线性代数学习指导　考硕士生复习指南

线性代数解题方法技巧归纳

毛纲源

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

华中理工大学出版社

线性代数解题方法技巧归纳

线性代数解题方法技巧归纳
毛纲源
责任编辑：李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山　邮编 430074）
新华书店湖北发行所经销
通信指挥学院印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：10.125　字数：220000
1993 年 12 月第 1 版　　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—10000
ISBN7－5609－0894－2/O・117
定价：5.60 元
（鄂）新登字第 10 号

内容提要

本书是线性代数复习和研究生入学考试用书，是为学生学好线性代数课程而撰写的一本学习指导书．它将线性代数主要内容按问题分类，通过对精选例题的分析，归纳解题方法，总结解题规律．例题不少选自历届研究生入学试题，题型广泛，基本上覆盖了线性代数主要内容．读者可从中加深线性代数内容的理解，掌握各种解题方法和规律，提高解题能力．

前言

本书将线性代数的主要内容按问题分类，通过引例归纳各类问题的解题规律、方法和技巧．例题类型广，有一定梯度．除给出基本概念和基本运算的例题外，还有不少典型例题，其中大部分选自非数学专业的研究生入学试题．

由于本书着重基本解题方法、技巧的归纳和应用，不同于一般的教科书、习题集和题解，它自具特色，对学习线性代数有很好的参考价值．

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数时阅读和参考；对于自学者及有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值．

本书的编写和出版工作得以顺利进行，是与华中理工大学出版社的大力支持和帮助分不开的；武汉大学熊全淹教授对本书提出了许多宝贵意见，湘潭大学唐祐华教授对初稿作了仔细的审校，提出了很好的修改意见，在此一并表示衷心感谢．

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者指正．

毛纲源　1993 年 5 月于武汉工业大学

目录

第一章 行列式计算

§1.1 如何用定义计算行列式及其部分项

对于含零元素较多的行列式可用定义计算．因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只须求出所有非零项即可．如何求出呢？常用下述两法．

法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项．

当行列式含大量零元素，尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时，用此法计算简便．

例 1 用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{matrix} (a_{ij}\neq 0,\ i=k,\ j=k+1, \\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ a_{5t}\neq 0, t=1,2,3,4,5). \end{matrix}$$

解 由行列式定义，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成．第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}. 同法可求第 3、4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}，a_{45}. 第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号．由于行下标已按自然顺序排列，而

列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号. 因除这一项外，其它不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$. 解毕

注意，用上法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪行的非零元素最少（最好只有一个）就从哪一行开始，例如可从最后一行开始计算习题 1.1 第 3 (1)题.

法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的列下标 $j_1, j_2, \cdots j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的 n 元排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零，这里 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 1，2，…，n 的所有 n 元排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 2，3，…，n 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2, j_3, \cdots, j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的所有 n 元排列.

例 2 用定义，计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} \quad (a_i, b_i, c_i, d_i\neq 0, i=1, 2).$$

解 设 $D_4=|(a_{ij})|_{4\times4}$,则 D_4 中第1行的非零元素为 $a_{11}=a_1$, $a_{13}=b_1$, 故 $j_1=1, 3$. 同法可求: $j_2=2, 4$; $j_3=1, 3$; $j_4=2, 4$. 因 j_1, j_2, j_3, j_4 能组成四个4元排列:

$$1\ 2\ 3\ 4;\ 1\ 4\ 3\ 2;\ 3\ 2\ 1\ 4;\ 3\ 4\ 1\ 2,$$

故 D_4 中相应的非零项共有四项,它们分别为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}=a_1\,c_1\,b_2\,d_2,$$

$$(-1)^{\tau(1\,4\,3\,2)}a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42}=-a_1\,d_1\,b_2\,c_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,2\,1\,4)}a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44}=-b_1\,c_1\,a_2\,d_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,4\,1\,2)}a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42}=b_1\,d_1\,a_2\,c_2.$$

其代数和即为 D_4 的值,整理后得

$$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).$$

例 3 用定义,计算下列行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第2,3行及第2,3列上的元素都不等于零.

解 由 D_5 中第1,2,3,4,5行的非零元素分别得到

$j_1=2, 3$; $j_2=1, 2, 3, 4, 5$; $j_5=2, 3$;

$j_3=1, 2, 3, 4, 5$; $j_4=2, 3$.

因 j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 在上述可能取的数码中,一个5元排列也不能组成,故 $D_5=0$.

例 4 用定义,计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}.$$

解 为求 D 的值，只须求出 D 中所有非零项.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$.因而 j_1 只能取 1985，即 $j_1=1985$. 同理 $j_2=1984$，$j_3=1983$，$\cdots$，$j_{1985}=1$，$j_{1986}=1986$，于是 j_1，j_2，$\cdots$，j_{1985}，j_{1986}在可能取的数码中，$j_1\ j_2\cdots j_{1985}\ j_{1986}$只能组成一个 1986 元排列：

$$1985\quad 1984\cdots 2\quad 1\quad 1986,$$

故 D 中非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{\tau(1985,\ 1984,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ 1986)}a_{1,\ 1985}a_{2,\ 1984}\cdots a_{1985,\ 1}\ a_{1986,\ 1986}.$$

因 $\tau(1985,\ 1984,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ 1986)=1984+1983+\cdots+2+1$ $=1985\times992$ 为偶数，故

$$D=(-1)^{1985\times 992}\ 1\times2\times3\cdots\times1985\times1986=1986!\ .$$

上法还可用来计算行列式中含特定元素的所有项.

例 5 写出 5 阶行列式 $D_5=|(a_{ij})|_{5\times5}$中包含 a_{13}，a_{25}并带正号的项.

解 D_5 中包含 a_{13}及 a_{25}的所有项数为 5 元排列 $3\ 5\ j_3\ j_4\ j_5$ 的个数，因 j_3，j_4，j_5 所取的排列是 1,2,4 这三个数码所取的 6 个全排列，因而 $3\ 5\ j_3\ j_4\ j_5$ 能组成的 5 元排列共有 6 个，即

$$3\ 5\ 1\ 2\ 4;\ 3\ 5\ 1\ 4\ 2;\ 3\ 5\ 2\ 1\ 4;$$
$$3\ 5\ 2\ 4\ 1;\ 3\ 5\ 4\ 1\ 2;\ 3\ 5\ 4\ 2\ 1.$$

相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(3\ 5\ 1\ 2\ 4)}a_{13}\ a_{25}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{54}=-a_{13}\ a_{25}\ a_{31}\ a_{42}\ a_{54},$$

$$(-1)^{\tau(3\ 5\ 1\ 4\ 2)}a_{13}\ a_{25}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{52}=a_{13}\ a_{25}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{52},$$

$$(-1)^{\tau(3\,5\,2\,1\,4)}a_{13}\,a_{25}\,a_{32}\,a_{41}\,a_{54}=a_{13}\,a_{25}\,a_{32}\,a_{41}\,a_{54},$$

$$(-1)^{\tau(3\,5\,2\,4\,1)}a_{13}\,a_{25}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{51}=-a_{13}\,a_{25}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{51},$$

$$(-1)^{\tau(3\,5\,4\,1\,2)}a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{41}\,a_{52}=-a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{41}\,a_{52},$$

$$(-1)^{\tau(3\,5\,4\,2\,1)}a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{42}\,a_{51}=a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{42}\,a_{51},$$

故包含 a_{13}，a_{25}并带正号的所有项为

$$a_{13}\,a_{25}\,a_{31}\,a_{44}\,a_{52},\qquad a_{13}\,a_{25}\,a_{32}\,a_{41}\,a_{54},$$

$$a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{42}\,a_{51}.$$

例 6 试求 $f(x)$中 x^4 的系数，已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解一 $f(x)$中含 x 为因子的元素有

$$a_{11}=-x,\qquad a_{21}=x,\qquad a_{23}=2x,\qquad a_{32}=x,$$

$$a_{35}=3x,\qquad a_{44}=x,\qquad a_{52}=-7x.$$

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij_i}的列下标只能取：

$$j_1=1;\ j_2=1,\ 3;\ j_3=2,\ 5;\ j_4=4;\ j_5=2.$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij_i}的列下标只能取 $j_1=1$，$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=4$ 与 $j_2=1$，$j_3=5$，$j_4=4$，$j_5=2$；相应的 5 元排列只有 1 3 2 4 5，3 1 5 4 2，含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{\tau(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}\,a_{21}\,a_{35}\,a_{44}\,a_{52}=21x^4,$$

故 $f(x)$中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

解二 将 $f(x)$化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，于是将这些元素相乘，即可求出 x^4 的系数. 为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -6/7 & 0 & 3/7 & 27/7 & 3x+2/7 \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)(1)(3x)(x)(-7x)=21x^4,$$

$$(-1)^{\tau(13542)}(-x)(2x)(2/7)(x)(-7x)=4x^4,$$

故所求系数为 $21+4=25$.

解三 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式. 为此，将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行、第 5 行加上第 3 行的 7 倍，再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍，最后将新行列式的第 2, 3 行对调，得到

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}.$$

含 x^4 的两项分别为

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot(2x)\cdot x\cdot 2;$$

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot(21x),$$

故 $f(x)$ 中含 x^4 的系数为 $4+21=25$.

习　题　1.1

1. 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

2. 写出 4 阶行列式 $D=|(a_{ij})|_{4\times 4}$中所有含 a_{13}且带负号的项.

3. 用定义,计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},(2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. 求出 $f(x)$中 x^4 与 x^3 的系数:

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}.$$

§1.2 如何证明一行列式能被某一整数整除

下面所讨论的 n 阶行列式 D_n,其元素均为个位整数. D_n 被某整数整除的命题有如下两种类型,其证法基本相同.

第一种类型是命题中给出能被某整数 m 整除的 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$;且 a_i 是 n 位数,其各位数字恰为 D_n 中第 i 行(列)的各个元素,$i=1, 2, \cdots, n$.

其证法是:由于 D_n 的元素为个位整数,将第 1 列(行)乘上 10^{n-1},第 2 列(行)乘上 10^{n-2},…,将第 $n-1$ 列(行)乘上 10,都加到第 n 列(行)上,则 D_n 的第 n 列(行)恰为所给定的 n 个数. 由于第 n 列(行)的元素都能被 m 整除(以下简称第 n 列(行)被 m 整除),故 D_n 也能被 m 整除.

例 1 已知 1 3 2 6,2 7 4 3,5 0 0 5,3 8 7 4 都能被 13 整除,不计算行列式的值,试证

$$D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}$$

能被 13 整除.

证 把 D_4 的第 1 行看成一个四位数,其千位数字为 1,百位数字为 3,十位数字为 2,个位数字为 6. 同样将 D_4 的第 2,3,4 行也分别看成四位数 2743,5005,3874.

为使 D_4 的第 4 列上各元素变成这四个四位数,将第 1,2,3 列分别乘以 $10^3,10^2,10$,且都加到第 4 列,得到:

$$D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&1326\\2&7&4&2743\\5&0&0&5005\\3&8&7&3874\end{vmatrix},$$

由题设 13 整除上行列式的第四列,故 13 能整除 D_4.

例 2 已知 204,527,255 都能被 17 整除,试证:

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\4&7&5\end{vmatrix}$$

能被 17 整除.

证 给定的三个 3 位数,其各位数字恰分别为 D_3 的 3 个列的元素. 为将 D_3 的第 3 行的 3 个元素分别化成 204,527,255,将 D_3 的第 1,2 行分别乘上 $10^2,10$,且都加到第 3 行,得到:

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\204&527&255\end{vmatrix}.$$

由题设,17 能整除上行列式的第 3 行,故 D_3 能被 17 整除.

例 3　已知 $a_1=x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}$，$a_2=x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}$，$\cdots$，$a_n=x_{1n}x_{2n}\cdots x_{nn}$ 为 n 个 n 位数，其中个位整数 x_{ij} 为第 j 个 n 位数 a_j 的第 i 位数字(i，$j=1$，2，$\cdots$，n)，且 a_i($i=1$，2，$\cdots$，n)能被自然数 m 整除，试证下行列式 D_n 能被 m 整除：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　因 D_n 的诸元素均为个位数，且其 n 个列的元素分别为 n 个 n 位数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 的各位数字，故将 D_n 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行分别乘以 10^{n-1}，10^{n-2}，$\cdots$，10，且都加到第 n 行，则该行元素化成 n 个 n 位数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，即

$$D_n=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \\ \sum_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{in} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 m 能整除 a_i($i=1$，2，$\cdots$，n)，故 m 也能整除 D_n.

第二种类型是题设中没有给出被某整数整除的数，要求证明行列式能被某整数整除.

这类命题的证法与前一类相似.值得注意的是，应将 D_n 的各行(列)数字分别看成一个 n 位数，该行(列)第 i 列(行)上的数字视为这个 n 位数的第 i 位数字，然后证明这 n 个 n 位数都能