

• 经济数学基础 •

概率论与 数理统计 学习指导

姚孟臣 编著

• 经济数学基础 •

概率论与 数理统计

学习指导

姚孟臣 编著

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/姚孟臣编著.

北京:中国人民大学出版社,2006

(经济数学基础)

ISBN 7-300-06277-6

I. 概…

II. 姚…

III. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料

IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 135682 号

经济数学基础

概率论与数理统计学习指导

姚孟臣 编著

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京东君印刷有限公司

规 格 170 mm×228 mm 16 开本

版 次 2006 年 12 月第 1 版

印 张 19 插页 1

印 次 2006 年 12 月第 1 次印刷

字 数 379 000

定 价 22.80 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

总 序

随着教学改革的不深入和办学规模的扩大,我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化,教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时,全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大,其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言,经过多年调整,实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化,适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点:作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程,《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲,融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围;突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练;内容完整紧凑,难度适中,便于组织教学,能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求 and 分级教学的需要,本套教材推出了《高级经济数学教程》分册,该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外,作为高等数学知识的进一步延伸和扩展,本套教材同时推出了《实用运筹学》分册,该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识,并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是,基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题,对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑,其中包括对教材中多数习题提供解答,以便于学生自习。另一方面,《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充,增加相当数量的研究生入学考试试题题型,力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面,帮助学生实现跨越,达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此,这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的功能,将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成,绝大多数编者具有 20 年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历,还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作,有相当高的知名度。因此,作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度,以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验,这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道,一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助,我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006 年 10 月

前言

本书是与经济数学基础《概率论与数理统计》(姚孟臣主编)配套的学习辅导书。

经济数学基础《概率论与数理统计》是在对教育部教学指导委员会颁布的经济和管理类概率论与数理统计教学大纲(修改稿)和全国硕士研究生入学考试数学考试大纲(数学三、数学四)概率论与数理统计部分进行协调统一编写的教材。本书作为该教材的配套辅导书,紧扣教材编写大纲,围绕各章节的基本概念、基本定理和方法,精心组织典型例题和习题,力求在帮助读者同步学习的过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能。对于计划报考研究生的读者来说,本书将为其构筑从搞好基础学习到增强数学能力,进而实现考研梦想的桥梁。全书包括五个部分:

1. **知识结构与内容提要** 归纳总结各章知识点的相互关联和各章逻辑结构。
2. **重点难点** 说明各章应注意的重点、难点,明确学习要求。
3. **典型例题解析** 按照各章知识点和问题类型的自然顺序,通过各种典型例题解析,巩固和加深对基本概念的理解,扩展解题思路,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力。

例题选择将本着“助学”和“提高”的原则,采取从易到难,循序渐进,点面结合的方法来处理,其中既有对教材基本知识进行解读的基础题,又有历届研究生入学考试中具有典型性和代表性的考研题。例题形式有填空题、选择题、解答题三种。每一个例题的讲解过程一般都要包含解题思路分析,例题解答,例题的举一反三,即基于例题的需要思考和注意的问题。

4. **综合练习题及其解答** 为了学生有更多解题能力的训练,也是为了弥补教材中习题数量以及广度和难度上的不足,本书每章都选编了一定数量与例题搭配的习题,其中大多数习题与研究生入学考试考研数学题型接轨,这既能满足数学基础较好的学生期望学习更多概率论与数理统计知识的需要,也能满足计划报考研究生的学生备考的需要。各章最后一部分将给出习题参考答案,其中难题将提供必要的解题思路或提示。

此外,我们将配套教材中的习题全部作了解答,以帮助读者解决课程学习中遇到的困难。

无论是从内容还是结构而言,本书都称得上是一本学习概率论与数理统计课程的理想助学参考书;同时,对于计划报考硕士研究生的读者而言,本书也是一本理想的有助于全面复习概率论与数理统计知识以达到备考目的的复习辅导书。

目 录

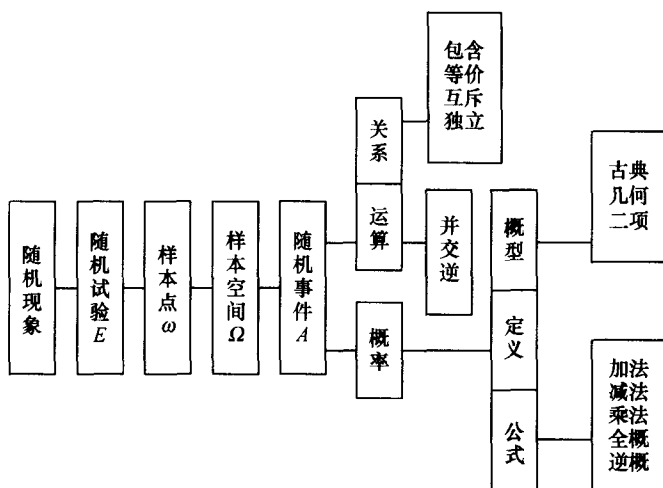
第 1 章 随机事件及其概率	(1)
一、知识结构与内容提要	(1)
二、难点重点	(6)
三、典型例题解析	(7)
四、综合练习题	(17)
五、综合练习题解答	(20)
第 2 章 随机变量及其分布	(30)
一、知识结构与内容提要	(30)
二、难点重点	(35)
三、典型例题解析	(36)
四、综合练习题	(44)
五、综合练习题解答	(45)
第 3 章 多维随机变量及其分布	(54)
一、知识结构与内容提要	(54)
二、难点重点	(61)
三、典型例题解析	(62)
四、综合练习题	(74)
五、综合练习题解答	(78)
第 4 章 随机变量的数字特征	(95)
一、知识结构与内容提要	(95)
二、难点重点	(99)
三、典型例题解析	(101)
四、综合练习题	(113)
五、综合练习题解答	(115)

第 5 章 极限定理初步	(124)
一、知识结构与内容提要	(124)
二、难点重点	(126)
三、典型例题解析	(127)
四、综合练习题	(133)
五、综合练习题解答	(134)
第 6 章 数理统计的基本概念	(142)
一、知识结构与内容提要	(142)
二、难点重点	(147)
三、典型例题解析	(148)
四、综合练习题	(150)
五、综合练习题解答	(150)
第 7 章 参数估计	(154)
一、知识结构与内容提要	(154)
二、难点重点	(161)
三、典型例题解析	(161)
四、综合练习题	(169)
五、综合练习题解答	(171)
第 8 章 假设检验	(183)
一、知识结构与内容提要	(183)
二、难点重点	(189)
三、典型例题解析	(191)
四、综合练习题	(194)
五、综合练习题解答	(195)
附录一 《概率论与数理统计》习题解答	(198)
习题一	(198)
习题二	(207)
习题三	(220)
习题四	(237)
习题五	(255)
习题六	(262)

习题七.....	(269)
习题八.....	(277)
附录二 分布函数的分位数表.....	(280)
附表1 正态分布分位数表	(280)
附表2 χ^2 分布分位数表	(281)
附表3 t 分布分位数表	(283)
附表4 F 分布分位数表	(285)
附表5 泊松分布表	(295)

第 1 章 随机事件及其概率

一、知识结构与内容提要



(一) 样本空间与随机事件

具有下列三个特征的试验称为**随机试验 E** ：

- (1) 在相同的条件下, 试验可以重复地进行;
- (2) 试验的结果不止一种, 而且事先可以确知试验的所有结果;
- (3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

试验的结果称为**基本事件**或**样本点**, 用 ω 表示; 由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**, 记为 Ω .

在随机试验中, 把一次试验中可能出现也可能不出现, 而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**(简称**事件**). 所谓一个随机事件 A 发生当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生.

通常把**必然事件**(记为 Ω)和**不可能事件**(记为 $\emptyset$)看做特殊的随机事件.

(二) 事件的关系与运算

1. 随机事件之间的关系及运算:

(1) **包含关系** 如果事件 A 发生则事件 B 一定发生,即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B ,则称事件 B **包含** 事件 A ,记为 $B \supset A$.

(2) **相等关系** 如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$,即事件 A 和事件 B 同时发生或不发生,则称事件 A, B **相等**,记为 $A = B$.

(3) **互不相容** 如果事件 A 和 B 不能同时发生,即它们的积事件是不可能事件,则称事件 A 与 B **互不相容(或互斥)**,记为 $AB = \emptyset$.

(4) **互逆** 如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生,反之亦然,则称事件 A 和 B **互逆(或互余)**,此时称 B 是 A 的**逆事件**,记为 $B = \bar{A}$.

(5) **事件的和** “事件 A 与 B 至少有一个发生”的事件称为事件 A 与 B 的**和事件(或并事件)**,记为 $A \cup B$ (或 $A + B$).它可推广到 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(6) **事件的积** “事件 A 和 B 同时发生”的事件称为事件 A 与 B 的**积事件(或交事件)**,记为 $A \cap B$ (或 AB).它可推广到 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(7) **事件的差** “事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**,记为 $A - B$ (或 $A\bar{B}$).

2. 事件运算满足的规则

(1) $A + B = B + A$ (交换律);

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (结合律);

(3) $A + A = A$;

(4) $A + \bar{A} = \Omega$;

(5) $AB = BA$ (交换律);

(6) $(AB)C = A(BC)$ (结合律);

(7) $AA = A$;

(8) $A\bar{A} = \emptyset$;

(9) $A(B + C) = AB + AC$ (分配律);

(10) $A + BC = (A + B)(A + C)$ (分配律);

(11) $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ (德·摩根律一);

(12) $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ (德·摩根律二).

(三) 概率和条件概率的定义

1. 概率的古典定义

(1) 试验结果的总数是有限的, (2) 每个试验结果出现的可能性是相同的, 具备这两个特点的随机试验称为**古典型试验**.

定义 在古典型试验中, 随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

其中, n 为 Ω 中包含的基本事件总数, m 为事件 A 中包含的基本事件数. 由关系式 (1.1) 计算事件概率的数学模型称为**古典概型**.

2. 概率的几何定义

(1) 试验的结果是无限的且不可数, (2) 每个试验结果出现的可能性是均匀的, 我们把具备这两个特点的随机试验称为**几何型试验**.

定义 在几何概型随机试验中, 如果 Ω 中的所有基本事件可以用一个有界闭区域来描述, 而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件, 那么随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} \quad (1.2)$$

其中, $L(\Omega)$ 和 $L(A)$ 分别为 Ω 和 A 的几何测度, 由关系式 (1.2) 计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

3. 概率的统计定义

独立地重复进行 n 次随机试验, 设随机事件 A 发生的次数为 m , 称 $f_n = \frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

定义 在 n 次重复独立试验中, 事件 A 发生的频率具有稳定性, 即它在某一数 p 附近摆动, 而且, 一般来说, 当 n 越大时, 摆动幅度越小, 则定义数值 p 为事件 A 发生的概率, 即 $P(A) = p$.

4. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验, Ω 为它的样本空间, 以 E 中所有随机事件组成的集合 $\mathcal{F}$ 为定义域, 对于任一随机事件 A , 规定一个实值函数 $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$. 如果 $P(A)$ 满足下列三个公理:

- (1) (非负性) $P(A) \geq 0$,
- (2) (规范性) $P(\Omega) = 1$,
- (3) (可列可加性) 如果事件 $A_1, A_2, \dots$ 互不相容, 那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

5. 条件概率的定义

设 A 与 B 是两个随机事件, 其中 $P(B) > 0$, 规定

$$P(A | B) = P(AB) / P(B)$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

在同一条件下, 条件概率具有概率的一切性质.

(四) 概率的计算公式

利用概率的公理化定义可推出下列概率的计算公式.

1. 加法公式

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC);$$

一般地

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (\text{有限可加性}).$$

2. 乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B);$$

$$P(ABC) = P(A)P(B | A)P(C | AB).$$

当 A, B, C 相互独立时, $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

3. 求逆公式

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

4. 求差公式

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

特别地, 当 $B \subset A$ 时, 有 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

关于条件概率有相同的计算公式, 如

$$P(\bar{A} | D) = 1 - P(A | D);$$

$$P((A - B) | D) = P(A | D) - P(AB | D);$$

$$P((A + B + C) | D) = P(A | D) + P(B | D) + P(C | D) - P(AB | D) \\ - P(AC | D) - P(BC | D) + P(ABC | D).$$

(五) 全概率公式和贝叶斯公式

如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 满足:

$$(1) \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega,$$

$$(2) A_i A_j = \emptyset (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

则称事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成了 Ω 的一个划分.

定理 如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成 Ω 的一个划分, 则对任一事件 B , 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i).$$

该公式称为**全概率公式**.

定理 如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成 Ω 的一个划分, 则对任意事件 $B (P(B) > 0)$, 在事件 B 发生的条件下事件 A_j 发生的条件概率为

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

该公式称为**贝叶斯公式**.

(六) 随机事件的相互独立性

定义 如果随机事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

我们称事件 A 和 B **相互独立**.

如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 对任意两个事件 A_i, A_j , 满足

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, n),$$

我们称事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **两两相互独立**.

如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 对任意 $k (1 < k \leq n), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 有

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

成立, 则称事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **相互独立**.

定理 如果 $P(A) > 0$ (或 $P(B) > 0$), 则事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$ (或 $P(A|B) = P(A)$).

定理 事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是下面三个之一:

$$(1) P(AB) = P(A)P(B);$$

(2) 当 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0$ 时,

$$P(B | A) = P(B | \bar{A});$$

(3) 当 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ 时,

$$P(B | A) + P(\bar{B} | \bar{A}) = 1.$$

定理 若事件 A 和 B 相互独立, 则

(1) 事件 A 与事件 $\bar{B}$ 也相互独立;

(2) 事件 $\bar{A}$ 与事件 B 也相互独立;

(3) 事件 $\bar{A}$ 与事件 $\bar{B}$ 也相互独立.

(七) 随机试验的相互独立性, 伯努利概型

定义 对于随机试验 $E_i (i = 1, \dots, n)$, 设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件, 如果

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n),$$

则称随机试验 $E_i (i = 1, \dots, n)$ 是相互独立的.

如果在一次随机试验中, 仅关心随机事件 A 是否发生, 即只考虑 A 和 $\bar{A}$ 两个试验结果, 则称这种试验为伯努利试验. 如果重复独立进行 n 次伯努利试验, 将它们合在一起称为 n 重伯努利试验.

定理 设在一次伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p , 则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生(用 μ 表示) k 次的概率为

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.3)$$

由关系式(1.3)计算概率的数学模型称为二项概型, 二项概型也称为伯努利概型或独立试验序列概型.

二、难点重点

1. 事件的关系与运算

事件的基本关系为: 包含、等价、互斥、独立四种; 事件的基本运算为: 并、交、逆三种. 对其定义应从事件的发生、文氏图、样本点的集合、事件的概率等方面正确理解. 注意区分概率为 0 的事件与不可能事件; 概率为 1 的事件与必然事件; 事件的互斥与独立等概念. 对于比较复杂的事件能够利用事件的基本关系与运算表示出来是正确计算其概率的前提. 需要指出的是, 事件的“差”不是基本运算, 建议在解题时, 用基本运算来表示, 即 $A - B = A \cdot \bar{B}$.

2. 三个基本概型

古典概型、几何概型和二次概型给出了直接计算事件概率的公式.

(1) **古典概型** 关键是确定样本空间中样本点总数 n 以及事件 A 包含的样本点数 m . 注意, n 与样本空间的选取有关, 在解题时要选取古典型试验的空间. 古典概型是难点, 但不是重点.

(2) **几何概型** 它是将等可能性推广到无限(且不可列)样本空间的情形, 关键是确定这种场合中的样本空间 Ω 以及适当的测度(即几何度量).

(3) **二项概型** 它是 n 重伯努利试验中的一种情形, 关键是确定在一次试验中事件 A 发生的概率 p 以及在 n 次试验中 A 发生的次数 μ .

3. 三大公式

这里所说的三大公式指的是: 加法公式、乘法公式以及全概公式. 掌握在不同情况下使用它们的条件, 是事件概率运算的重点. 特别是在全概公式应用时, 关键是确定一个完备事件组, 找出先验概率和条件概率.

4. 条件概率与贝叶斯公式

条件概率是一个整体概念, 确定条件概率值时, 常用的有公式法和改变样本空间 Ω 应用其他方法(如古典概型、二项概型). 贝叶斯公式是一个条件概率, 也称为后验概率, 应用其解题时, 关键是确定一个完备事件组, 找出先验概率与条件概率.

三、典型例题解析

(一) 样本空间与随机事件

例 1-1 设 E_1 为从 10 件产品(其中 2 件次品, 8 件正品)之中任取 3 件, 观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品($i=0, 1, 2$), 于是 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

例 1-2 设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击, 直到击中目标为止, 观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次($i=1, 2, \dots$), 于是 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

例 1-3 设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过, 乘客对于列车通过该站的时间完全不知道, 观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω . 显然有 $\omega \in [0, 5)$, 即 $\Omega = [0, 5)$.

例 1-4 写出下列随机试验的样本空间 Ω :

- (1) 同时掷两枚骰子, 记录两枚骰子点数之和;
- (2) 10 件产品中有 3 件是次品, 每次从中取 1 件, 取出后不再放回, 直到 3 件次品全部取出为止, 记录抽取的次数;
- (3) 生产某种产品直到得到 10 件正品, 记录生产产品的总件数;

(4) 将一尺之棰折成三段, 观察各段的长度.

解 (1) $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$;

(2) $\Omega = \{3, 4, \dots, 10\}$;

(3) $\Omega = \{10, 11, \dots\}$;

(4) 设 x, y, z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度, 有

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}.$$

评注 通过上面的几个例子可以看出, 随机试验大体可以分成只有有限个可能结果(如 E_1), 有可列个可能结果(如 E_2)和有不可列个可能结果(如 E_3)这样三种情况.

应该说明的是, 一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外, 一个随机试验的条件有的是人为的, 有的是客观存在的. 在后一种情况下, 每当试验条件实现时, 人们便会观测到一个结果 ω . 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果, 但是能够指出它出现的范围 Ω . 因此, 我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含意的.

(二) 事件的关系与运算

例 1-5 设 A, B, C 是三个随机事件, 试用 A, B, C 表示下列各事件:

- | | |
|-----------------|-----------------------------|
| (1) 恰有 A 发生; | (2) A 和 B 都发生而 C 不发生; |
| (3) 所有这三个事件都发生; | (4) A, B, C 至少有一个发生; |
| (5) 至少有两个事件发生; | (6) 恰有一个事件发生; |
| (7) 恰有两个事件发生; | (8) 不多于一个事件发生; |
| (9) 不多于两个事件发生; | (10) 三个事件都不发生. |

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$; (2) $AB\bar{C}$; (3) ABC ;
(4) $A + B + C$; (5) $AB + BC + CA$; (6) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;
(7) $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$; (8) $\overline{AB + BC + CA}$; (9) $\overline{ABC}$;
(10) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 1-6 下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系?

- (1) $AB = A$; (2) $A + B = A$.

解 (1) 因为“ $AB = A$ ”与“ $AB \subset A$ 且 $A \subset AB$ ”是等价的, 由 $A \subset AB$ 可以推出 $A \subset A$ 且 $A \subset B$, 因此有 $A \subset B$.

(2) 因为“ $A + B = A$ ”与“ $A + B \subset A$ 且 $A \subset A + B$ ”是等价的, 由 $A + B \subset A$ 可以推出 $A \subset A$ 且 $B \subset A$, 因此有 $B \subset A$.

评注 事件间关系与运算法则的知识, 更多是用在计算概率时, 往往将要计算概率的某一事件用另一些事件的运算来表示. 此时, 熟悉事件的运算法则对于分析