



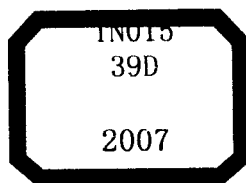
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
国家精品课程教材
普通高等教育电子信息类规划教材

微波技术与天线

傅文斌 主编



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
国家精品课程教材
普通高等教育电子信息类规划教材

微波技术与天线

主 编 傅文斌
副主编 董文峰 杨春山
主 审 周 建 彭世蕤

机械工业出版社

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是国家精品课程“微波技术与天线”的配套教材，主要介绍电磁场、微波技术与天线的基本理论、基本概念、基本技术和基本分析方法。全书共分8章，包括电磁场理论基础、微波传输线、规则波导和空腔谐振器、无源微波器件、电磁辐射理论基础、线天线、面天线及几个专题简介。每章附有一定数量的具有启发性、工程性的例题和习题。为适应课程体系改革的需要，编者将原电磁场与电磁波课程和微波技术与天线课程的内容进行了精选、整合，新增了介绍光导纤维、雷达散射截面、计算电磁学等反映学科发展的新内容。随书光盘提供本书的电子课件、基于MATLAB的虚拟实验、教学用动画和微波器件与天线的图片，供老师教学和学生使用。

本书可作为高等工科院校电子信息类专业本科生的教材，也可供从事雷达、通信、电子对抗工程技术的科研人员阅读和参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

微波技术与天线/傅文斌主编. —北京: 机械工业出版社, 2007. 2
普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 国家精品课程教材.
普通高等教育电子信息类规划教材
ISBN 978-7-111-20852-5

I. 微... II. 傅... III. ①微波技术—高等学校—教材②微波
天线—高等学校—教材 IV. TN015 TN822

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 015016 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑: 王保家 版式设计: 霍永明 责任校对: 陈延翔
封面设计: 张静 责任印制: 杨曦
北京机工印刷厂印刷
2007 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 260mm · 18.25 印张 · 448 千字
标准书号: ISBN 978-7-111-20852-5
ISBN 978-7-89482-111-9 (光盘)
定价: 32.00 元 (含 1CD)

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
销售服务热线电话: (010)68326294
购书热线电话: (010)88379639 88379641 88379643
编辑热线电话: (010)88379727
封面无防伪标均为盗版

前 言

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是国家精品课程“微波技术与天线”的配套教材。根据高等院校课程体系改革的需要，许多学校将原来电子信息类本科专业的两门专业基础课“电磁场与电磁波”（50学时）及“微波技术与天线”（60学时）整合为一门课程“微波技术与天线”（72学时）。本书就是为此新课程编写的教材，使用本教材时不需预先开设“矢量分析与场论”和“特殊函数概论”课程。

本着“加厚基础，注重特色，精心整合”的理念，本书以介绍基本概念和分析方法为主，理论推导为辅，力求使学生在较短的学时内掌握电磁场、微波与天线的基础理论和基本知识，同时针对通信工程和电子信息工程专业的特点在内容选取上有所侧重。为了尽可能体现各部分的内在联系，加强全书的系统性，本书对部分内容的安排与以往的顺序有所不同。

本书共分8章，即电磁场理论基础、微波传输线、规则波导和空腔谐振器、无源微波器件、电磁辐射理论基础、线天线、面天线及电磁场的几个专题（光导纤维、雷达截面积、计算电磁学）。为帮助学生掌握所学习内容，提高分析问题和解决问题的能力，每章都附有一定数量的例题、思考题和习题。为便于使用本教材，还随书配有电子课件和基于MATLAB的虚拟实验光盘。

本书由傅文斌主编，杨春山编写了第1章、8.3节和部分虚拟实验，董文峰编写了第5~7章，其余部分由傅文斌编写。本书承武汉理工大学周建教授、空军雷达学院彭世蕤教授审阅，他们提出不少宝贵意见，谨在此表示诚挚的感谢。编者还对各级领导、兄弟院校和机械工业出版社的大力支持表示诚挚的谢意。在编写过程中，我院的“微波技术与天线”国家精品课程组其他成员潘谊春、韩志奎、潘英锋、刘捷、何缓做了大量的工作。何缓制作了全部电子课件，杨建华绘制了部分插图，谨在此一并致谢。本书附有光盘1张，内有本书的电子课件、基于MATLAB的虚拟实验、教学用动画和微波器件与天线的图片，供老师教学和学生使用。

由于编写时间较仓促，加上编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，欢迎广大读者提出批评和指正。

编 者

2007年2月于空军雷达学院

目 录

前言	
绪论	1
第 1 章 电磁场理论基础	4
1.1 矢量分析	4
1.1.1 矢量和矢量场	4
1.1.2 矢量的代数运算	6
1.1.3 矢量场的散度	8
1.1.4 矢量场的旋度	10
1.1.5 标量场的梯度	11
1.1.6 亥姆霍兹定理	13
1.2 麦克斯韦方程和边界条件	13
1.2.1 麦克斯韦方程的一般形式	13
1.2.2 麦克斯韦方程的复数形式	15
1.2.3 边界条件	16
1.3 基于麦克斯韦理论的静态场描述	19
1.3.1 静电场方程	19
1.3.2 恒定电场方程	23
1.3.3 恒定磁场方程	23
1.4 电磁场的波动方程、坡印廷定理和唯一性定理	25
1.4.1 电磁场的波动方程	26
1.4.2 坡印廷定理	26
1.4.3 唯一性定理	28
1.5 动态矢量位和标量位	30
1.5.1 时变场的位函数	30
1.5.2 滞后位	31
1.5.3 基本电振子的滞后位	33
1.6 理想介质中的 SUPW	34
1.6.1 波动方程的 SUPW 解	34
1.6.2 SUPW 的传播特性	36
1.6.3 SUPW 的极化特性	38
1.7 SUPW 的反射和折射	40
1.7.1 对理想导体平面的垂直入射	41
1.7.2 对理想介质分界面的垂直入射	42
1.7.3 对导电媒质分界面的垂直入射	44
1.7.4 对理想介质分界面的斜入射	45
思考题和习题	48
第 2 章 微波传输线	51
2.1 长线的概念	51
2.1.1 长线的定义	51
2.1.2 长线的分布参数效应	51
2.1.3 长线的分布参数	52
2.1.4 均匀无耗长线的定义	52
2.2 传输线方程及其解	53
2.2.1 传输线的等效电路	53
2.2.2 传输线方程的推导	53
2.2.3 传输线方程的解	54
2.2.4 传输线的特性参量	56
2.3 输入阻抗、反射系数和驻波比	58
2.3.1 输入阻抗和输入导纳	58
2.3.2 反射系数	59
2.3.3 驻波比和行波系数	59
2.3.4 几个重要关系式	60
2.3.5 用工作参数描述传输线的工作状态	60
2.4 均匀无耗传输线的工作状态	62
2.4.1 行波状态	62
2.4.2 驻波状态	62
2.4.3 行驻波状态	66
2.5 传输线的阻抗匹配	69
2.5.1 阻抗匹配的概念	69
2.5.2 $\lambda/4$ 阻抗变换器	71
2.5.3 宽带 $\lambda/4$ 阻抗变换器	71
2.5.4 支节匹配器	73
2.5.5 渐变线匹配器	74
2.6 有耗传输线	76

2.6.1 均匀有耗传输线方程及其解	76	4.1.4 多口网络及其化简	128
2.6.2 几种常见的均匀有耗传输线	77	4.2 匹配元件和连接元件	129
2.6.3 表示有耗传输线损耗的几种方法	78	4.2.1 匹配元件	129
2.7 微带线	80	4.2.2 连接元件	134
2.7.1 标准微带线	80	4.3 分路元件	135
2.7.2 平行带条耦合微带线	84	4.3.1 单T接头	135
2.7.3 带状线及其尺寸选择	87	4.3.2 魔T接头	137
思考题和习题	88	4.3.3 折叠双T接头	138
第3章 规则波导和空腔谐振器	92	4.4 定向耦合器	139
3.1 矩形波导——一般分析	92	4.4.1 定向耦合器的主要参数	139
3.1.1 矩形波导中的TM波	92	4.4.2 同轴型定向耦合器	139
3.1.2 矩形波导中的TE波	95	4.4.3 波导型单孔定向耦合器	140
3.1.3 几点讨论	96	4.4.4 波导型十字缝定向耦合器	141
3.2 矩形波导—— TE_{10} 模	98	4.5 三分贝电桥	143
3.2.1 TE_{10} 模的场结构	98	4.5.1 二分支三分贝电桥	143
3.2.2 TE_{10} 模的传输特性	99	4.5.2 三分支三分贝电桥	146
3.2.3 TE_{10} 模的壁电流分布	100	4.5.3 环形三分贝电桥	147
3.2.4 TE_{10} 模的传输功率和功率容量	101	4.5.4 三分贝电桥的应用	147
3.2.5 TE_{10} 模的等效阻抗	101	4.6 微波衰减器和滤波器	148
3.2.6 高次波型	102	4.6.1 微波衰减器	148
3.2.7 激励与耦合	103	4.6.2 微波滤波器	150
3.3 圆波导	105	4.6.3 微波周期性结构简介	152
3.3.1 贝塞尔函数	105	4.7 微波铁氧体器件	153
3.3.2 圆波导的一般分析	106	4.7.1 概述	153
3.3.3 圆波导中的常用波型	109	4.7.2 铁氧体的张量磁导率	154
3.4 空腔谐振器	111	4.7.3 微波铁氧体的正负圆极化磁导率	155
3.4.1 一般概念	111	4.7.4 SUPW 在无耗均匀铁氧体中的传播	156
3.4.2 矩形谐振腔	113	4.7.5 隔离器	157
3.4.3 圆柱形谐振腔	116	4.7.6 环行器	159
3.4.4 环形谐振腔	117	4.7.7 移相器	160
3.4.5 电容加载同轴谐振腔	119	4.7.8 磁调滤波器	161
思考题和习题	120	思考题和习题	162
第4章 无源微波器件	122	第5章 电磁辐射理论基础	166
4.1 微波网络基础	122	5.1 概述	166
4.1.1 概述	122	5.2 基本辐射单元	166
4.1.2 二口网络的网络参量	123	5.2.1 基本电振子的辐射	167
4.1.3 二口网络参量的应用	126	5.2.2 基本磁振子的辐射	168

5.2.3	基本缝隙的辐射	170	6.5	平面阵列天线	219
5.2.4	惠更斯面元的辐射	171	6.5.1	阵列天线的组成与馈电	219
5.3	发射天线的主要参数	173	6.5.2	阵列天线的方向性	221
5.3.1	天线的输入阻抗	173	6.5.3	阵列天线的主瓣宽度和方向性 系数	224
5.3.2	方向性图	173	思考题和习题		225
5.3.3	方向性系数、效率和增益	176	第7章 面天线		229
5.3.4	工作频带宽度	178	7.1	口径面的辐射	229
5.4	接收天线	178	7.1.1	平面口径远区辐射场的一般 公式	229
5.4.1	天线接收电磁波的物理过程	178	7.1.2	口径面的最大方向性系数和 面积利用系数	230
5.4.2	天线方向性的互易原理	179	7.1.3	同相矩形口径面的辐射	231
5.4.3	接收天线的等效电路和最大 输出功率	180	7.1.4	同相圆形口径面的辐射	232
5.4.4	接收天线的有效接收面积	181	7.1.5	口径场的相位分布对辐射场的 影响	234
	思考题和习题	182	7.2	抛物面天线	236
第6章 线天线		183	7.2.1	旋转抛物面的几何特性	236
6.1	对称振子	183	7.2.2	抛物面天线的辐射场	238
6.1.1	对称振子的辐射场	183	7.2.3	抛物面天线的馈源	240
6.1.2	对称振子的辐射功率、辐射 电阻和方向性系数	186	7.2.4	馈源偏焦对方向性的影响	240
6.1.3	对称振子的输入阻抗	186	7.2.5	产生特殊波束的抛物面天线	242
6.1.4	对称振子的馈电	187	7.3	喇叭天线	244
6.2	离散元直线阵	188	7.3.1	H面扇形喇叭天线	244
6.2.1	离散元直线阵的辐射场及方向 图乘积定理	189	7.3.2	E面扇形喇叭天线	250
6.2.2	二元阵	190	7.3.3	角锥喇叭天线	251
6.2.3	均匀直线阵	193	思考题和习题		252
6.2.4	均匀直线阵的方向性分析	197	第8章 电磁场的几个专题		254
6.2.5	不等幅馈电边射直线阵	200	8.1	光导纤维	254
6.3	地面对天线性能的影响	204	8.1.1	一般概念	254
6.3.1	镜像法	204	8.1.2	模式分析	254
6.3.2	理想地面对天线方向性的 影响	204	8.1.3	传输参量	257
6.3.3	实际地面对天线方向性的 影响	206	8.1.4	突变型弱导光纤中的线偏 振解	258
6.4	几种常见的线天线	209	8.1.5	光纤的色散和像差	258
6.4.1	折合振子	209	8.2	雷达截面积	259
6.4.2	引向天线	210	8.2.1	一般概念	259
6.4.3	对数周期天线	213	8.2.2	电磁场积分方程	260
6.4.4	螺旋天线	215	8.2.3	雷达截面积的频率特性	262

8.2.4 RCS 问题举例	264	附录.....	275
8.2.5 RCS 研究与雷达对抗	266	附录 A 圆柱坐标系和球坐标系.....	275
8.3 计算电磁学	267	附录 B 常用的矢量公式	276
8.3.1 有限差分法	267	附录 C 同轴线参数表	278
8.3.2 有限元法	270	附录 D 标准矩形波导主要参数表	280
8.3.3 矩量法	272	参考文献.....	282
思考题和习题	274		

绪 论

当今世界是信息的世界，微波波谱是一种非常宝贵的资源。本绪论简要叙述微波的范围、特点和应用，以及对使用本书的建议。

1. 微波的范围

微波是指频率范围为 300MHz ~ 3000GHz 的电磁波，即波长为 1m ~ 0.1mm 的电磁波称为微波。微波的低频端接近于超短波，高频端靠近红外线。表 0-1 列出了国际无线电波谱的波段划分，由表可见，微波的频率范围是相当宽的，几乎是普通无线电波的长、中、短各波段总和的一万倍。

表 0-1 国际无线电波谱的波段划分

波 段		频率范围	波长范围	备 注
普通 无线 电波	甚低频 (VLF)	3 ~ 30 kHz	$10^5 \sim 10^4$ m	超长波
	低频 (LF)	30 ~ 300 kHz	$10^4 \sim 10^3$ m	长波
	中频 (MF)	300 ~ 3000 kHz	$10^3 \sim 10^2$ m	中波
	高频 (HF)	3 ~ 30 MHz	100 ~ 10m	短波
	甚高频 (VHF)	30 ~ 300 MHz	10 ~ 1m	超短波
微波	超高频 (UHF)	300 ~ 3000 MHz	1 ~ 0.1 m	分米波
	特高频 (SHF)	3 ~ 30 GHz	10 ~ 1 cm	厘米波
	极高频 (EHF)	30 ~ 300 GHz	10 ~ 1mm	毫米波
	超极高频	300 ~ 3000 GHz	1 ~ 0.1mm	亚毫米波

二战时期为工程应用方便和保密的需要，将微波波段的划分用英文字母表示。这种划分方法被一直沿用至今，见表 0-2。这些符号在科技文献中经常出现，特别是在雷达和通信领域。

表 0-2 微波波段的一种工程划分

波 段	频率/GHz	波 段	频率/GHz
UHF	0.3 ~ 1.12	Ka	26.5 ~ 40.0
L	1.12 ~ 1.7	Q	33.0 ~ 50.0
LS	1.7 ~ 2.6	U	40.0 ~ 60.0
S	2.6 ~ 3.95	M	50.0 ~ 75.0
C	3.95 ~ 5.85	E	60.0 ~ 90.0
XC	5.85 ~ 8.2	F	90.0 ~ 140.0
X	8.2 ~ 12.4	G	140.0 ~ 220.0
Ku	12.4 ~ 18.0	R	220.0 ~ 325.0
K	18.0 ~ 26.5		

随着电子对抗和电磁兼容技术的发展,出现了另一种波段划分方法,并于1970年定型,见表0-3。应注意的是两种划分方法中有一些字母是相同的,阅读文献时请不要混淆。

表0-3 电子对抗中常用的一种波段划分

波 段	频率/GHz	波 段	频率/GHz
A	0.1 ~ 0.25	H	6.0 ~ 8.0
B	0.25 ~ 0.5	I	8.0 ~ 10.0
C	0.5 ~ 1.0	J	10.0 ~ 20.0
D	1.0 ~ 2.0	K	20.0 ~ 40.0
E	2.0 ~ 3.0	L	40.0 ~ 60.0
F	3.0 ~ 4.0	M	60.0 ~ 100.0
C	4.0 ~ 6.0		

2. 微波的特点

既然微波也是电磁波,为什么又要把它从整个电磁波谱中划出来专门研究呢?主要原因是:

(1) 微波的波长很短,小于或接近一般物体,如建筑物、目标体(飞机、导弹、军舰等)等的尺寸,因此,微波的传播与可见光($0.76 \sim 0.40 \mu\text{m}$)类似,称为似光性。利用这一特性可获得方向性很高的天线(如雷达天线),还可利用微波直线传播的特点进行微波中继通信、无线电定位等。

(2) 微波的频率很高,一些在无线电波中并不显著的效应变得显著起来,如普通真空器件中电子的渡越时间与微波的周期在同一数量级,因而必须采用新的方法设计微波真空器件,如速调管、磁控管和行波管等。

(3) 微波能穿透电离层。利用这一特性可以进行卫星通信,开展射电天文学研究。微波具有量子特性,其量子能量为 $10^{-6} \sim 10^{-4} \text{eV}$,因此可作为研究物质微观特性的重要工具。

(4) 在微波频段,电路上各点的电压、电流不能看成是同时建立的,各点电压、电流的振幅和相位也都不同,因此必须用“分布参数”的概念和电磁场方程来分析。这使微波的研究方法与低频时很不相同。

可见,由于量的变化引起电磁波性质的变化,有必要对微波进行专门研究。从科学发展史看,对微波的专门研究极大地丰富了麦克斯韦理论,是麦克斯韦理论的重要支柱之一。

3. 微波的应用

雷达是微波传统的应用领域,微波工程早期的发展动力来自二战对雷达的需求。各种各样的雷达系统安装于地面、飞机、导弹、卫星、舰船、汽车上,它们都离不开微波部件。雷达天馈系统作为雷达的重要分系统,在确定雷达的总体指标时其指标和参数起着非常关键的作用,例如雷达天馈系统的增益、噪声、工作带宽、尺寸、重量,天线的方向图、增益、极化等都是影响全局的参数。20世纪后期以来,相控阵雷达、合成孔径雷达(SAR)取得了

长足的进展，成为推动现代微波技术发展的重要动力。现代战争中随着电子对抗的加剧，雷达面临着综合电子干扰、隐身目标、反辐射导弹、超低空突防四大威胁，这不仅推动着雷达技术的进步，也对微波工程技术提出大量的新需求。

微波工程技术在通信系统中占有非常重要的地位，例如微波中继通信、移动通信、卫星通信等。为解决电磁波波谱拥挤和提高通信容量的问题，微波技术与信号处理技术、计算机技术相结合，使通信天线系统发展到智能天线、软件天线的阶段。卫星除了可以用于通信，还可用于电视广播和构成全球定位系统（GPS），这些系统都离不开微波器件和部件。特别需要指出的是，在这些系统的设计和运用中，还必须考虑到电波传播的特性，才能使整个链路的性能优化。

微波遥感从机载平台或卫星平台上对地球进行观测，为地理信息系统（GIS）提供实时的动态信息。其突出优点是不受云层覆盖的影响，具有全天候的特点。合成孔径雷达（SAR）为微波遥感提供了强有力的工具。

电磁兼容（EMC）是一个新兴的应用领域。由于科技的进步，电气和电子设备的种类和密度急剧增加，日渐呈现出诸多有害影响，例如，一个狭小的武器平台上往往集成有几十个信息设备，它们的相互兼容问题给微波工程技术提出许多新课题。

近年来，国内外开展了微机电系统的研究，例如对蜻蜓或者蚂蚁状的自主式侦查监视系统的研究，推动了对超微型微波系统的需求。随着高速数字集成电路的发展，数字通信高达 2.4Gbit/s 的速度，其芯片内部和集成电路的互连线上都会呈现明显的微波效应，因此，微波工程方法将对提高高速数字集成电路的性能起到重要作用。

除微波的信息类应用外，微波能在工业、农业、军事、生物、医学等各个领域也得到广泛应用。除传统的工业微波加热外，值得特别一提的有：家用微波炉，它使微波从科学殿堂走进了寻常家庭，它对微波知识的普及功不可没；微波定向能武器，它导致武器概念的创新，因此称为新概念武器；微波卫星电站，它为解决能源问题带来新的希望。微波卫星电站是一个巨型工程，其设计尺寸为 $10 \times 20 \text{km}^2$ ，总重 86kt，通过直径 1km 的微波天线将电能输送到地面电站，输电能力达 10^{10}W 量级。

4. 对使用本书的建议

- (1) 使用本教材时，不需预先开设“矢量分析与场论”、“特殊函数概论”课程。
- (2) 本教材主要由三部分构成，分别是电磁场理论基础（第1章），微波技术（第2~4章），天线技术（第5~7章）。使用时可以讲授全部内容（72学时），也可以根据需要选用部分内容，如只讲授电磁场与微波技术部分（50学时），或者只讲授电磁场与天线技术部分（38学时）。
- (3) 为适应各种需求，本教材第8章介绍了三个热门专题，分别是光导纤维、雷达截面积和计算电磁学。

第 1 章 电磁场理论基础

麦克斯韦 (Maxwell) 在总结宏观电磁现象的实验规律的基础上, 经过对概念的扩充和对定理的推广, 于 1864 年提出描述宏观电磁现象的一组方程。为纪念他对科学发展的杰出贡献, 这组方程被命名为麦克斯韦方程, 他的理论也称为麦克斯韦理论。麦克斯韦理论是研究各种宏观电磁现象的理论基础。

麦克斯韦预言了电磁波的存在。1888 年赫兹用实验产生并检测到电磁波, 证实了该预言的正确性。一个多世纪以来, 人类的无数实践活动均证实了麦克斯韦理论的正确性。至今, 他的理论仍然是推动社会进步最重要的基础理论之一。

本章先介绍必要的数学基础知识——矢量分析, 然后介绍麦克斯韦理论中最基本的内容。

1.1 矢量分析

电磁场理论中的一些重要物理量, 如电场强度、磁场强度和电流密度等都是矢量, 因而本节的内容是学习本课程所必需的数学基础知识。

1.1.1 矢量和矢量场

1. 标量和矢量

(1) 定义 只有大小、没有方向的量叫作标量。一个标量可以是时间和空间坐标的函数。物理中的标量 (如温度 T 、电压 U 等) 还需带有相应的量纲。

既有大小又有方向的量称为矢量。矢量一旦被赋予了“物理单位”, 便成为具有物理含义的矢量, 如电场强度 \mathbf{E} 、磁场强度 \mathbf{H} 等。显然, 必须有两个信息量 (大小和方向) 才能确定一个矢量。

虽然零既无大小也无方向, 但是经常出现在矢量的运算中, 因此作为约定, 也将零称为零矢量。

(2) 矢量的表示方法 矢量的代数表示一般用黑斜体字母, 如 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} , 或斜体字母上加一箭头, 如 \vec{A} 、 \vec{B} 。

矢量 \mathbf{A} 的大小 (或长度) 叫做矢量的模, 记为 $|\mathbf{A}|$ 或 A , 它是一个正实数 (除零矢量)。

矢量 \mathbf{A} 的方向可用单位矢量表示。单位矢量是长度为 1 的矢量, 矢量 \mathbf{A} 的单位矢量可记作 \mathbf{a} ($\mathbf{a} = \mathbf{A}/A$) 或记作 \mathbf{e}_A 。

矢量可以用它在坐标轴上的投影, 即坐标分量来表示。如图 1-1-1 所示, 在直角坐标系中, 矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1-1-1)$$

式中, A_x 、 A_y 、 A_z 称为矢量 \mathbf{A} 的直角坐标分量, $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \cos \beta$, $A_z = A \cos \gamma$ 。

矢量 \mathbf{A} 的方向可表示为

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_x \cos\alpha + \mathbf{e}_y \cos\beta + \mathbf{e}_z \cos\gamma \quad (1-1-2)$$

式中, $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为矢量 \mathbf{A} 的方向余弦。

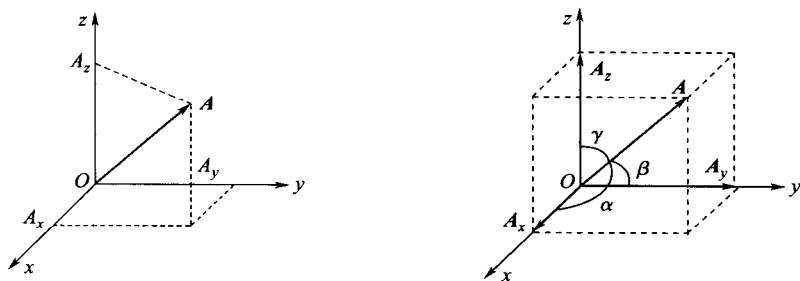


图 1-1-1 矢量 \mathbf{A} 分解为直角坐标分量

(3) 位置矢量 从坐标原点指向空间位置点的矢量称为位置矢量或矢径, 记为 \mathbf{r} 。在直角坐标系中, 空间任一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量为

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z \quad (1-1-3)$$

位置矢量 \mathbf{r} 包含了该矢量所指空间点的坐标, 因此可以用 \mathbf{r} 代表空间点 P 的位置。例如, 函数 $f(x, y, z)$ 可记为 $f(\mathbf{r})$ 。

(4) 微分元矢量 进行矢量的微积分运算时, 常常用到线微分元矢量和面微分元矢量。线微分元矢量通常称为线元矢量, 定义为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_l dl \quad (1-1-4)$$

式中, \mathbf{e}_l 是单位矢量, 表示线元矢量的方向; dl 是线元的长度。

线元矢量可表示成三个坐标分量的矢量和。例如, 在直角坐标系中有 (见图 1-1-2)

$$d\mathbf{l} = dl_1 + dl_2 + dl_3 = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1-1-5)$$

可见, 线元矢量就是位置矢量的微分。容易证明, 线元矢量的方向就是有向曲线的切线方向。

面微分元矢量通常称为面元矢量, 定义为 (见图 1-1-3)

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (1-1-6)$$

式中, \mathbf{n} 是面元法线方向的单位矢量, 称为法向矢量或法矢, 也就是说, 面元矢量的方向用与面元垂直的法向矢量表示; dS 是面元的面积, 表示面元矢量的大小。

法向矢量 \mathbf{n} 的确定有两种情形:

一种是 dS 为开表面上的面元, 开表面由有向闭合曲线 C 所围成。这时, 按图 1-1-4 所示方法确定 \mathbf{n} , 即 \mathbf{n} 的方向与有向闭合曲线 C 呈右手螺旋关系。

另一种是 dS 为闭合表面上的面元。这时, 取 \mathbf{n} 的方向为闭合面的外法线方向 (特别说明处除外)。

2. 标量场与矢量场

(1) 场的定义 若某时空域内的每一时空点, 都对应着某个物理量的一个确定的值, 就称在该时空域内确定了该物理量的场。

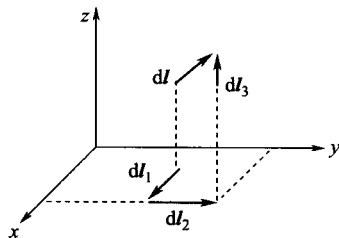


图 1-1-2 直角坐标系中线元矢量 $d\mathbf{l}$

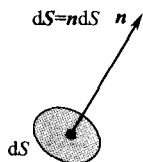
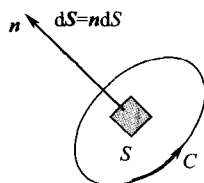
图 1-1-3 面元矢量 $d\mathbf{S}$ 

图 1-1-4 开表面

如果物理量是标量, 就称这个场为标量场, 如温度场、密度场、电位场都是标量场。

如果物理量是矢量, 就称这个场为矢量场, 如引力场、速度场、电场和磁场都是矢量场。

(2) 矢量场的力线 研究物理量的场时, 常常用“场图”来表示物理量在空间逐点演变的情况。可以说, “场图”就是物理量的场的直观表示。

对于标量场, 常常用“等值面”图表示。空间内物理量(标量)值相等的点的集合形成的曲面称为等值面, 例如气象图上的等压线, 地图上的等高线等。等值面的方程为

$$u(\mathbf{r}) = \text{常数} \quad (1-1-7)$$

对于矢量场, 常常用“力线”图表示。力线也称为流线, 例如物理学中的电力线、磁力线都是力线。力线是物理学中的一个重要概念, 其定义是:

1) 有向曲线上任一点的切线方向必定与该点的场矢量方向相同。

记有向曲线上任一点的线元矢量为 $d\mathbf{r}$, 该点的场矢量为 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, 必有 $d\mathbf{r} // \mathbf{F}(\mathbf{r})$, 即 $d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ 。由此可得

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)} \quad (1-1-8)$$

上式即为绘制“力线”图的微分方程。

2) 有向曲线的疏密程度表示各处矢量的大小及变化趋势。

1.1.2 矢量的代数运算

1. 矢量的加减法

矢量的加减法遵循平行四边形法则, 满足交换律与结合律。

两矢量之和(或差)的直角坐标分量等于两矢量的对应坐标分量的和(或差), 即

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{e}_x + (A_y \pm B_y)\mathbf{e}_y + (A_z \pm B_z)\mathbf{e}_z \quad (1-1-9)$$

2. 矢量与标量相乘(数乘)

矢量与标量的积为矢量。矢量与标量相乘满足交换律、结合律和分配律。

直角坐标系中矢量 \mathbf{A} 乘以标量 u 满足以下关系:

$$u\mathbf{A} = uA_x\mathbf{e}_x + uA_y\mathbf{e}_y + uA_z\mathbf{e}_z \quad (1-1-10)$$

3. 矢量的乘法

矢量的两信息量特性决定了矢量有两种乘法: 矢量的标积(即点积)和矢量的矢积(即叉积)。

(1) 矢量的标积

矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积为标量, 它等于两矢量的模与两矢量正向夹角的余弦三者的乘积,

记为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha \quad (1-1-11)$$

角度 α 如图 1-1-5 所示。矢量的标积满足交换律和分配律。

在直角坐标系中,有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-1-12)$$

若非零矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标积等于零,则等价于 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相互垂直,即 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ 。

若 \mathbf{B} 为单位矢量,即 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_B$,则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示矢量 \mathbf{A} 在 \mathbf{e}_B 方向上的投影(或分量)。对一般情况,矢量 \mathbf{A} 在矢量 \mathbf{B} 上的投影(或分量)可写成

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = |\mathbf{A}| \cos \alpha \quad (1-1-13)$$

(2) 矢量的矢积

矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢积为矢量,记为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \quad (1-1-14)$$

式中, α 为 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 正向的夹角(见图 1-1-6); n 为 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 所在平面的法向矢量。 n 与 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 满足右手螺旋关系。

在直角坐标系中,两矢量矢积的直角坐标分量形式是

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (1-1-15)$$

写成行列式形式是

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-1-16)$$

由行列式的性质有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-1-17)$$

即两矢量的矢积不满足交换律。

若非零矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积等于零,则等价于 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相互平行,即 $\mathbf{A} // \mathbf{B}$ 。

例 1-1-1 三角形的三个顶点为 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(4, 6, -2)$ 和 $C(-2, 4, 8)$ 。

- (1) 求 B 点和 C 点的位置矢量 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 之间的夹角;
- (2) 求 B 点到 C 点的距离矢量 \mathbf{R} 及 \mathbf{R} 的方向;
- (3) 判断 $\triangle ABC$ 是否为一直角三角形,并求三角形的面积。

解 (1) B 点和 C 点的位置矢量分别为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x 4 + \mathbf{e}_y 6 - \mathbf{e}_z 2, \quad \mathbf{C} = -\mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z 8$$

则由式 (1-1-11) 可得 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 之间的夹角为

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{B}| |\mathbf{C}|} = \frac{B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z}{BC} = 0, \quad \alpha = 90^\circ$$

(2) B 点到 C 点的距离矢量为

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = -\mathbf{e}_x 6 - \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z 10$$

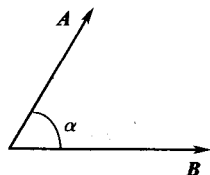


图 1-1-5 矢量的标积

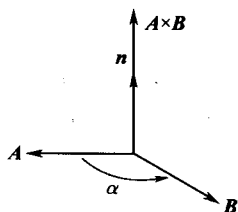


图 1-1-6 矢量的矢积

R 的方向即其单位矢量, 有

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = -\mathbf{e}_x \frac{3}{\sqrt{35}} - \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{35}} + \mathbf{e}_z \frac{5}{\sqrt{35}} = \mathbf{e}_x \cos 120.47^\circ + \mathbf{e}_y \cos 99.73^\circ + \mathbf{e}_z \cos 32.31^\circ$$

(3) 因为 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$, 所以 $\triangle ABC$ 为一直角三角形, 其面积 S 为

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| = \frac{1}{2} \sqrt{56} \times \sqrt{84} = 14\sqrt{6}$$

1.1.3 矢量场的散度

场的基本微分运算有三种, 分别是矢量场的散度和旋度, 以及标量场的梯度。这里先介绍矢量场的散度。

1. 通量

(1) 通量的概念 在矢量场 \mathbf{A} 中取面元矢量 $d\mathbf{S}$, 场矢量 \mathbf{A} 穿过面元 $d\mathbf{S}$ 的通量记为 $d\psi$, 定义为

$$d\psi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos \theta dS \quad (1-1-18)$$

式中, θ 为 \mathbf{A} 与 $d\mathbf{S}$ 正向的夹角。由于 dS 很小, 常常将 $d\psi$ 称为元通量。

场矢量 \mathbf{A} 穿过任意曲面 S 的通量 ψ 可表示为元通量的面积分, 即

$$\psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S A \cos \theta dS \quad (1-1-19)$$

通常, 有 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $d\mathbf{S} = d\mathbf{S}(\mathbf{r})$, 即它们都是空间位置的函数。

通量的概念源于流体力学, 如流体的流速 \mathbf{v} 是矢量场, 而 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ 则表示流过面元 $d\mathbf{S}$ 的每秒流量, 通量因此而得名。显然, 通量是一个标量。

(2) 穿过闭合面的通量 场矢量 \mathbf{A} 穿过任意闭合曲面 S 的通量可表示为元通量的封闭面积分, 即

$$\psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A \cos \theta dS \quad (1-1-20)$$

穿过闭合曲面的通量有明确的物理意义。仍以流速场为例, 如果 $\psi \neq 0$, 则表示闭合面包围的体积内有净流量流出或流入。若 $\psi > 0$, 表示单位时间内有净流量流出, 说明体积内必定存在着流体的源; 反之, 若 $\psi < 0$, 则表示单位时间内有净流量流入, 说明体积内存在流体的汇 (负源); 如果 $\psi = 0$, 表示单位时间内流入与流出的流量相等, 即体积内正负源的总和为零。

矢量场的这种可以通过通量计算的源, 称作通量源。它是一种标量源。至于通量源的具体含义, 则应视具体的物理问题而定。举例说明如下:

例 1-1-2 已知置于坐标原点处的点电荷 q 的电位移矢量为

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$$

计算通过以坐标原点为球心、半径为 R 的球面的电通量 ψ_e 。

解 在半径为 R 的球面 S 上, $r = R$, 球面的法向矢量 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_r$ 。所以通过球面 S 的电通量为

$$\psi_e = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi R^3} \oint_S \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} dS = \frac{q}{4\pi R^2} \oint_S dS$$

$$= \frac{q}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = q$$

显然, 通过封闭球面的电通量 ψ_e 的源是球面内的电荷 q , 它也是产生矢量场 \mathbf{D} 的源。 q 为正电荷时是正源, 电力线从它向外发散; q 为负电荷时是负源, 电力线向它汇集。

2. 散度

矢量场穿过闭合面的通量只反映闭合面所包围的通量源的总体情况, 不能反映源在闭合面内分布的细节。为说明闭合面内每一点通量源的强弱程度 (即闭合面内的场源分布), 引入散度的概念。

(1) 散度的定义 设 M 为矢量场 \mathbf{A} 中的任意一点, ΔS 是包围该点的任意闭合曲面。将闭合面收缩, 使对应的体积元 $\Delta V \rightarrow 0$, 取如下的极限:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{\Delta V}$$

则称此极限值为 \mathbf{A} 在该点的散度, 记为

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{\Delta V} \quad (1-1-21)$$

由上可见, 矢量场的散度表示场中任意一点处的通量体密度, 该体密度值对应该点处通量源的强度。因此, 矢量场的通量源又称为散度源 (或发散源)。

(2) 散度的运算 在直角坐标系中, 矢量场 \mathbf{A} 的散度等于各坐标分量对各自坐标变量的偏导数之和, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-1-22)$$

为方便起见, 引入一个矢性微分算子

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-1-23)$$

称为哈密顿算子。符号“ ∇ ”读作“del”或“纳布拉”。它既是一个微分运算符号, 但同时又要当作矢量看待。

采用哈密顿算子, 式 (1-1-22) 可以写成

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

散度与微分有相似的运算规则, 参见附录 B。

(3) 散度定理 设 S 是矢量场 \mathbf{A} 中的任意闭合曲面, 它所包围的体积为 V , 有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1-24)$$

上式称为散度定理或高斯定理。散度定理是矢量分析中的一个重要定理, 在简化积分运算, 矢量恒等式的证明和矢量公式化简中经常运用。

例 1-1-3 在无界空间中, 穿出任意闭合曲面 S 的电通量等于 S 所围的体积 V 中的总电荷, 即