軌跡問題

王邦珍編

學藝叢書

15

中華學藝社出版

學藝叢書

115

軌跡問題

王邦珍編

中華民國十九年九月初版
中華民國二十二年二月國難後第一版

學藝叢書 軌跡問題一冊 (55671)

每冊定價大洋壹元
外埠酌加運費匯費

編著者 中華學藝社 王邦珍

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

◆C二四五一

編輯大意

1. 本書以日本林鶴一博士所著初等幾何學軌跡問題爲根據,並參酌他書以補之,故全書問題達四百有奇.

2. 本書分平面立體二部以便檢閱.

3. 基本定理及簡明問題,爲篇幅計,均省解法,學者不難自案之.

4. 各問題只解至發現軌跡爲止,即誘導至基本定理爲止.

5. 本書目的,供中學校卒業生及中學校教員參考之用,故範圍只以初等幾何學爲限,即軌跡線不涉於圓錐曲線,高等平曲線等.

6. 本書略去理論部分,因解題能力與此無絕對關係;且能讀此書者,於軌跡之基本理論當已了解,無重述之必要.

7. 雜問題一章,乃收集無類可歸之問題及增補問題.

目　錄

前編平面部

後編立體部

軌跡問題

前編

平面部

第一章　由一定點有定距離點之軌跡

1.　由所設一點定距離點之軌跡,乃以定點爲心,定距爲半徑之一圓周。

2.　過所設一點有定半徑之圓心軌跡,乃一圓周。

3.　由所設圓周定距離點之軌跡,乃與定圓同心之二圓周。

4.　切於定圓有定半徑之圓心軌跡,乃與定圓同心之二圓周。

5.　對定圓張定角點之軌跡,乃與定圓同心之一圓周。

[證]　O 爲定圓,P 爲適於條件之一點。

引切線 PA, PB 結 OP, OA.

則 Rt. $\triangle OAP$,邊 OA 爲半徑有定長,角 APO 等 $\frac{1}{2}APB$ 有定值.

故 OP 有定長;因之 P 點軌跡,乃 O 爲心,OP 爲半徑之一圓周.

6. 過定線兩端有二直線,最初與定線合,後以端點爲心,同時同向旋轉之,其一之速倍於他線,求此兩線之交點軌跡.

解 AB 爲定線,$A'A$, $A'B$ 爲二動線或瞬間之位置.

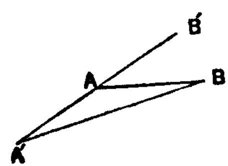

圖 1.

在 $\triangle ABA'$ 內 $\hat{2}=2\hat{1}$

故 ABA' 爲二等邊三角形.

$\therefore \quad AB=AA'$ (或 $A'B$).

故 A' 點軌跡,A(或 B)爲心,AB 爲半徑之一圓周.

7. $\triangle ABC$,底 BC 及中線 BE,各有定長,求頂點 A 之軌跡.

解 引 $AF \parallel BE$,交 CB 延線於 F.

因　　$AE=EC$,

$\therefore$　　$CB=BF$,　$AF=2BE$.

故 F 為定點，AF 有定長。

故 A 點軌跡，乃 F 為心，AF 為半徑之一圓周。

8. **AB 為所設圓之定弦，AC 為動弦，求以 AB，AC 為鄰邊之平行四邊形對角線之交點軌跡。**

解　對角線 BC 之中點為 P，則 P 乃軌跡上之一點。

結 OB，OC. 引 $PD \parallel OC$，交 OB 於 D，則 D 為 OB 中點。

$\therefore$　　$DP=\frac{1}{2}OC=$定長.

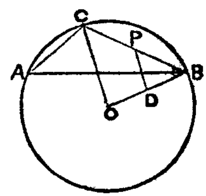

圖 2.

故 P 點軌跡，乃 D 為心，OC 之半為半徑之一圓周。

9. **求所設圓有定長弦之中點軌跡，又求弦上一定點之軌跡。**

解　O 為定圓，AB 為定長之弦，C 為弦上一定點。

引 OM 垂直 AB，結 OC，則 M 為 AB 中點。

因 AB 有定長，故 OM 亦定長；因之 M 點軌跡，乃 O 爲心，OM 爲半徑之一圓周。

又 Rt.$\triangle OMC$ 內，OM, MC 有定長，故 OC 亦定長；因此 C 點軌跡，乃 O 爲心，OC 爲半徑之一圓周。

10. **角 ACB 動於定弓形 ACB 內，延長 AC 至 P，使 CP 等 CB，求 P 點軌跡。**

解 引直徑 DD' 垂直 AB，結 $D'C$, DC, PB；則 DC 爲 C 角之內二等分線，$D'C$ 爲外二等分線。

$\therefore \quad \triangle PCE \equiv BCE.$

故 $D'E$ 爲 PB 之中垂線。

$\therefore \quad D'P = D'B =$ 定長。

故所求軌跡，D' 爲心，$D'B$ 爲半徑之一圓弧。

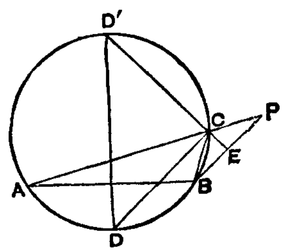

圖 8.

11. **AB 爲定圓 ABC 之定弦，以此弦爲底邊，頂點 C 動於圓周上，延長中線 AP 至 Q 使 PQ 等 AP，求 Q 點軌跡。**

解　結 OB，其中點為 D，結 AD 延長之，截　$DE=AD$.

又連 OP, PD, QE 三線。

D 為定點，故 E 亦定點。

$QE=2PD=2DB=$定長。

故 Q 點軌跡：E 為心，OB 為半徑之一圓周。

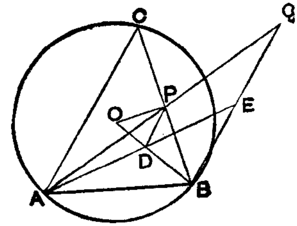

圖 4.

12.　有定長直線 MN 之兩端，移動於正交兩定線上，求其中點軌跡.

解　MO, NO 為正交兩定線，P 為 MN 中點，結 OP，則

$$OP=\tfrac{1}{2}MN=\text{定長}.$$

故 P 點軌跡：O 為心，MN 之半為半徑之一圓周。

13.　所設一圓 O 之中心線為 OX，有與半徑等長之直線 AB，一端 A 在 OX 上，他端 B 動於圓周上，過 A 引 OX 垂線，與 OB 延線交於 P，求 P 點軌跡。

解　Rt. $\triangle OAP$ 內

$$AB=OB$$

$$\therefore \qquad PB = OB = \text{定長}.$$

故 P 點軌跡：O 爲心，$2OB$ 爲半徑之一圓周。

14.　有定半徑互相切二相等圓，且各切於正交兩定線，求二圓切點軌跡。

解　AB, BC 爲正交兩直線，O, O' 爲定半徑之等圓，P 爲適於條件之一點。

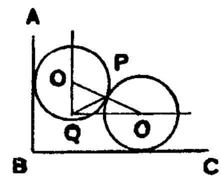

圖 5.

引　$OQ \parallel AB$,　$O'Q \parallel BC$.

OQ, $O'Q$ 相交於 Q，則 Q 爲定點。

$$QP = \tfrac{1}{2}OO' = \text{定長}.$$

故 P 點軌跡：Q 爲中心，定半徑爲半徑之一圓周。

其餘三個直角內均有同樣之軌跡，故本題軌跡爲四圓周之羣。

15.　由所設圓 O 周上任一點 A，引有定長且平行於定線 LM 之直線 AP，求 P 點軌跡。

解　作平行四邊形 $OAPO'$。

則　　　　$OO' \# AP$,

故 O' 有定位。

又　　　　$O'P = OA =$ 定長.

故 P 點軌跡:O' 爲心,OA 爲半徑之一圓周.

16.　**梯形 $ABCD$ 之下底 AB 有定位,一邊 AD 有定長,上底 DC 亦有定長,求第四頂點 C 之軌跡.**

解　D 點軌跡,乃 A 爲心,AD 爲半徑之一圓周.

DC 有定長,且平行於定線 AB;故 C 點軌跡,乃於 AB 線上,截 AE 等 DC,得 E 點,以 E 爲心,AD 爲半徑之一圓周。

17.　**圓 O 常通過定點 P 而迴轉之,於此圓各位置引有定向之切線 AB,求其切點 A 之軌跡.**

解　O 點軌跡,乃 P 爲心,PO 爲半徑之一圓周.

OA 有定長有定向($\because \perp AB$),

故 A 點軌跡,乃與定圓全相等之二圓周。

18. **由所設圓 O 定直徑 AB 之一端 A 引任意直線 AP 交圓 O 於 C 引 BDP 垂直切線 CD,求 AP, BP 交點 P 之軌跡.**

解 結 OC, 則 $OC \parallel BD$.

因 O 為 AB 中點,

$\therefore \quad BP = 2OC =$ 定長.

故 P 點軌跡: B 為心,定圓直徑為半徑之一圓周.

19. **所設圓周上任意點 P,與圓周上二定點 A, B 結直線,於 AP 上截 AC 等定長 k,BP 上截 BD 等定長 l,求 CD 中點 E 軌跡.**

解 結 AD, 其中點為 F, AB 之中點為 G, 結 EF, FG, GE, 則

$$EF = \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{k}{2},$$

$$FG = \tfrac{1}{2}BD = \tfrac{l}{2};$$

又 $E\hat{F}G = \hat{A} + \hat{B} =$ 定值,

故 $\triangle EFG$ 為定形,即 GE 有定長.

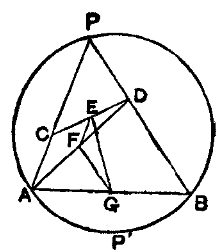

圖 6.

故 E 點軌跡: AB 之中點 G 為心, GE 為半徑之一半圓

弧。

若P點在$AP'B$弧上,同理得求其軌跡,亦以G爲心之一半圓弧。

20.　求前問 CD 分 $m:n$ 點 E 之軌跡。

解　結 AD,內分(或外分)$m:n$ 於 F;同樣分 AB 於 G,結 EF, FG, GE,則

$$EF=\frac{n}{m+n}AC=\frac{nk}{m+n}$$

$$FG=\frac{m}{m+n}BD=\frac{ml}{m+n}$$

又
$$E\hat{F}G=\hat{A}+\hat{B}=\text{定值。}$$

故 $\triangle EFG$ 爲定形,即 GE 有定長。

故 E 點軌跡:乃 G 爲心,GE 爲半徑之二個半圓弧。

21.　三角形外接圓周上一動點 P,與垂心 H 結直線,求直線 HP 與關於 P 點 Simson 線之交點 R 之軌跡。

解　O 爲 $\triangle ABC$ 之外心,H 爲垂心。

H 與外接圓周上一點 P 結直線,交 P 點 Simson 線於

R,則 R 為 HP 中點.

結 OP, OH, 引 $QP \parallel OP$.

則 Q 為 OH 中點.

$QR=\frac{1}{2}OP=$ 定長.

故 R 點軌跡:Q 為中心,外半徑之半為半徑之一圓周.即

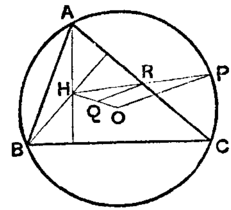

圖 7.

22. 內接於所設圓三角形之垂心有定位,求其各邊之中點軌跡.

解 H 為垂心,O 為外心,A 為 $\triangle ABC$ 之一頂點.

引直徑 AD,則 $HBDC$ 為平行四邊形,其對角線之交點 M,乃 BC 之中點.

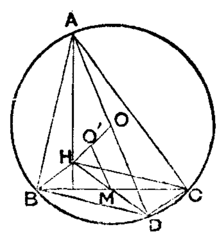

圖 8.

結 HO,引 $MO' \parallel OD$.

則 O' 為 HO 中點.

$\therefore$ $O'M=\frac{1}{2}OD=$ 定長.

故 M 點軌跡:O' 為心,$\frac{1}{2}OD$ 為半徑之一圓周,即 $\triangle ABC$ 之九點圓.

23.　$\triangle ABC$ 二頂點 B,C 有定位，他頂點 A 與垂心 H 之聯線有定長，求 A,H，及 AH 中點 M 之軌跡。

解　O 爲 $\triangle ABC$ 之外心。

引　$OE\perp BC$，

則垂足 E 爲定點。

又　$OE=\frac{1}{2}AH=$ 定長。

故 O 爲定點，因此 A 點軌跡爲圓 O.

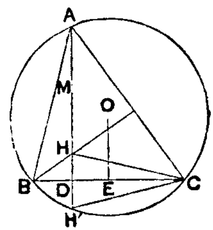

圖 9.

次 AH 有定長，且垂直定線 AB，卽有定向。

故 M,H 點之軌跡，均爲與 O 圓全等之一圓周。

24.　有定長直線之兩端常動於相交二定線上由其端點引各線之垂線，求其交點軌跡。

解　AB 爲定長直線，OA, OB 爲所設二直線，$PA\perp OA$,　$PB\perp OB$.

則 $OAPB$ 爲共圓點。

而 AB 有定長，P 角有定值，故

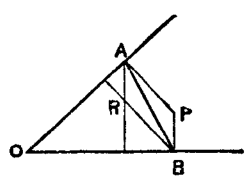

圖 10.