

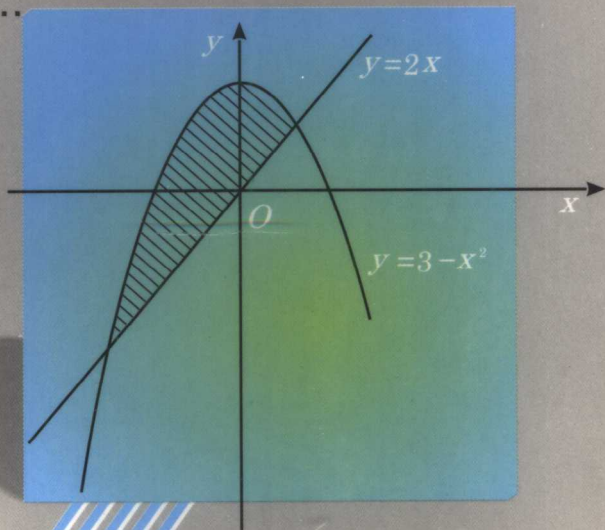
大学数学课程与教学研究丛书

上册

数学分析

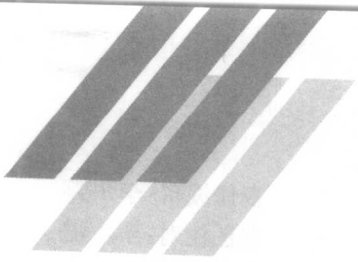
SHUXUE FENXI

赵焕光 林长胜 / 编著



四川大学出版社





数学分析

上册

SHUXUE FENXI

赵焕光 林长胜 / 编著

四川大学出版社



责任编辑:李川娜
责任校对:毕 潜
封面设计:罗 光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上下册 / 赵焕光, 林长胜编著. —成都:
四川大学出版社, 2006.6

(大学数学课程与教学研究丛书 / 赵焕光, 林长胜
主编)

ISBN 7-5614-3374-3

I. 数... II. ①赵... ②林... III. 数学分析—高等
学校—教材 IV.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 064674 号

书名 数学分析 (上下册)

编 著	赵焕光 林长胜
出 版	四川大学出版社
地 址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发 行	四川大学出版社
印 刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	140 mm×202 mm
印 张	23
字 数	571 千字
版 次	2006 年 6 月第 1 版
印 次	2006 年 6 月第 1 次印刷
印 数	0 001~1 500 册
定 价	36.00 元(上、下册)

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电 话:85408408/85401670/
85408023 邮政编码:610065

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。

◆网址:www.scupress.com.cn

版权所有◆侵权必究

前 言

《数学分析》的核心内容是微积分——微分学与积分学的统称. 在微分学中我们主要研究微分、导数及其应用, 其中心问题是如何求事物(现象)的变化率(如切线斜率、瞬时速度等); 而在积分学中主要研究不定积分、定积分及其应用, 其中心问题是如何求总量(如面积、作功等). 在数学发展史上, 积分概念和方法的产生先于微分, 微分的概念几乎是与近代力学(16 世纪后半叶)同时产生与发展起来的, 而且在 17 世纪中叶之前微分与积分互不相干、各自独立又平衡地发展着. 17 世纪下半叶, 英国的大科学家牛顿(Newton, 1643—1727)与德国的大学者莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)从前人纷繁的成果中清理提炼出精粹的思想方法, 建立起联系微分与积分的桥梁——微积分基本定理, 从而使微积分成为一门独立的学科. 后经柯西、魏尔斯特拉斯、康托尔、欧拉、拉格朗日等大数学家们的不断完善与改造, 才有了今天无论从内容还是从表述方式看都已达到尽善尽美的程度的微积分.

微积分的创建是人类文明史上最伟大的创举之一, 它不仅推动了数学与近代生产和科学研究相结合, 而且促进了数学科学自身在广泛的应用中得到长足发展. 18 世纪初, 微积分的思想方法已深入到数学的各个分支领域, 并且带动了代数学、几何学的大发展. 恩格斯曾高度评价这一人类智慧的结晶: 在一切理论成就中, 未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利.

从数学教育的层面看, 微积分已成为培养人们正确世界观、科学方法论和对人们进行文化熏陶的极好素材. 现今的《数学分析》

一直被公认为是大学数学系本科阶段最重要的一门基础课,它不仅是大学数学系学生进校后首先面对的一门最重要课程,而且大学本科乃至研究生阶段的许多后继课程本质上都可以看作是它的延伸、深化与应用,至于它的基本概念、思想和方法,更是无处不在.通常认为学习《数学分析》的目的包含三个方面:一是发展与提高数学思维水平;二是发展与提高把数学应用于解决实际问题的能力;三是为学习后继课程奠定基础.因此,国内几乎所有大学都把提高《数学分析》课程教学质量作为培养高质量的创新人才、提升大学知名度的重要保证.

如何才能学好《数学分析》呢?首先应该是对它有热情、有兴趣、有正确的学习态度,其次是有适宜的学习方法.人们普遍认为:勤思考,多练习;善总结,多问为什么;有一种锲而不舍的精神是学好任何一门学科的重要前提.学习《数学分析》与学习任何一门课程一样,没有任何捷径可走.著名的数学教育家波利亚(Polya)曾经说:我们不可能制定一种最有效的思维方法,思维能力的培养只能通过思维训练才能获得,说得绝对一些,如果有一种“万能”的手段可以解决一切问题,那么这门学科不也就没有生命力了吗?我国著名数学家苏步青先生曾经说过:自己年轻时做过一万多道微积分习题.我国另一位著名数学家华罗庚先生也曾说过:学习数学光读书不做习题,犹如“入宝山则空手回”.与其说《数学分析》是学出来的,倒不如说《数学分析》是做出来的更为合适.带着问题学,学是为了更好地解决问题也许是比较有效的学习《数学分析》的方法.

如何教才能教好《数学分析》呢?这是一个无法回答但又必须面对的两难问题.实际上,教《数学分析》次数越多的教师越觉得这门课程难教,而且越觉得不会教.虽然说好学生不是教出来的,但好的教师对学生的成长肯定是有帮助的.我们认为,作为一名优秀的《数学分析》课程教师,应该能为学生提供优质的课程信息(包括

教材、参考书、学习参考资料、学习体会、思考方法等),为学生指明探索方向,从治学态度与治学方法方面给学生潜移默化的影响.课程信息中教材选择最为重要,目前国内已有多套重点大学的《数学分析》教材及学习参考书,大多数地方院校的数学系通常直接搬用,我们认为这只能是权宜之计.多年来,我们温州大学《数学分析》课程组的教师们一直在努力探索建设具有地方特色又不失学科水准的《数学分析》课程体系.借温州大学《数学分析》精品课程建设之际,我们把多年来在《数学分析》课程教学中积累的经验整理成册,作为我们主编的大学数学课程与教学研究丛书之一——《数学分析》(上、下)正式出版.

《数学分析》(上)包括数学分析基础、一元函数微分学、一元函数积分学三部分;《数学分析》(下)包括级数、多元函数微分学、多元函数积分学三部分.我们编写该书的宗旨是尽量体现“少而精”、“实而新”的原则,尽可能接近“返璞归真”的境界.争取以尽可能简练的文字介绍《数学分析》课程的核心概念与关键内容,尽可能把重要概念产生及其发展的历史背景呈现给读者,尽可能多配备一些能体现《数学分析》的思想方法与精神实质的例题供《数学分析》初学者借鉴;同时还搜集具有一定难度的提高性习题供学有余力的学生钻研用.高质量的《数学分析》课程体系的建立任重而道远,我们愿持之以恒地探索下去.

该书可作为高等院校数学系《数学分析》与《高等数学》课程教师的教学参考书,也可作为数学系本科学生学习《数学分析》(包括考研)的参考资料.

赵焕光 林长胜

2005.12

目 录

上 册

第 1 章 数学分析基础	(1)
1.1 实数集与不等式	(3)
1.1.1 问题提出	(3)
1.1.2 概念入门	(4)
1.1.3 主要性质及结论	(5)
1.1.4 例题选讲	(7)
1.2 函数	(13)
1.2.1 问题提出	(13)
1.2.2 概念入门	(13)
1.2.3 例题选讲	(18)
1.3 数列极限	(27)
1.3.1 问题提出	(27)
1.3.2 概念入门	(28)
1.3.3 主要性质及结论	(30)
1.3.4 例题选讲	(36)
1.4 函数极限	(55)
1.4.1 问题提出	(55)
1.4.2 概念入门	(55)
1.4.3 主要性质及结论	(59)
1.4.4 例题选讲	(65)
1.5 极限基础	(84)
1.5.1 问题提出	(84)
1.5.2 概念入门	(85)

1.5.3	主要性质及结论	(89)
1.5.4	例题选讲	(97)
1.6	连续函数	(109)
1.6.1	问题提出	(109)
1.6.2	概念入门	(109)
1.6.3	主要性质及结论	(111)
1.6.4	例题选讲	(117)
1.7	数学分析基础相关背景介绍	(132)
1.7.1	函数概念产生的背景及其发展	(132)
1.7.2	极限思想产生的背景及其发展	(133)
1.7.3	实数完备性理论产生的历史背景	(136)
1.7.4	连续函数概念产生的背景简介	(138)
第2章	一元函数微分学	(139)
2.1	导数与微分	(140)
2.1.1	问题提出	(140)
2.1.2	概念入门	(140)
2.1.3	主要性质及结论	(144)
2.1.4	例题选讲	(149)
2.2	微分中值定理	(161)
2.2.1	问题提出	(161)
2.2.2	主要性质及结论	(161)
2.2.3	例题选讲	(166)
2.3	泰勒公式	(179)
2.3.1	问题提出	(179)
2.3.2	主要性质及结论	(179)
2.3.3	例题选讲	(183)
2.4	一元函数微分学应用(一)	(192)
2.4.1	问题提出	(192)
2.4.2	概念入门	(192)

2.4.3	主要性质及结论	(193)
2.4.4	例题选讲	(198)
2.5	一元函数微分学应用(二)	(213)
2.5.1	问题提出	(213)
2.5.2	一元函数微分在面积(体积)问题中的应用	(214)
2.5.3	一元函数微分在距离及相关问题中的应用	(215)
2.5.4	相关变化率及其应用	(216)
2.5.5	边际与弹性分析	(218)
2.6	微分学历史背景及人物介绍	(228)
2.6.1	微分学历史背景简介	(228)
2.6.2	牛顿的流数术微积分	(230)
2.6.3	莱布尼兹的无穷小微积分	(233)
2.6.4	微积分发明权之争	(235)
2.6.5	牛顿生平简介	(236)
2.6.6	莱布尼兹生平简介	(237)
2.6.7	拉格朗日生平简介	(238)
第3章	一元函数积分学	(241)
3.1	不定积分	(242)
3.1.1	问题提出	(242)
3.1.2	概念入门	(242)
3.1.3	主要性质及结论	(244)
3.1.4	例题选讲	(248)
3.2	定积分	(267)
3.2.1	问题提出	(267)
3.2.2	概念入门	(267)
3.2.3	主要性质及结论	(270)
3.2.4	例题选讲	(276)

3.3	微积分基本定理	(285)
3.3.1	问题提出	(285)
3.3.2	概念入门	(285)
3.3.3	主要性质及结论	(286)
3.3.4	例题选讲	(292)
3.4	定积分应用	(310)
3.4.1	问题提出	(310)
3.4.2	主要应用及方法	(310)
3.4.3	例题选讲	(315)
3.5	广义积分	(327)
3.5.1	问题提出	(327)
3.5.2	概念入门	(328)
3.5.3	主要性质及结论	(330)
3.5.4	例题选讲	(334)
3.6	一元函数积分学历史背景及人物介绍	(347)
3.6.1	定积分概念产生的背景及其发展	(347)
3.6.2	微积分基本定理产生的背景及其重要意义	(348)
3.6.3	黎曼生平简介	(350)
3.6.4	欧拉生平及他对数学科学的卓越贡献	(351)

附录(上):部分习题参考解答或提示	(356)
-------------------------	-------

下 册

第4章 级数	(389)
4.1 数项级数	(390)
4.1.1 问题提出	(390)
4.1.2 概念入门	(390)
4.1.3 主要性质及结论	(392)

4.1.4	例题选讲	(400)
4.2	函数项级数	(421)
4.2.1	问题提出	(421)
4.2.2	概念入门	(421)
4.2.3	主要性质及结论	(423)
4.2.4	例题选讲	(425)
4.3	幂级数	(442)
4.3.1	问题提出	(442)
4.3.2	概念入门	(442)
4.3.3	主要性质及结论	(444)
4.3.4	例题选讲	(448)
4.4	傅里叶级数	(460)
4.4.1	问题提出	(460)
4.4.2	概念入门	(460)
4.4.3	主要性质及结论	(463)
4.4.4	例题选讲	(468)
4.5	构建级数学说历史背景与重要人物介绍	(480)
4.5.1	柯西构建常数项级数学说的背景	(480)
4.5.2	函数列(函数项级数)一致收敛学说建构的背景	(481)
4.5.3	幂级数理论诞生的背景及其意义	(482)
4.5.4	傅里叶级数理论产生的背景及其意义	(483)
4.5.5	柯西生平简介	(484)
4.5.6	魏尔斯特拉斯生平简介	(487)
第5章	多元函数微分学	(491)
5.1	欧氏空间与多元函数	(492)
5.1.1	问题提出	(492)
5.1.2	概念入门	(493)

5.1.3	n 维空间点集论基本定理	(495)
5.1.4	例题选讲	(496)
5.2	二元函数的极限与连续	(501)
5.2.1	问题提出	(501)
5.2.2	概念入门	(501)
5.2.3	主要性质及结论	(503)
5.2.4	例题选讲	(505)
5.3	多元函数的偏导数与全微分	(515)
5.3.1	问题提出	(515)
5.3.2	概念入门	(516)
5.3.3	主要性质及结论	(518)
5.3.4	例题选讲	(522)
5.4	高阶偏导数与极值	(536)
5.4.1	问题提出	(536)
5.4.2	概念入门	(537)
5.4.3	主要性质及结论	(538)
5.4.4	例题选讲	(543)
5.5	隐函数与隐函数组	(555)
5.5.1	问题提出	(555)
5.5.2	概念入门	(555)
5.5.3	主要性质及结论	(558)
5.5.4	例题选讲	(561)
5.6	几何应用与条件极值	(574)
5.6.1	问题提出	(574)
5.6.2	概念入门	(574)
5.6.3	主要性质及结论	(575)
5.6.4	例题选讲	(580)
第 6 章	多元函数积分学	(591)
6.1	含参变量积分	(592)

6.1.1	问题提出	(592)
6.1.2	概念入门	(592)
6.1.3	主要性质及结论	(594)
6.1.4	例题选讲	(603)
6.2	二重积分与三重积分	(615)
6.2.1	问题提出	(615)
6.2.2	概念入门	(615)
6.2.3	主要性质及结论	(618)
6.2.4	例题选讲	(627)
6.3	曲线积分与曲面积分	(654)
6.3.1	问题提出	(654)
6.3.2	概念入门	(654)
6.3.3	主要性质及结论	(658)
6.3.4	例题选讲	(665)
6.4*	场论初步	(689)
6.4.1	问题提出	(689)
6.4.2	概念入门	(689)
6.4.3	基本运算规则及运算结果	(692)
6.4.4	例题选讲	(693)
6.5	多元积分学历史背景及高斯生平介绍	(696)
6.5.1	重积分理论体系建立的历史背景	(696)
6.5.2	微积分基本理论推广到高维情形的历史背景	(697)
6.5.3	大数学家高斯的生平及成就简介	(698)
附录(下):部分习题参考解答或提示		(701)
主要参考书目		(720)

第 1 章 数学分析基础

数学分析是在实数集的框架中讨论问题的,因此实数理论在数学分析中具有很重要的基础性地位.由于实数理论的系统建立是一项非常困难的工作,本章 1.1 首先介绍实数集的一些基本知识,把实数集的一些重要性质作为基本事实予以认同,然后在本章 1.5 再进行深化.实数集中几个常用的不等式(三角不等式、平均值不等式、柯西不等式等)在数学分析中经常用到,本章 1.1 将作简单介绍.

函数是数学分析的主要研究对象,函数概念诞生的源头来自客观现实世界,函数逐渐发展为严密的数学理论之后又被广泛地应用到客观现实世界中.我国著名数学家华罗庚先生说“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在;凡是出现‘量’的地方就少不了数学,研究量的关系、量的变化、量的变化关系、量的关系的变化等现象都少不了数学.”用华先生的话解释函数的作用真是再恰当不过了.此外,函数概念的形成对提高人的基本素质是必不可少的.日本著名数学教育学家小仓金之助曾经说“数学教育的意义在于开发科学的精神,数学教育的核心是函数概念的形成”.因此,函数在数学教育中意义非常重大.本章 1.2 将介绍函数概念及其函数的基本性质.

极限概念是数学分析的核心概念之一,极限概念从萌芽状态到形成完善经历了漫长的历史进程.极限理论的诞生是微积分发展到一定阶段的必然产物,自从有了严密的极限理论之后,才使得微积分建立在严密的逻辑推理基础之上,随之极限还成为研究数学分析的强有力工具,甚至可以说研究数学分析就是研究各种各

样的极限及其应用,因此极限理论在数学分析中具有特别重要的基础性地位.本章 1.3 与 1.4 将介绍数列极限与函数极限(包括无穷大量与无穷小量)的基本理论及求解极限的基本技巧.

实数完备性理论(极限基础)的诞生是数学工作者为寻求极限的严密数学基础进行艰辛探索的结果.该理论是由德国数学家戴德金(Dedekind,1831—1916)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)和康托尔(G. Cantor,1845—1918)在 1872 年分别从三条不同的途径同时建立的,后人又不断加以完善.到现在,实数完备性已有多种等价描述,在数学分析课程中为了降低难度,通常选择其中一种理论作为出发点(不加证明地作为“公理”承认下来)来建立相关的理论.本章 1.5 将简单地介绍魏尔斯特拉斯的确界(致密性)理论、康托尔的区间套理论、柯西的基本列理论以及法国数学家波莱尔(E. Borel,1871—1956)的有限覆盖理论.本章 1.5 还将介绍实数的无限十进制表示法及数列的上(下)极限.

数学分析中遇到的函数基本上都是连续函数,连续函数有许多良好的特性,它在数学分析的深入研究中有着广泛的应用.本章 1.6 将介绍连续函数的概念及其特性(局部性质与整体性质),一致连续函数的概念、基本性质,以及利用函数的连续性求极限的重要方法.

关键词:实数、不等式、函数、数列极限、函数极限、无穷小(大)量、上(下)确界、上(下)极限、聚点、区间套、柯西列、开覆盖、连续函数、一致连续函数.

本章要求:

- (1) 了解实数集的基本性质以及实数集中几个常用不等式.
- (2) 理解函数概念及其意义.
- (3) 掌握生成函数的主要方法及函数的基本性质.
- (4) 掌握初等函数的概念、生成方法及其特性.
- (5) 掌握数列(函数)极限的概念、思想及基本性质.

- (6) 掌握数列(函数) 极限的常见求法及常用的证明方法.
- (7) 掌握两个重要极限并能灵活应用.
- (8) 理解无穷小(大) 量阶的比较概念并掌握阶的判别方法.
- (9) 了解实数的无限十进制表示方法及大小比较的常识.
- (10) 掌握数集上(下) 确界的概念及基本性质.
- (11) 掌握数集(数列) 聚点的概念及基本性质.
- (12) 掌握实数完备性基本定理及其简单应用.
- (13) 了解数列上(下) 极限的概念及基本性质.
- (14) 掌握连续函数的概念及连续性的判别方法.
- (15) 掌握连续函数的重要性质(局部性态与整体特性) 及其应用, 会利用连续的性质求极限.
- (16) 了解一致连续函数的概念及基本性质.

1.1 实数集与不等式

1.1.1 问题提出

- (1) 何谓有理数?何谓无理数?何谓实数?
- (2) 有理数、无理数如何论证?
- (3) 实数集中的区间有哪几种形式?如何表示?
- (4) 绝对值有哪些基本性质?
- (5) 含有绝对值的不等式如何证明?如何应用?
- (6) 几个常用不等式如何证明?如何应用?

1.1.2 概念入门

1.1.2.1 有理数、无理数与实数

通常称无限十进位循环小数为有理数,称无限十进位不循环小数为无理数,有理数与无理数统称为实数.习惯上,用 $\mathbf{R}^1$ 表示实数集(实数全体),用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集,用 $\mathbf{R}^1 \setminus \mathbf{Q}$ 表示无理数集.

注 (i) 有理数的等价说法是:它可以表示为两个既约整数的比(即形如 $\frac{q}{p}$ 的形式, p 为非零自然数, q 为整数而且最大公约数 $(p, q) = 1$).把有理数的两种不同说法等同起来的是英国数学家沃利斯(J. Wallis, 1616—1703)在1696年做的一件重要工作.

(ii) 无理数的严格定义直到1872年才被数学界引入,德国数学家斯笃兹(O. Stolz, 1842—1905)在他的著作《一般算术教程》(1886年)中证明了每个无理数都可表达成无限十进位不循环小数.

(iii) 有理数集关于四则运算封闭,无理数集关于四则运算不封闭.

1.1.2.2 实数不等式

要建立关于实数不等式的理论体系,必须涉及实数表示及实数大小比较的基本理论,由于这项工作的难度比较大,留待本章1.5再介绍.在这里,我们先承认任何两个实数 x 与 y 都可以建立不等关系,并且约定:

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0, \quad x > y \Leftrightarrow x - y > 0.$$

1.1.2.3 实数的绝对值

设 $a \in \mathbf{R}^1$,称 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 为实数 a 的绝对值.