普通高等学校少数民族预科教材（试用）

初等数学练习册

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

全一册

PUTONG GAODENG XUEXIAO SHAOSHU MINZU YUKE JIAOCAI (SHIYONG)

国家行政学院出版社
红旗出版社

普通高等学校少数民族预科教材(试用)

初等数学练习册

(全一册)

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

主　　编　罗守山

编写人员　罗守山　刘　学

熊　苹　章元崧

国家行政学院出版社

红旗出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学·练习册／教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会编.－北京：国家行政学院出版社，2006

ISBN 7-80140-518-8

Ⅰ. 初... Ⅱ.教... Ⅲ.初等数学－高等教育：少数民族教育－教材 Ⅳ.012

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第082075号

初等数学练习册

（全一册）

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社 出版

北京市海淀区长春桥路6号(100089)

新华书店总经销

开封市第一印刷厂印刷

880×1230毫米 1/16开本 23.25印张 465千字

2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷

印数：1-10000

ISBN 7-80140-518-8/0·44 定价：36.80元（全二册）

教育部“普通高等学校少数民族预科教材”编写委员会

前 言

为适应普通高等学校少数民族预科教学的需要，教育部民族教育司组织编写了普通高等学校少数民族预科《大学语文》、《汉语精读教程》、《初等数学》、《英语》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》等系列教材。本套教材的使用对象为普通高等学校少数民族一年制预科与两年制预科的学生。其中《大学语文》、一年制《英语》适用于一年制预科学生；《汉语精读教程》、两年制《英语》适用于两年制预科学生。《初等数学》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》适用于一年制和两年制预科学生。

本套教材是以教育部制定的各科课程教学大纲为依据，参照近年来预科学生的普遍水平，遵循有利于国家统一、民族团结、贴近生活、贴近社会的原则进行编写的。为保证教材的适用性，教材编写人员与部分预科教学的一线老师进行了充分的沟通。许多预科教学的一线教师承担了一定的编写工作。

本套教材充分考虑了少数民族学生的实际情况，针对预科阶段的教学特点，在高中阶段各科教学内容的基础上，指导学生对应掌握的学科知识进行查漏补缺，补预结合，使之全面提高。同时，教材在编写过程中，渗透了新的教育理念，真正贴近学生的需要，注重对学生学习能力的培养，力求把教材的思想性、科学性、趣味性、综合性统一起来，突出教材的适用性和可操作性，力求做到难易适度，由浅入深，梯度推进，逐步提高，使他们通过一年或两年预科阶段的学习达到教学的目的，成为维护民族团结、促进和谐发展、实现民族复兴的骨干人才。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

编写说明

由于近十年全国各少数民族自治区、聚居区经济和教育水平的不断提高，加之高中课程改革的不断深入，为了进一步提高全国各少数民族预科院校的教学质量，2005 年 12 月教育部民族教育司在北京召开了编写“普通高校本科少数民族预科系列教材”启动会。

遵照会议精神，以及听取全国各少数民族预科院校师生的宝贵意见和建议，在全国高校民族预科《数学》教材第二版的基础上，结合《新高中数学课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》，我们编写了本系列普通高校本科少数民族预科《数学》教材。

在编写过程中，我们保留了全国高校民族预科《数学》教材第二版的主要知识体系，同时找出了书中与目前本科少数民族预科数学教学不适应的方面。对不适应目前教学的章节有所删减，对新课程标准要求的内容有所增补，更加注意了预科教材内容对高中知识和本科知识的衔接作用，增加了例题、习题，同时配有同步练习册，条理清晰、针对性强，部分章节前后有一些数学科学家的名言、生平介绍以及利用数学知识解决的生活中实际问题，增加了教材的人文性、实际应用性。另外，目录中标有 * 的章节为选学内容，教师可根据学生程度以及各目标院校要求的不同略去或要求自学。

本书及其配套使用的练习册的主编是罗守山。参加编写的人员有罗守山、贾晓芸、高海英、王小妹、蒲明松、刘洪波（第 1−5 章）、刘学（第 6 章）、熊苹（第 7 章）、章元崧（第 8 章）。刘学、罗守山承担了与编辑部的沟通以及最终书稿的整理工作。

在本书的编写过程中，得到了全国各少数民族预科院校及师生的热情帮助。在本书的修订阶段，中央民族大学数学教研室的黄宁老师，对本书提出了宝贵意见。同时，编者所在院校的领导和老师对本书的编写工作进行全力的支持，在此，我们表示衷心的感谢。由于时间仓促，书中存在的问题及不足之处，敬请广大专家、师生批评指正并给予谅解。

编　者

目　录

第一章 预备知识

本章是初等数学的基础，同时也为以后的学习做了一些必要的准备. 本章共有 6 节，主要介绍了集合的概念，集合的并、交与补，实数集与复数集及其性质，反证法，恒等变换与待定系数法，数学归纳法和二项式定理等内容.

下面按照每一节的主要内容做一个比较详细的回顾.

1.1 集 合

由某些具有某种共同特点的个体构成的全体形成一个集合. 集合中各个个体叫做集合的元素. 集合的元素有 3 大特性，即元素的确定性、元素的无序性和元素的互异性. 集合有两种表示法：列举法和描述法.

有关集合运算的一些基本概念：

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若元素 x 属于 A，那么 x 属于 B，我们便记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"），我们把 A 称作是 B 的子集. 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集. "A 是 B 的真子集"记为 $A\subset B$.

设 A,B 是两集合，所有属于 A 或属于 B 的元素构成的集，称为 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

由 A 和 B 的所有共同元素构成的集，称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，成为集合 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$（读作"A 补"），即 $\overline{A}=\{x \mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$.

集合的运算规律：

（1）等幂律　$A*A=A$

　交换律　$A*B=B*A$

　结合律　$A*(B*C)=(A*B)*C$

　分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

　吸收律　$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$

　（这里 $*$ 代表运算 $\cup$ 或 $\cap$）

（2）对任意集合 A,B,C，有

$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-I=\varnothing$，

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

(3)对任意集合 A,B,有

$\overline{\overline{A}}=A,\overline{I}=\varnothing,A\cup\overline{A}=I,A\cap\overline{A}=\varnothing,\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},A-B=A\cap\overline{B}$

(4)对任意集合 A,B.若它们满足 $A\cup B=I$ 和 $A\cap B=\varnothing$,那么 $B=\overline{A}$.

(5)对任意集合 A,B,C,D,有

$A\subseteq A\cup B,A\cap B\subseteq A,A-B\subseteq A$,且有 $A\subseteq B,A-B=\varnothing,A\cup B=B,A\cap B=A4$ 命题等价.

以上我们简要回顾了本节的主要内容,要求同学们熟练掌握集合的概念,集合的基本运算和性质.

例 1 已知 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$,若 $a\in A$,则 $7-a\in A$,试写出所有满足条件的集合 M 的真子集 A.

解:由题设可知,

当 $a=7-a$ 时,$a=3.5\notin M$,

当 $a\neq 7-a$ 时,A 中元素是成对出现的,从而符合条件的集合 A 分别是:$\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,3,4,6\},\{2,3,4,5\}$.

例 2 证明:$A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$

证明:下面我们分两步来证明此题.

第一步,设 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)$,则 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$,于是我们可得 $x\in A$ 且有 $i_0\leqslant n$ 使 $x\in B_{i_0}$,故而有 $x\in A\cap B_{i_0}$,从而有 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$,这就证明 $A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$.

第二步,设 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$,有 $i_0\leqslant n$ 使 $x\in A\cap B_{i_0}$.故而有 $x\in A$ 且 $x\in B_{i_0}$,从而有 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$,即 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)$,这就证明了 $A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)\supseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$.

从上面的两步结果我们就可以证明了等式的成立.

●习题 1.1

1.设 $A=\left\{x\,|\,\frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$,若用列举法表示,则 $A=$________.

2.设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4,5\}$, $B=\{4,6,8\}$,求 $\overline{A},\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A}\cup\overline{B}$.

3.已知集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\},B=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$ 且 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是________.

4.用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{x\in\mathbf{N}^+\mid\frac{9}{9-x}\in\mathbf{N}^+\}=$________.

(2)$B=\{\frac{9}{9-x}\in\mathbf{N}^+\mid x\in\mathbf{N}^+\}=$________.

5.已知 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,求实数 a.

6.给出下列命题

(1)空集没有子集;

(2)空集是任何集合的真子集;

(3)空集不存在相应的补集.

其中不正确的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 证明：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

8. 下列集合中，只有一个子集的集合是(　　).

A. $\{x \mid x^2\leqslant 0\}$　　B. $\{x \mid x^3\leqslant 0\}$　　C. $\{x \mid x^3<0\}$　　D. $\{x \mid x^4<0\}$

9. 已知 $A=\{x \mid x=n,n\in\mathbf{N}^+\}$，$B=\{x \mid x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{N}^+\}$，$C=\{x \mid x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbf{N}^+\}$，$D=\{x \mid x=n\pm\frac{1}{2},n\in\mathbf{Z}\}$，则 A ______ B，B ______ C，C ______ D.

10. 已知集合 $M\subseteq\{1,2,3,4\}$，且 M 中至多有两个奇数，求这样的集合 M 的个数.

11. 设全集为 $\{-1,1\}$，$B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$，求 a,b 的值.

12. 集合 A 有 10 个元素，集合 B 有 8 个元素，集合 $A\cap B$ 有 3 个元素，则集合 $A\cup B$ 有多少个元素.

13. 证明：$A\cup B=B\cup A$.

1.2　实数集与复数集

有理数和无理数称为实数，实数和虚数称为复数. 我们可对复数 $z=a+bi$ 进行分类.

$$\begin{array}{l}\text{复数 } a+bi\\(a,b\in\mathbf{R})\end{array}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{array}\right\}\text{循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}\\\text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

实数集的性质：

(1)实数的加、减、乘、除(除数不为 0)、乘方，其结果仍是实数，即在实数集内这 5 种运算是封闭的.

(2)实数集内任何两个数都可以比较大小(有序性). 实数的大小，可按它们在数轴上对应点的位置来比较，点越往右，它所表示的数就越大.

(3)在任何两个不同实数之间，必存在另一个实数(稠密性). 即若 $a<b$，则必存在数 c 使 $a<c<b$.

(4)实数的运算规律：

①交换律　$a+b=b+a$，$ab=ba$；

②结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$；

③分配律　$a(b+c)=ab+ac$；

④指数律(幂的运算法则)　　设 m,n 是正整数，则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

复数集的性质：

复数集与实数集一样，复数集内也可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且也是封闭的. 此外任

何一个复数都可以进行开方.

与实数集不同的是,两个复数是不能比较大小的.两个复数只能比较是否相等,而不能比较大小.

例 1 若方程 $x^2-xi+2mi-4=0$ 有实数根,求实数 m 的值和实数根 x 的值.

解:将实数根 x_0 带入方程可得:$x_0^2-4+(2m-x_0)i=0,(x_0\in\mathbf{R})$

根据复数相等的条件,我们可知:

$$\begin{cases}x_0^2-4=0\\2m-x_0=0\end{cases} \quad 故可得\begin{cases}x_0=2\\m=1\end{cases}或\begin{cases}x_0=-2\\m=-1\end{cases}$$

所以,当 $m=1$ 时,方程的实数根是 2.

当 $m=-1$ 时,方程的实数根是 -2.

例 2 求满足条件 $\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的自然数 a,x,y.

简要分析:本题的特点是未知数多,条件简单,要注意这里的 a,x,y 都为自然数.

解:将已知中的等式两边平方,可得:$a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$

由于 a,x,y 都为自然数,

所以 $\sqrt{xy}$ 只能是无理数,否则与上式左边是无理数矛盾,

故有:$a=x+y,6=xy$,又显然 $x>y$,x,y 为自然数,

所以,当 $x=6$ 时,$y=1$,得 $a=7$;

当 $x=3$ 时,$y=2$,得 $a=5$,

即 $x=6,y=1,a=7$ 或 $x=3,y=2,a=5$.

●习题 1.2

1. 复数的分类:

复数 $(a+bi,a,b\in\mathbf{R})$ ⇨ $\begin{cases}当\_\_\_\_\_\_时,是实数\\当\_\_\_\_\_\_时,是虚数 ⇨ \begin{cases}当\_\_\_\_\_\_时,是纯虚数.\\当\_\_\_\_\_\_时,是非纯虚数.\end{cases}\end{cases}$

2. 判断下列命题是否正确.

(1)在复数集中,bi 是纯虚数. ( )

(2)形如 $\cos a+i\sin a$ 的复数不能为 0. ( )

(3)$z^2\geqslant 0$ 恒成立. ( )

(4)$ai<(a+1)i$,a 为实数. ( )

3. 用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{x \mid 5<x<8,x\in\mathbf{N}^+\}$

(2)$B=\{x \mid x-3=0,x\in\mathbf{R}\}$

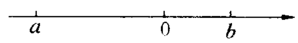
4. 用列举法表示下列集合的元素 (x,y),$A=\{x \mid x^2+y^2=-1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

5. 下列说法:(1)-64 的立方根是 4,(2)49 的平方根是 ± 7,(3)$\frac{1}{27}$ 的立方根是 $\frac{1}{3}$,(4)$\frac{1}{16}$ 的平方根是 $\frac{1}{4}$,其中正确说法的个数是( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 一个实数的平方根是 $a+3$ 和 $2a-3$,则这个实数是______.

7. 已知实数 a,b 在数轴上对应点如图所示，则 $|a|-|a-b|-|b-a|=$ ________.



8. 复数相等的条件是什么？

9. 如果将整数看成是小数点后面是 0 的小数，对实数进行下面 4 种分类，不正确的是(　　).

A. 有理数，无理数

B. 有限小数，无限循环小数，无限不循环小数

C. 小数，分数

D. 正实数，0，负实数

10. 指出下列各数中哪些是有理数，哪些是无理数，哪些是实数？

$3.14, 0, -\frac{3}{4}, \sqrt{10}, 0.13, \sqrt[3]{5}, \pi, \sqrt{9}, \sqrt[3]{-125}$

11. 判断下列说法是否正确并说明理由.

(1) 无理数都是无限小数.　　(　　)

(2) 有理数都是有限小数.　　(　　)

(3) 数轴上的点都表示有理数.　　(　　)

(4) 在实数中不带根号的数都是有理数，带根号的数都是无理数.　　(　　)

1.3　恒等变形与待定系数法

恒等变形和待定系数法是两种很常见的解题方法，在一些解题过程中应用这两种方法会使问题变得简单易解.

恒等概念是对两个代数式而言，如果两个代数式里的字母换成任意的数值，这两个代数式的值都相等，就说这两个代数式恒等. 表示两个代数式恒等的等式叫做恒等式.

将一个代数式换成另一个和它恒等的代数式，叫做恒等变形(或恒等变换).

如何判断一个等式是否是恒等式，通常有以下两种判断整式恒等的方法.

1. 如果两个多项式的同次项的系数都相等，那么这两个多项式是恒等的.

2. 通过一系列的恒等变形，证明两个多项式是恒等的.

在变形过程中，常用的公式有：

(1) $(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i x^i y^{n-i}$；

(2) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots 2x_{n-1}x_n$；

带余除法定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 是数域 F 上的两个多项式，且 $g(x)\neq 0$，则存在数域 F 上的唯一的一对多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$. 其中 $r(x)=0$ 或者 $r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数.

因式定理：多项式 $f(x)$ 被 $(x-a)$ 整除的充分必要条件是 $f(a)=0$.

待定系数法的特点是先根据数量之间的关系所具有的形式，假定一个含有待定的系数的恒等式，然后根据恒等式的性质列出几个方程，解这个方程组，求出各待定系数的值或从方程组中消去这些待定系数，找出原来那些已知系数之间的关系，从而使问题得到解决.

例 1　已知 $x+y=-3$，$x^3+y^3=-18$，求 x^7+y^7 的值

分析：先通过 $x+y=-3$，$x^3+y^3=-18$，求出 xy，再逐步求出 x^2+y^2，x^4+y^4，最后求出 x^7+

y^7 的值.

解:由 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 得 $-18=(-3)^3-3xy(-3)$ 得 $xy=1$

又由 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 得 $x^2+y^2=(-3)^2-2\times1=7$

而 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=7^2-2=47$

得:$(-18)\times47=(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)=x^7+y^7-3$

从而 $x^7+y^7=-843$.

评注:本题充分利用 $x+y$ 和 xy,与 x^2+y^2,x^4+y^4,x^7+y^7 的关系来解题.

例 2 将多项式 x^2+4x+6 化成关于 $x+1$ 的二次多项式.

解:关于 $x+1$ 的二次三项式的一般形式为:

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

因此可设 $$x^2+4x+6=a(x+1)^2+b(x+1)+c \qquad (1.4.1)$$

其中 a,b,c 为待定系数,将(1.4.1)式右端按乘法公式展开,并合并同类项,可得:

$$x^2+4x+6=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

比较恒等式两端 x 的同次项系数,得:

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=4 \\ a+b+c=6 \end{cases}$$

解之可得:

$$a=1,b=2,c=3$$

因此,$x^2+4x+6=(x+1)^2+2(x+1)+3$.

●习题 1.3

1. 已知 $a+\dfrac{1}{a}=5$ 则 $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^2}=$________.

2. 若 $m=10x^3-6x^2+5x-4$,$n=2+9x^3+4x-2x^2$,则 $19x^3-8x^2+9x-2$ 等于( ).

A. $m+2n$ B. $m-n$ C. $3m-2n$ D. $m+n$

3. 若 $m^2=m+1$,$n^2=n+1$,且 $m\neq n$,则 m^5+n^5 的值为( ).

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

4. 若 $a+b=10$,$a^3+b^3=100$,则 $a^2+b^2=$________.

5. 已知 a,b,c,d 满足 $a+b=c+d$,$a^3+b^3=c^3+d^3$,求证:$a^{2001}+b^{2001}=c^{2001}+d^{2001}$.

6. 设 $x+y+z=xyz$,证明:

$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

7. 设 x,y,z 都是整数,且 11 整除 $7x+2y-5z$,求证:11 整除 $3x-7y+12z$.

8. 计算:$(8x^2-2x+x^4-11)\div(x+1)$.

9. 已知 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$,求证:$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2$.

10. 证明 $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

1.4 反证法

命题是对思维对象有所断定的一种思维形式. 它是用文字或符号表达判断的语句. 所谓的思维

对象就是人所思考的一切对象，也即客观存在着的事物和现象.有所断定是指对思维对象的性质、关系等的肯定或否定.

数学中的定义、公理、定理等，凡是用于表达判断的句子，都称为数学命题.

每个命题都是由题设、结论两部分组成.题设是已知事项；结论是由已知事项推出的事项.命题常写成“如果……，那么……”的形式.具有这种形式的命题中，用“如果”开始的部分是题设，用“那么”开始的部分是结论.

由题设一定能推出结论的命题叫做真命题，由题设不能得出结论的命题叫做假命题.

在两个命题中，如果第一个命题的条件（或题设）是第二个命题的结论，且第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题；如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定，这样的两个命题叫做互否命题.把其中一个命题叫做原命题，另一个就叫做原命题的否命题.

一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，这样的两个命题叫做互为逆否命题.把其中一个命题叫做原命题，另一个就叫做原命题的逆否命题.

4 种命题的关系：原命题为真，它的逆命题不一定为真；否命题不一定为真；逆否命题一定为真.

用反证法证题一般分为 3 个步骤：

1. 反设：假定所要证的结论不成立，而设结论的反面（否定命题）成立；（否定结论）

2. 归谬：将“反设”作为条件，由此出发经过正确的推理，导出矛盾——与已知条件、已知的公理、定义、定理及明显的事实矛盾或自相矛盾；（推导矛盾）

3. 结论：因为推理正确，所以产生矛盾的原因在于“反设”的谬误.既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.（结论成立）

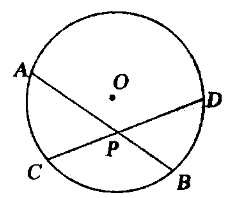
例 1　判断下列命题的真假：若 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 则 $x^2\neq y^2$.

解：因为原命题的逆否命题为“$x^2=y^2$ 则 $x=y$ 且 $x=-y$”，

其实质是“若 $x^2=y^2$，则 $x=y=0$”，显然它是假命题.

所以原命题为假命题.

例 2　用反证法证明：圆的两条不是直径的相交弦不能互相平分.



已知：如图，在⊙O 中，弦 AB、CD 交于 P，且 AB、CD 不是直径.

求证：弦 AB、CD 不被 P 平分.

分析：假设弦 AB、CD 被 P 平分，连结 OP 后，可推出 AB、CD 都与 OP 垂直，则出现矛盾.

证明：假设弦 AB、CD 被 P 平分，由于 P 点一定不是圆心 O，连结 OP，根据垂径定理的推论，有 $OP\perp AB$，$OP\perp CD$，即过点 P 有两条直线与 OP 都垂直，

这与垂线性质矛盾.

所以弦 AB、CD 不被 P 平分.

●习题 1.4

1. 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题：

(1) 负数的平方是正数；

(2) 正方形的 4 条边相等.

2. 填空：

(1)命题“末位是 0 的整数，可以被 5 整除”的逆命题是“________________________________”；

(2)命题“线段的垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等”的否命题是“________________________________”；

(3)命题“等式两边都乘以同一个数，所得结果仍是等式”的逆否命题是“________________________________”；

(4)命题“到圆心的距离不等于半径的直线不是圆的切线”的逆否命题是“________________________________”.

3. 判断下列说法是否正确：

(1)一个命题的逆命题为真，它的逆否命题不一定为真；(　　)

(2)一个命题的否命题为真，它的逆命题一定为真.(　　)

4. 命题“若 $x=y$ 则 $|x|=|y|$”写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它的真假.

5. 设 $a+b+c>0, ab+bc+ca>0, abc>0$，求证：$a>0, b>0, c>0$.

6. 求证：形如 $4n+2$ 的自然数不可能表示成两个自然数的平方差.

7. 如果 $p^3+q^3=2$，求证：$p+q\leqslant 2$.

8. 若 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\geqslant m(a_i>0, i=1,2,3,\cdots,n)$，求证：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中至少存在一个 $a_i\geqslant\frac{m}{n}$.

1.5　数学归纳法

由特殊事例得出一般结论的归纳推理方法称为归纳法. 根据推理过程中考察的对象是涉及事物的一部分还是全部，分为不完全归纳法和完全归纳法.

不完全归纳法是根据事物的部分(而不是全部)特例得出一般结论的推理方法；完全归纳法是一种研究了事物的所有(有限种)特殊情况后得出一般结论的推理方法，又叫做枚举法. 与不完全归纳法不同，用完全归纳法得出的结论是可靠的. 通常在事物包括的特殊情况不多时，采用完全归纳法.

如果我们设想：先证明当 n 取第一个值 n_0(例如 $n_0=1$)时命题成立，然后假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^+, k\geqslant n_0)$时命题成立，并证明当 $n=k+1$ 时命题也成立，那么就证明这个命题成立. 因为证明了这一点，就可以断定这个命题对于 n 取第一个值后面的所有正整数也都成立，这种证明方法叫做数学归纳法.

用数学归纳发证明一个与正整数有关得命题的步骤是：

(1)证明当 n 取第一个值 n_0(例如 $n_0=1$ 或 2 等)时结论成立；〔这叫归纳的基础，或递推的基础〕

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^+, k\geqslant n_0)$时命题成立〔这叫归纳假设，或叫递推的根据〕，证明当 $n=k+1$时命题也成立.

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确.

数学归纳法中，第(1)步是递推的基础，第(2)步是递推的根据，两者缺一不可.