高联考研

2008年 李永乐·李正元 考研数学 5

数学

数学二

历年试题解析

○主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元

国家行政学院出版社

2008年李永乐·李正元考研数学⑤

数学历年试题解析

【数学二】

主编　北京大学　李正元
　　　清华大学　李永乐
编者　（按姓氏笔画）
　　　北京大学　李正元
　　　清华大学　李永乐
　　　北京大学　刘西垣
　　　中国人民大学　严颖
　　　北京大学　范培华
　　　北京交通大学　赵达夫
　　　中国人民大学　袁荫棠
　　　空军雷达学院　徐宝庆
　　　东北财经大学　龚兆仁
　　　天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.2/李永乐,李正元主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-323-0

Ⅰ.数...　Ⅱ.①李...　②李...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第004373号

书　　名	数学历年试题解析[数学二]
作　　者	李正元　李永乐
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话	(010)88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2007年2月北京第4版
印　　次	2007年2月北京第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	18
字　　数	470千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-323-0/O·30
定　　价	24.00元

前　　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1989 年 ~2007 年历届全国硕士研究生入学统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深

度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐**主编的**《考研数学复习全书》（理工类·数学二）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

（四）

本书由北京大学 **李正元**、清华大学 **李永乐**担任主编。参本书编写的有：清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、中国人民大学 **袁荫棠**、**严颖**、北京交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**、天津财经学院 **鹿立江**、空军雷达学院 **徐宝庆**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2007 年 2 月

目　　录

第一篇　2007年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　1989~2006年考研数学二试题

第三篇　1989～2006 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2007年考研数学二试题及答案与解析

2007年考研数学二试题

一、选择题：1～10小题，每小题4分，共40分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.　(D) $1 - \cos\sqrt{x}$.

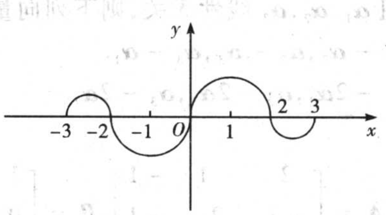
【　】

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

(A) 0.　(B) 1.　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

【　】

(3) 如图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的上、下半圆周．设 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$，则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$.

【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

【　】

(5) 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　　　(B) 1.　　　　(C) 2.　　　　(D) 3.

【　】

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

【　】

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

【　】

(8) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【　】

(9) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

【　】

(10) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.

【　】

二、填空题：11 ~ 16 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 = ________.

(13) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ________.

(15) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(16) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 A^3 的秩为 = ________.

三、解答题:17 ~ 24 小题,共 86 分,请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数,求 $f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\leqslant x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

(Ⅰ)求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,$V(a)$ 最小?并求此最小值.

(19)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(20)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(24)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

2007 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析一】 因为 $\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}\quad(x\to0^+)$,故应选(B).

【分析二】 因为 $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=-(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}\quad(x\to0^+)$,

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}\quad(x\to0^+),$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x\quad(x\to0^+),$$

故应选(B).

---

(2)【分析一】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{e}}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right)=1,$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})}{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}\cdot\frac{\tan x}{x}=\frac{\mathrm{e}}{-\mathrm{e}}\cdot1=-1,$$

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 选(A).

【分析二】 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}=\infty,$

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}\cdot\tan x=\infty,$$

因此 $x=1,\pm\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 由排除法可知应选(A).

---

(3)【分析】 注意,大小半圆的面积分别为 π 与 $\dfrac{1}{4}\pi$.

按定积分的几何意义知,当 $x\in[0,2]$ 时 $f(x)\geqslant0$,当 $x\in[2,3]$ 时 $f(x)\leqslant0$.

$$\Rightarrow \quad F(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi.$$

因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数.

$$\Rightarrow \quad F(-3)=F(3)=\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\pi,\quad F(-2)=F(2)=\frac{1}{2}\pi.$$

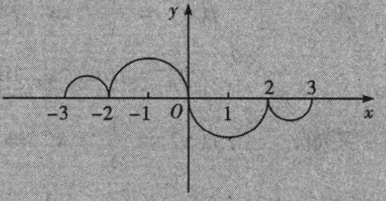
因此 $\quad F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.　选(C).

评注　如果题中给出的图形如下,则应如何作出正确选择呢?注意,大小半圆的面积分别为 π 与 $\dfrac{1}{4}\pi$.

当 $x\in[0,3]$ 时 $f(x)\leqslant 0$,按定积分的几何意义知,$-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是相应图形的面积.

$$\Rightarrow \quad F(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\pi.$$



因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数.

$$\Rightarrow \quad F(-3)=F(3)=-\frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\pi,$$

$$F(-2)=F(2)=-\frac{1}{2}\pi,$$

因此 $\quad F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.　选(B).

---

(4)**【分析一】**　由(A)的条件 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

由(B)的条件 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$.

由(C)的条件 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 存在.

因此(A),(B),(C)正确.选(D).

【分析二】　设 $f(x)=|x|$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0,\text{存在,但}f'(0)\text{不存在}.$$

因此(D)是错误的.　选(D).

---

(5)**【分析】**　只有间断点 $x=0$.由于

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right)=\infty,\text{故 }x=0\text{ 为垂直渐近线}.$$

又
$$\lim_{x\to -\infty}y=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right)=0+\ln 1=0,$$

故 $x\to-\infty$ 时有水平渐近线 $y=0$.

又
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right)=0+\lim_{x\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)=0+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0,$$

故 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

因此选(D).

---

(6)【分析】 由 $f''(x)>0(x>0)\Rightarrow f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调上升. $f(x)$ 只有以下三种情形:

① $\exists x_0\in(0,+\infty), f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<x_0,\\ =0, & x=x_0,\\ >0, & x>x_0\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,x_0]\searrow$,在 $[x_0,+\infty)\nearrow$,又 $x>x_1>x_0$ 时

$$f(x)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

② 对所有 $x\in(0,+\infty), f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

③ 对 $\forall x\in(0,+\infty), f'(x)<0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)\searrow$,从而或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\exists$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

如, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0(x>0)$.

$$u_n=f(n)\searrow, \lim_{n\to+\infty}f(n)=0.$$

又如, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}-x \Rightarrow f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0(x>0)$.

$$u_n=f(n)=\frac{1}{n}-n,\searrow,\text{但}\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty.$$

$\Rightarrow$(A),(B) 不正确.

由 ①,②$\Rightarrow$(C) 不正确,而(D) 正确. 因此,选(D).

---

(7)【分析一】 按可微性定义, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微 $\Leftrightarrow$

$$f(x,y)=f(0,0)+Ax+By+o(\sqrt{x^2+y^2})\quad((x,y)\to(0,0))$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^3+y^2}}=0$,其中 A,B 是与 x,y 无关的常数.

题中的(C) 即 $A=B=0$ 的情形. 因此由(C)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微. 因此选(C).

【分析二】 由(A)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 $\not\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

由(B)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可偏导且 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0, \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$,但 $\not\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

由(D)$\Rightarrow f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿 x 轴连续(即 $f'_x(x,0)$ 在 $x=0$ 连续), $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿 y 轴连续(即 $f'_y(0,y)$ 在 $y=0$ 连续),但 $\not\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

因此选(C).

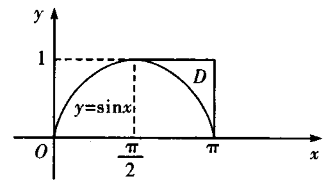
---

(8)【分析】 这是交换积分顺序的问题. 先将二次积分表成

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma,$$

由累次积分限确定积分区域 D 如图所示.

记 $y=\sin x(x\in[\frac{\pi}{2},\pi])$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$,则改换积分顺序得



$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\varphi(y)}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

由此知(C)、(D)不正确.

现在的关键是求出 $y = \sin x\left(x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$ 的反函数:

$y = \sin x = \sin(\pi - x)$,当$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$时$0 \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi - x = \arcsin y$,即 $x = \pi - \arcsin y$.

因此 $\quad I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$ 选(B).

---

(9)【分析】 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + (\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0},$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关,故应选(A).

至于(B)、(C)、(D)的线性无关性可以用$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$ 的方法来处理.例如,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由于$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,故知 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

---

(10)【分析】 根据相似的必要条件:$\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$,易见 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似.由此可排除(A)与(C).

而合同的充分必要条件是有相同的正惯性指数、负惯性指数.为此可以用特征值来加以判断.由

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2,$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为3,3,0.故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p = 2$,负惯性指数 $q = 0$.而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数亦为 $p = 2$,负惯性指数 $q = 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.故应选(B).

二、填空题

(11)【分析一】 原式$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (1+x^2)\cos x}{3x^2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0} \frac{-2x\cos x + (1+x^2)\sin x}{6x} = -\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

【分析二】 先求出 $\arctan x - \sin x$ 在 $x = 0$ 处的3阶泰勒公式.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0),$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

两式相减得

$$\arctan x-\sin x=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

---

(12)【分析】 先求切线斜率

$$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\cos t}{-\sin t-2\cos t\sin t}=\frac{-1}{\tan t+2\sin t},$$

于是 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}$. 因此法线斜率为 $1+\sqrt{2}$.

---

(13)【分析】 用归纳法求解.

$$y'=-2(2x+3)^{-2},y''=2^2(-1)^2 2(2x+3)^{-3},y^{(3)}=2^3(-1)^3 3!(2x+3)^{-4}.$$

易归纳证得 $y^{(n)}=2^n(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}$.

因此 $y^{(n)}(0)=(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}n!$.

---

(14)【分析】 特征方程 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 的根为 $\lambda=1,\lambda=3$.
非齐次项 $\mathrm{e}^{\alpha x},\alpha=2$ 不是特征根,非齐次方程有特解 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$. 代入方程得

$$(4A-8A+3A)\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\quad\Rightarrow\quad A=-2.$$

因此,通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

---

(15)【分析】 由多元复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

---

(16)【分析】 因为 $A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,可知秩 $\mathrm{r}(A^3)=1$.

三、解答题

(17)【分析与求解】 对题设等式两边求导得

$$f^{-1}(f(x))f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}.$$

注意 $f^{-1}(f(x))=x$,

于是 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$,

$$f(x)=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)+C\quad\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right).$$

在原式中令 $x = 0$ 得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = 0$.

由条件 $\Rightarrow f(0) = 0$. $\Rightarrow$ $C = 0$, $\Rightarrow$ $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

---

(18)**【分析与求解】** (Ⅰ) $V(a) = \pi\int_0^{+\infty} y^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{+\infty} xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = -\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}a^{-\frac{x}{a}}$

$$= \frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = -\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}a^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi a^2}{\ln^2 a}.$$

(Ⅱ) $V'(a) = \pi\dfrac{2a\ln^2 a - a^2 2\ln a\cdot\frac{1}{a}}{\ln^4 a} = 2\pi a\dfrac{\ln a - 1}{\ln^3 a}\begin{cases} < 0, & 1 < a < \mathrm{e}, \\ = 0, & a = \mathrm{e}, \\ > 0, & a > \mathrm{e}. \end{cases}$

$\Rightarrow a = \mathrm{e}$ 时 $V(a)$ 取最小值 $V(\mathrm{e}) = \pi\mathrm{e}^2$.

---

(19)**【分析与求解】** 令 $p = y'$ 得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x + p^2) = p$. 改写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{x}{p} = p.$$

这是一阶线性方程,两边乘$\frac{1}{p}$($\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}p}{p}} \xlongequal{\text{取}} \frac{1}{|p|}$)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{p}\cdot x\right) = 1 \xRightarrow{\text{积分}} \frac{1}{p}x = p + C_1.$$

由初值 $x = 1$ 时 $p = 1$ $\Rightarrow C_1 = 0$ $\Rightarrow$ $x = p^2, p = \sqrt{x}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x} \xRightarrow{\text{积分}} y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

由 $y(1) = 1 \Rightarrow$ $C = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

---

(20)**【分析与求解】** 由方程 $y - x\mathrm{e}^{y-1} = 1 \Rightarrow y(0) = 1$,

求导得 $y' - \mathrm{e}^{y-1} - x\mathrm{e}^{y-1}y' = 0 \Rightarrow y'(0) = 1$.

再求导得 $y'' - 2\mathrm{e}^{y-1}y' - x(\mathrm{e}^{y-1}y')' = 0 \Rightarrow y''(0) = 2$.

现由 $z = f(\ln y - \sin x) \Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f'(\ln y - \sin x)\left(\frac{1}{y}y' - \cos x\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = f'(0)\times 0 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = f''(\ln y - \sin x)\left(\frac{1}{y}y' - \cos x\right)^2 + f'(\ln y - \sin x)\left(-\frac{1}{y^2}y'^2 + \frac{1}{y}y'' + \sin x\right).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0} = f''(0)\times 0 + f'(0)(-1 + 2) = 1.$$

---

(21)**【分析与证明一】** 令 $F(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 可导,在题设条件下,要证存在 $\xi \in (a,b)$, $F''(\xi) = 0$. 已知 $F(a) = F(b) = 0$,只须由题设再证 $\exists c \in (a,b)$, $F(c) = 0$.

(1) 由题设 $\exists x_1 \in (a,b)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$, $\exists x_2 \in (a,b)$, $M = \max\limits_{[a,b]} g(x) = g(x_2)$. 若 $x_1 = x_2$,取 $c = x_1 = x_2$, $F(c) = 0$.

若 $x_1 \neq x_2$,不妨设 $x_1 < x_2$,则

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geqslant 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leqslant 0.$$

$\Rightarrow \exists c \in [x_1, x_2], F(c) = 0.$

(2) 由 $F(a) = F(c) = F(b) = 0$,对 $F(x)$ 分别在 $[a,c]$,$[c,b]$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (a,c), \exists \xi_2 \in (c,b)$,使得

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0.$$

再对 $F'(x)$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$,使得

$$F''(\xi) = 0, \text{即} \quad f''(\xi) = g''(\xi).$$

【分析与证明二】 (利用以下两个已知的结论:

1° 设 $h(x)$ 在 (a,b) 可导,若 $h'(x)$ 在 (a,b) 恒不为零,则 $h'(x) > 0 (x \in (a,b))$ 或 $h'(x) < 0 (x \in (a,b))$.

2° 设 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 可导,若 $h(a) = h(b) = 0$,$h(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸(凹)函数,则 $h(x) > 0 (<0) (x \in (a,b))$.)

同前,由题设 $\exists x_1 \in (a,b), M = \max\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1), \exists x_2 \in (a,b), M = \max\limits_{[a,b]} g(x) = g(x_2)$.

令 $F(x) = f(x) - g(x)$. 现用反证法. 若结论不对,则 $F''(x) > 0$ 或 $F''(x) < 0 \quad (x \in (a,b))$.

(1) 若 $F''(x) > 0 (x \in (a,b)) \Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 为凹函数,又 $F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow F(x) < 0 (x \in (a,b))$,但

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geqslant 0,$$

得矛盾.

(2) 若 $F''(x) < 0 (x \in (a,b)) \Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸函数,又 $F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow F(x) > 0 (x \in (a,b))$,但

$$F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leqslant 0,$$

也得矛盾.

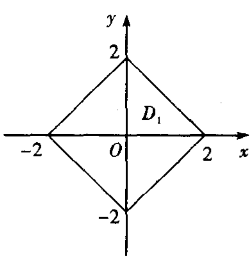
因此必 $\exists \xi \in (a,b)$,使得 $F''(\xi) = 0$,即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

---

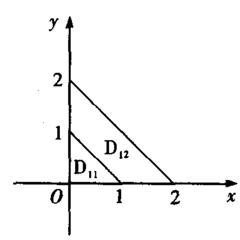
(22)**【分析与求解】** D 如图(1)所示,它关于 x,y 轴均对称,又 $f(x,y)$ 对 x,y 均为偶函数 $\Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D_1 是 D 的第一象限部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示,将 D_1 分成(如图(2)):$D_1 = D_{11} \cup D_{12}$,且

$D_{11}: |x| + |y| \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, \qquad D_{12}: 1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$

于是 $$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma. \text{而}$$

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$