

Make Mathematics Teaching Scientific

杨冠夏 著



高中数学的教育方式
——基础与境界



中国海洋大学出版社

Make Mathematics Teaching Scientific

高中数学的教育方式
——基础与境界

杨冠夏 著

· 青岛 · 中国海洋大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学的教育方式:基础与境界/杨冠夏著. —青岛:中国海洋大学出版社,2006.10

ISBN 7-81067-917-1

I. 高... II. 杨... III. 数学课—教学研究—高中 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 102574 号

出版发行 中国海洋大学出版社

社 址 青岛市鱼山路 5 号 邮政编码 266003

网 址 <http://www2.ouc.edu.cn/cbs>

电子信箱 cbsybs@ouc.edu.cn

订购电话 0532-82032573 82032644(传真)

责任编辑 丛 溪

印 制 日照报业印刷有限公司

版 次 2006 年 10 月第 1 版

印 次 2006 年 10 月第 1 次印刷

成品尺寸 140 mm×203 mm

印 张 22.25

字 数 5 200 千字

定 价 36.00 元

版权所有

侵权必究



作者简介

杨冠夏，江苏无锡人，1943 年出生，系青岛二中高级教师，山东省特级教师，中国数学奥林匹克高级教练，现任山东省初等数学研究会副会长。从事教学工作 40 年。1997 年，作为主教练之一，所辅导的学生获 38 届 IMO 金牌。1999 年提出“数学学科特征统筹教学法”。2001 年参与全国的“MM 教育方式”实验和推广工作，后投入孙维刚教育思想研究工作，先后荣获山东省富民兴鲁劳动奖章，“全国模范教师”称号，曾享受国家政府津贴。

责任编辑/丛 溪
封面设计/光 禾
终 审/魏建功

本书简介

本书是一本高中数学的教材分析书籍，又是一本数学教育思想和数学教育方式研究的专著。其主要对象是高中数学教师、数学教育教学研究工作者、高中学生和中学数学教育研究感兴趣者。

作者运用学科特征统筹思想，结合自己40年的教学经验，低起点，高观点，对高中数学从数学语言、数学思想方法的视角，逐一做了有独到见解的定位和剖析，向读者展示了以数学自身的学科特征为出发点的数学教学，告诉读者自己是怎样走入“MM教育方式”的，又是怎样接受了“孙维刚数学教育思想”，让数学教学利用系统论，来实现数学教学科学化与艺术化相结合的。

在本书中，作者在追逐着中学数学教学深厚扎实的功底和深刻的哲理的统一，追逐着适合中国国情的素质教育道路上的高中数学教学。

While you are reading this book,
You will feel,

那些高中数学特级教师的
赤子情怀.

Mathematics,
All that is beautiful.

哲学 · 美学 · 数学
激情 · 方法 · 境界

所有这些都源于您
脚下的 **第一步**

序

用了大约一周的时间,来鉴赏冠夏老师这部书稿。由于我的20年数学教学、25年数学教育研究的经历,不断地被从深层记忆中呼唤出来,跨越时空飞临眼前,同书稿对话,因此,读来倍感亲切。

冠夏老师是全国名校青岛二中的数学特级教师,数学功底深厚,为人正直。工作极度认真,待人和气,又是远近闻名的严师,教学经验丰富,却不自封,肯学习,总是以研究的态度对待教学中各种问题,不断地吸纳国内外数学教育研究的新成果,充实和改进自己的教学。因此,他的教学十分地受到学生、家长的欢迎。日常教学不尚题海,学生负担不重,高考成绩却很突出,数学竞赛辅导亦获佳绩,培养出了金牌生。我和冠夏老师一见如故,是在无锡的一次学

术会议上,对数学教学现状和未来发展的关切,使我们同时把目光投向“MM(Mathematical Methodology)教育方式”的实验研究,哲学、辩证法、数学哲学与数学方法论在数学教育中的应用,成为我们相互探索的话题.我们谈论教学方式方法的改革,谈论新课标制订和教材编著的得失,谈论初等数学研究与数学教学的关系,谈论数学竞赛,谈论在岗和在校(正在培养的)数学教师的数学素养、数学观和基本功的缺失……终于认识到,我们的数学教育改革,无论是课程、思想还是方法,我们数学教育未来的希望,根本的还在于人,在于教师,在于教师的培养培训;这除了高等学校(特别是高师)的数学教育改革,组织在岗教师参与数学教育改革的实验,倡导学习和研究(初等数学、数学教育、数学哲学和方法论)之外,还有极为重要的一点,那就是写名师,研究他们的数学思想、数学教育思想和珍贵的教学经历和经验,以鲜活的事例向广大青年教师现身说法.

事实上,我们中、小学教学一线,藏龙卧虎,经验丰富的老教师,特别能教学的年青教师大有人在,他们的教学经历,是国家的瑰宝,是数学教育理论、学说的源泉.然而,我们的许多一线教师无暇研究,不善于写作(加之发表和出版的艰难),因而,由于年迈、退休等原因,很多濒于失传、埋没的危机.我说,作为我进行数学教育研究的一个方向,多年来一直致力于这方面的工作,我已写过的有“波利亚的数学思想”,“华罗庚的数学思想”,“傅种孙数学教育思想初探”,“齐民友的数学教育思想”,“希尔伯特和他的数学问题”,还有“徐利治的数学思想”(尚未发表),等等,他们都是数学大家,又是名师;关于一线教师,我与忘年好友汪杰良(特别能

教学的年青教师)合作,于2000年7月出版了《返璞归真·滋兰树蕙——特级教师曾容数学教学探幽》一书,这引起冠夏老师的联想,有意把自己几十年的教学经历(特别是晚近总结出的“学科特征统筹”教学的理论和实践,是他每用心灵、屡试不爽,颇受学生欢迎的数学教学瑰宝,是对几十年教学实践经验浓缩、反思的成果,是智慧和心血的结晶,怎忍割舍)写出来,流布于新教师之手。近年来,一是参与了组织“MM教育方式”的实验研究,二是我们合作研究青岛二中毕业生、生前一直在北京22中执教的知名特级教师孙维刚,在数学教学中获得非凡成功的经历、思想方法,激发出他强烈的灵感,从而使“学科特征统筹”的思想,更加完善和成熟。

然而,强烈的愿望并不等于现实,日常繁重的教学工作,他实在无法系统地思考和撰写,一直到“退休”之后,发挥退而不休的韧劲,在略有减轻的工作和活动之余,历数个春秋,终于工程初就。

自无锡相识以来,由于酒逢知己,通信不断,相会频频,借着在青岛二中搞“MM实验”之机,听了他的课,观察了他的教学,从数学组的教师和他的学生那里,悉心探询他的教学情况,自认为对他的教学“招数”,已是十分地了解,只是对他为学生具体地解疑释难的“秘密武器”,尚有些不甚了了,对他许多教学举措,产生教学效益的过程和机制,还有些不甚了了。在这次阅读书稿时,却不断地有新的“发现”,新的领悟。比如,我当年教立体几何时,也曾教学生怎样画图,怎样解题,可总有学生步骤混乱,由于画不出合适的图形,而找不到解题思路者,大有人在。可观察冠夏老师的立

几课堂,他并不多说,定义定理点到为止,例题图形由学生上黑板去画,练习全由学生口述,语言简练,条理清楚,翻看学生作业,图工字秀,虽解法不尽一致,却个个正确、完整.学生的“高水平”基本功是从哪里来的?是由于“青岛二中学生优秀”吗?我当年执教的喀什二中,“水平”也不低呀,学生却没有这样的基本功.可见不在于“青岛二中学生优秀”.这次读书稿,才让我恍然大悟:原来,在我们认为“没有什么可教”的“绪论”教学中,就做足了“入门教学”的文章!

一是手把手教学生图形怎样画、怎样看,概念命题怎样用文字说,怎样用符号写,教三种语言的转换;二是教“证明节”(三段论的一个推理单元),教16字推理规则:“始于已知,条件充分,衔接适当,言必有据.”通过精心编排的例题和案例,严格训练,一丝不苟,人人过关,直到习惯了立体几何“三合一”的一套语言,初步树立了空间观念,才会进入“正课”学习,由于“师傅引进了门”,这时的学习,即会如江河东去,势如破竹了.而“立几难”也早已化解在“绪论”之中了.这种画龙又点睛,对于我们新教师过好立几(乃至平凡)教学关,是多好的现身说法啊!

这是第一点感受.

第二点是对“学科特征统筹”的领悟.数十年的数学教学经历,大量正反两面的事例,使冠夏老师形成一个深刻而重要的见解,那就是数学语言的教学:学生学习数学不能哑巴吃黄连,要能够用迥异于日常语言的数学语言去听,去读,去说,去写,去思维.而独特的数学语言,是数学各分支、各单元都具有的特征(即数学的学科特征),在宏观备课、教学的宏观设计中,必须统筹考虑.为此,他曾一再建议,在“MM教育方式”的

八个可控变量之外,再增加一个变量即数学语言的教学,已引起了有关人士的注意。

在书稿中,他以“集合”教学为案例,对“数学语言”学科特征进行详尽说明,并对集合教学作了合理定位。

首先我们要问:在中学,学“集合”主要是学什么?学“集合论”吗?显然不是。冠夏老师站在整个中学数学系统的高度,细致地分析各分支、各单元后发现,“集合”的数学语言特征,是贯串数学各单元、各分支的。因此,他一针见血地指出,学集合就是学集合语言。因为集合整体把握研究对象,如单个对象、部分对象和全体对象间的关系,这种朴素含义的语言表述,最明显地反映了数学语言的抽象概括性、含义确定性(一义性)和系统符号化等特征,又是数学最原始、最简单的对象和关系的描述,因此集合语言渗透到各单元和分支的基本概念、命题、方法和思想之中。比如,数学最基本的对象数的集合的扩充: $N \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow C$,贯串整个中小学数学,再扩张到式的集合;解方程和不等式,在于寻求和研究使它们成立的数(即解)的集合;函数被定义为由集合 A 到 B 的映射;曲线 C 作为点的轨迹,被定义为满足条件 P 的点的集合,而这个条件 P 如能化为点的关于坐标 (x, y) 的等式 $F(x, y) = 0$,它就是曲线 C 的方程,而 C 也就是 $F(x, y) = 0$ 的曲线。排列组合,总是其集合中元素的排列和组合,而解题的困难和技巧,往往集中在辨析元素是什么之上。集合语言简单而清晰,用它进行逻辑推理的训练,澄清“先有鸡还是先有蛋”、“什么是有限无限”、“有无万能的神和上帝”之类模糊命题,常常是轻而易举,手到擒来。因此,学好集合语言,成为学好中学数学的一条有效途径。主张抓

数学语言教学,确实是高见,对数学教师来说,不啻是一点通之举。

还有,该书对高中的函数、三角函数、平面向量、解析几何等分支的学科特征分析和合理定位,也是见解独特到而令人信服,它对以往各单元数学中的种种弊端,进行了入木三分地针砭。指出相关内容学习中,如何摆脱那种说不清道不明的原因,而又教不好学不好的困境的合理途径,于无声处听惊雷,冠夏老师善于从很多不起眼的细节中,发掘丰富内涵从而找到摆脱困境,把教学引入柳暗花明的新境界的策略,读来会常用顿悟之感,会有在自己司空见惯而熟视无睹的情境中,不断发现似熟又陌的奇境之感。这顺其自然,寓深刻的数学教学哲理于浅显的叙述中的行文,怎能不引发我们的感慨:“莫道中数滩水浅,原来无处无蛟龙”。从而把我们对中数教材、对初等数学的认识,步步引向纵深。

至于本书最后的“从学科统筹走向 MM 教育方式”和“站在系统论的高度”两章,作者则是从哲学、系统论和方法论的高度,对“MM 方式”和孙维刚数学教育思想(我们把它概括为“SS 教育方式”)给予了全面的见解独到的考量、评价、对比,并把自己数十年积累和提炼的“学科特征统筹教学”(不妨简称为“XT 数学教育方式”),从渊源、发展和特征诸方面,同 MM、SS 两者,进行了深入、细致的对比,获得了若干令人振聋发聩的见解。尽管作者谦称自己只是向两者学习,自己的 XT 方式不过是学习的心得体会,然而详读细考,却不能不发现,三者既同源而殊途而归,又各有千秋,拿时髦话说,就是优势互补。事实上,在我们看来,MM 作为一种数学教育方式,它的理论—操作系统更完整,更成熟,它

是经千百位水平不一的教师实验证实,是任何心甘情愿者皆可用之的“旧时王谢堂前燕”;但似也有“门槛高,入门难”之憾. SS方式是做出了巨大成绩,获得了令人吃惊的教学效益,让所有数学教育工作者都心动技痒的教育方式,但是,它分布在孙老师的几本著作和学生的回忆中,虽经我们发掘整理成“SS方式”(孙维刚数学教育方式),却仍给人以缺乏系统性之感,更令人困惑者在于,SS与孙维刚密不可分,SS的成功,在很大程度上是孙维刚多才多艺,多专多能,个人魅力获得的. 相比之下,他的思想方法则无足轻重且难学到手. 据我们了解,孙老师生前曾接待过数百批上万人的“取经”者,不厌其详地讲解、示范、传授,然而现在知者寥寥,用者几无. 真是世事难圆,祸福相依. 冠夏老师为了论证孙维刚的个人魅力和他的思想方法的双双珍贵性和可学性,在最后一章,不惜笔墨,苦口婆心,特别地通过与MM的对照分析,和对XT方式形成和发展的历程的解读,反思,获得的结论是:孙维刚的个人魅力和SS是密切相关的,而更重要的,冠夏认为SS又恰是孙维刚所具有的哲学思想(系统论)与数学教学相结合的胜利,认为从SS当中透析出来的数学教学哲理正代表数学教师专业化道路的方向. SS应当是可学可用的,XT的优势,则是通俗、朴实,深入而浅出,顶天而立地,而且按该书作者的看法,它将是通向MM与SS的曲径、阶梯.

在这最后两章中,作者预见了我国数学教育改革(无论方法和课程)发展的大方向、大趋势,而MM和SS(我认为,也包括XT)正是代表了这种方向和趋势. 这当然是一家言,却绝非无据.

如上分析告诉我们,这是一本严肃的讲数学、讲方法、讲教与学的书.然而,又是一本极富可读性的书.它不摆架子,不打官腔,把读者当朋友知音,实话实说,竹筒倒豆,侃侃而谈,有情有趣.我读书稿时,总觉作者不是在写书,而是在写信,向亲朋好友倾诉衷肠,语言隽永,谈吐诙谐,时而发几句牢骚,时而有几句感慨,总是真情袒露,实话心声,读来亲切感人,每翻书稿读来,总不忍释手.且往往一石千浪,引发思绪万千.古人云:文如其人,确实如此.

写了如上这一些,不过是初读书稿的肤浅感受,尽管挂一漏万,似不免有爱屋及乌、“爱人眼里出西施”之嫌.但我还是要真诚地向广大数学教师、高中莘莘学子进一言,此书值得一读,对数学教学、学习必有可借鉴之处.特别地,我想,对我国那些切实为广大师生着想的数学教育研究,也可能是一份厚礼吧!

杨 之

丙戌季春与天 宝陋斋书房

目 次

序	(1)
第一章 单元特征统筹备课	(1)
§ 1 数学学科特征统筹教学方法和单元特征统筹备课	(2)
§ 2 集合——单元特征统筹备课的一个案例	(14)
第二章 函数语言与函数理论体系	(25)
§ 1 函数体系和函数理论框架	(26)
§ 2 高中的函数定义和函数概念	(28)
§ 3 函数语言	(35)
§ 4 基本初等函数是学习初等函数的载体	(56)
§ 5 发展学生的函数应用意识	(65)

第三章 我看三角函数——七分工具三分手艺	(70)
§ 1 三角函数的主要矛盾和矛盾的主要方面	(72)
§ 2 三角函数的四个工具	(83)
§ 3 三角函数的特殊性质	(105)
第四章 驾驭空间的量——向量 ...	(119)
§ 1 理解平面向量	(120)
§ 2 凸显平面向量的特征	(129)
第五章 从解三角形看一般解题方法	(141)
第六章 到数列中来学习归纳、演绎和类比	(166)
§ 1 数列研究什么	(167)
§ 2 数列教案设计选编	(200)
§ 3 命题序列和数学归纳方法	(219)
第七章 立体几何三种语言和十六字诀	(237)
§ 1 立体几何入门教学	(238)
§ 2 用向量的眼光看立体几何	(256)
§ 3 立体几何思路特征	(263)
第八章 支撑解析几何灵魂的定义和解析几何三大思路	(281)
§ 1 什么是解析几何	(282)