一周期为 T、振幅为 F_0 的矩形波，如图 1-10(a)所示。在一个周期内的函数表达式为



(a) 矩形波　　(b) 幅值频谱图

图 1-10　矩形波及幅值频谱图

$$F(t)=\begin{cases}F_0 & 0<t<\dfrac{T}{2}\\ -F_0 & \dfrac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

试作傅立叶分解，并画出一个周期内的幅值频谱图。

解：由(1-25)式求出各傅立叶级数

$$a_o=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\mathrm{d}t-\int_{\frac{T}{2}}^{T}F_0\mathrm{d}t=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_o t\,\mathrm{d}t=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_o t\,\mathrm{d}t=\frac{4F_0}{n\pi}\ (n=1,\ 3,\ 5\cdots)$$

故矩形波的傅立叶级数为

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{n=1,\ 3,\ 5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t$$

各次谐波的幅值为

$$A_1=\frac{4F_0}{\pi},\ A_3=\frac{4F_0}{3\pi},\ A_5=\frac{4F_0}{5\pi}\cdots$$

幅值频谱图如图 1-10(b)所示。

由以上频谱分析可知，其基频为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。由幅值频谱图可看出，基频的谐波分量占主要成分，其幅值最大。在基频分量上叠加上三阶谐波分量后，所给出的波形已接近于矩形波。若再叠加上五阶谐波分量，已近似于矩形波。其叠加情况如图 1-11 所示。在实际问题中为了使分析简化，常用有限项谐波分量的叠加来代替周期波。

以上介绍了将周期函数展成傅立叶级数进行分析的方法，后面还要介绍非周期函数也可以通过傅立叶积分进行频谱分析。

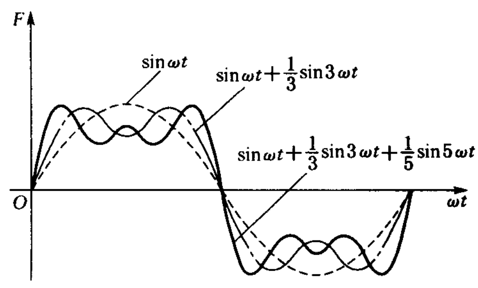


图 1-11　谐波的叠加