高等数学

下册

工科数学西南协作组重庆片区编

重庆大学出版社

高等数学

下册

工科数学西南协作组重庆片区　编

内 容 简 介

本书是根据《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》，为适应高等学校专科层次发展的需要而编写的。本书不过分追求理论的论证和复杂的运算，着重强调基本概念、基本方法及其应用，以切合大专学生的实际状况。全书分上、下两册。下册内容为：向量代数和空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、无穷级数和近似计算。

本书可作为高等学校专科学生的教材，也可供其他专科层次的学生使用。

高等数学

下册

工科数学西南协作组重庆片区　编

责任编辑　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆通信学院印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：8.[illegible]　字数：235千

[illegible]94年10月第1版　1994年[illegible]次印刷

印数：1—10000

ISBN 7-[illegible]24-[illegible]·99　定价：4.96元

(川)新登字020号

目　录

第七章　向量代数和空间解析几何

向量代数和空间解析几何是学习多元函数微积分学的必备基础，也是学习其他数学分支以及力学、电学等自然科学的重要工具。本章介绍向量概念及其代数运算，并以向量为工具，在空间直角坐标系下讨论一些常用的空间几何图形及其性质。

第一节　空间直角坐标系

一、基本概念

为了用代数方法讨论平面上的几何图形，在初等数学中建立了平面直角坐标系。同样，为了用代数方法讨论空间的几何图形及向量的运算，必须建立空间直角坐标系。

设有交于同一点 o 的三条互相垂直的数轴 ox、oy、oz，三条轴的正向构成右手系 —— 即用右手握住 z 轴，拇指与其余四指垂直，当拇指指向 z 轴正向时，其余四个手指的方向正好是从 x 轴正向经过 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向（图 7-1），并且，在每个轴上以 o 为原点规定相同的长度单位。这样的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系。交点 o 称为坐标原点（或原点）。x 轴、y 轴和 z 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴（或立轴）。三条轴中任两条所决定的平面称为坐标面，分别称为 xoy 面、yoz 面和 zox 面。三个坐标面将整个空间分为八个部分，每个部分称卦限，包含三条坐标轴正向的部分称为第一卦限，在 xoy 面上方，按上述右手系，依四个手指的旋转方向，顺次经过的卦限，分别称为第二、三、四卦限，在 xoy 面下方，与以上四个卦限相对应

的卦限分别称为第五、六、七、八卦限，八个卦限通常用罗马数字表示，记为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ(图 7－2)。

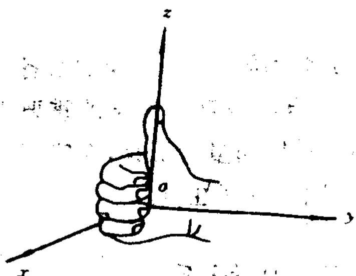

图 7-1

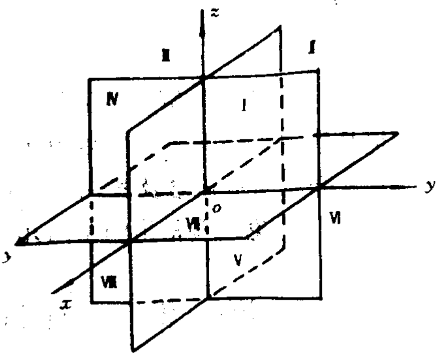

图 7-2

二、点与坐标的对应关系

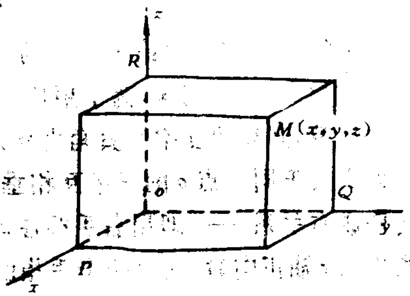

图 7-3

在初等数学中，通过平面直角坐标建立了平面上的点与有序数组(x,y)之间的一一对应关系。同样，通过空间直角坐标系，将建立空间的点与有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系。

设 M 为空间一点，过 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，分别与 x 轴、y 轴、z 轴交于 P、Q、R 三点，这三点在轴上的坐标分别为 x、y、z，于是点 M 就确定了唯一的有序数组(x,y,z)。反之，给定有序数组(x,y,z)，在三条轴上分别取坐标为 x,y,z 的点 P、Q、R，过这三点再分别作垂直于该轴的平面，它们必然交于点 M，所以有序数组(x,y,z)就确定了唯一的点 M(图 7-3)。这样，空间的点和有序数

组(x,y,z)之间建立了一一对应关系。因此可以用这个数组来表示点M的位置。称有序数组(x,y,z)为**点M的坐标**,并将点M表示为$M(x,y,z)$。

习 题 7-1

1. 写出空间八个卦限内的点的坐标的符号(例如第一卦限:Ⅰ(+,+,+))。

2. 写出具有以下位置特征的点的坐标

(1) 在z轴上;(2) 在yoz坐标面上;(3) 在过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$而平行于xoy面的平面上。

3. 写出点(1,2,3)关于(1)zox面、(2)z轴、(3)原点的对称点的坐标。

4. 过点(1,2,3)作与三个坐标轴垂直的平面,与坐标面围成一个长方体。写出这个长方体各顶点的坐标。

第二节 向量的概念及其坐标

一、向量的概念

在中学物理学中曾经遇到过两种物理量,一种是**数量**(或**标量**),即只有大小的量,例如时间、温度等。另一种就是**向量**(或**矢量**),即既有大小又有方向的量,例如力、速度等。在图形中,通常用一条带有箭头的线段来表示向量,线段的长度表示向量的大小,箭头的指向表示向量的方向。如果箭头的起点为A,终点为B,则把这个向量记为$\overrightarrow{AB}$,或者用一个粗体小写英文字母表示,例如$\mathbf{a}$(图7-4)。特别地,以原点为起点的向量称为**向径**,通常用$\mathbf{r}$表示。

在许多实际问题中,所讨论的向量常常与起点无关,即向量在空间是可以任意平移的,这种向量称为**自由向量**。本书后面讨论的向量如果不加说明,则都是自由向量。例如可以将向量的起点移到原点成为向径,使问题的讨论变得简单。

大小相等且方向相同的两个向量被认为是相等的向量。向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，这时其中一个向量通过平移可以与另一个向量完全重合，因此，可以把相等的向量看成是同一个向量。

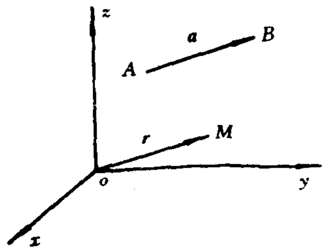

图 7-4

向量的大小称为向量的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。模等于 1 的向量称为单位向量。向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$，其方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同。模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$。零向量的方向可以看成是任意的。

将两个向量的起点平移到同一点后，它们的正向之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为两向量的夹角。向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 记为 $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$。当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称两向量垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时，称两向量平行，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。

二、向量的坐标表达式

为了在空间直角坐标系下用坐标来讨论向量及其运算，首先要给出向量的坐标表达式。为此，先介绍向量在轴上的投影。

设有一条 u 轴及空间一点 M，过点 M 作 u 轴的垂直平面，与 u 轴交于点 P，称点 P 是点 M 在 u 轴上的投影。

设有向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，其起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别是点 P_1 和 P_2，它们在 u 轴上的坐标分别是 u_1 和 u_2。那么，终点投影与起点投影的坐标之差 u_2-u_1 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影（图 7-5），记为 a_u（或 $(\overrightarrow{AB})_u$），即

$$a_u=u_2-u_1 \tag{1}$$

可见，向量在轴上的投影是一个数。显然，向量的平移不改变它在轴上的投影。

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴正向的夹角为 θ，过起点 A 作 u 轴的平行线，它与过终点 B 而垂直于 u 轴的平面交于 B_1，则当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时(图 7-5a)，

$$a_u=u_2-u_1=AB_1=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

(AB_1 表示该线段的长)；而当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时(图 7-5b)，

$$a_u=u_2-u_1=-(u_1-u_2)=-AB_1=-|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

综上可得向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影 a_u 的公式为

$$a_u=|\boldsymbol{a}|\cos\theta \qquad (2)$$

(其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴正向的夹角)。

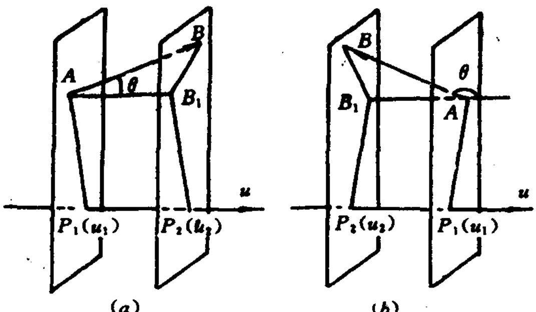

图 7-5

设在空间直角坐标系下有向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，其起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$。过点 A 和点 B 分别作垂直于三条坐标轴的平面，如图 7-6 所示。由公式(1)，$\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影分别是

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1$$

称它们是**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，并将 $\boldsymbol{a}$ 记为

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\} \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\} \qquad (3)$$

向量的这种形式称为**向量的坐标表达式**。

如果把向量与它平移后的向量看成是同一个向量，那么将向

量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 平移成向径$\overrightarrow{OM}$，因为向量的平移不改变它在轴上的投影，所以$\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$，其终点 M 的坐标必为(a_x,a_y,a_z)。反之，根据点和坐标的一一对应关系，数组(a_x,a_y,a_z) 唯一确定了点 M，也就是唯一确定了向径$\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$，即决定了向量 $\boldsymbol{a}$。因此可得，一个向量是由它在三条坐标轴上的投影（即向量的坐标）所唯一确定的。

例如，根据向量的坐标表达式，起点为 $A(1,2,3)$，终点为 $B(2,-1,5)$ 的向量$\overrightarrow{AB}$，可表示为$\overrightarrow{AB}=\{2-1,-1-2,5-3\}=\{1,-3,2\}$。

不难看出，两个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 相等的充分必要条件是，它们的对应坐标都相等，即 $a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$。而一个向量为零向量就是它的三个坐标全为零，即 $\boldsymbol{0}=\{0,0,0\}$。

三、向量的模和方向余弦

如图 7-6 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 就是线段 AB 的长，它是图中长方体的对角线，由初等数学知识，长方体的对角线的平方等于其长、宽、高三度的平方和，即有

$$|\boldsymbol{a}|^2=AP^2+AQ^2+AR^2,$$

又由 $AP^2=P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2=a_x^2$，同理，$AQ^2=(y_2-y_1)^2=a_y^2$，$AR^2=(z_2-z_1)^2=a_z^2$，因此得到向量的模的坐标表达式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{4}$$

由此还可得到空间两个点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 d 的公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{5}$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别记为 α、β、γ，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。由投影公式(2) 知

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma。$$

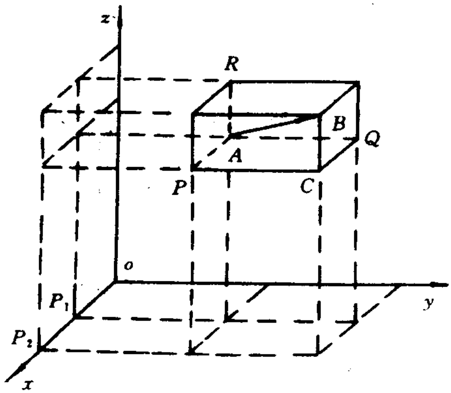

图 7-6

再由模的公式(4)即得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表达式

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

显然,向量的三个方向余弦满足以下关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{7}$$

例 1 设有点 $A(1,0,3)$,$B(2,\sqrt{2},2)$ 写出向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表达式,并求$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角。

解 $\overrightarrow{AB} = \{2-1, \sqrt{2}-0, 2-3\} = \{1, \sqrt{2}, -1\}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\quad \beta = \frac{\pi}{4},\quad \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

例 2 在 z 轴上求一点 P，使它到点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等。

解 因为点 P 在 z 轴上，故设 $P(0,0,z)$，由 $PA=PB$ 和公式(5)得

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$，故所求得的点是 $P(0,0,\frac{14}{9})$。

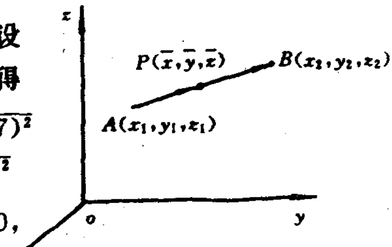

图 7-7

例 3 求点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $B(x_2,y_2,z_2)$ 的连线 AB 的中点坐标。

解 设线段 AB 的中点为 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则向量 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 大小相等且方向相同，故 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$(图 7-7)。故

$$\overrightarrow{AP}=\{\bar{x}-x_1,\bar{y}-y_1,\bar{z}-z_1\},\quad \overrightarrow{PB}=\{x_2-\bar{x},y_2-\bar{y},z_2-\bar{z}\}$$

得 $\bar{x}-x_1=x_2-\bar{x},\bar{y}-y_1=y_2-\bar{y},\bar{z}-z_1=z_2-\bar{z}$，故解得中点坐标为

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2},\quad \bar{z}=\frac{z_1+z_2}{2}。$$

习 题 7-2

1. 已知点 $A(1,\sqrt{2},3)$ 和点 $B(2,2\sqrt{2},4)$，写出向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式，并求其模、方向余弦和方向角。

2. 已知 $|a|=3$，它与 u 轴正向的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，求 a 在 u 轴上的投影 a_u。

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点为 $B(2,-1,7)$，它在三个坐标轴上的投影分别是 4、-4、7，求起点 A 的坐标。

4. 已知向径的模为 3，方向角 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$，求另一个方向角 γ 及该向径的

坐标表达式。

5. 在 yoz 面上求与点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点。

6. 证明以点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形，并求斜边上的中点坐标。

第三节　向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加减法和向量与数的乘法。

一、向量的加减法

设有向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$。以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形（图 7-8a），记另一顶点为 C，则对角线 OC 所表示的向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。向量的这种加法称为平行四边形法则。

由于 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，如果将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点（图 7-8b），那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所表示的向量 $\overrightarrow{OC}$ 仍然是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。向量的这种加法称为三角形法则。

由图 7-8 和图 7-9 不难看出，向量的加法满足以下运算规律

1° 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

2° 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。

以下讨论两向量之和的坐标表达式。为此，先介绍向量的和在轴上的投影。设有两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及 u 轴，不妨设 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，并设 $\boldsymbol{a}$ 的起点和终点以及 $\boldsymbol{b}$ 的终点在 u 轴上的投影分别是点 P_1、P_2、P_3，它们的坐标分别是 u_1、u_2、u_3。根据上一节向量在轴上的投影公式(1)知，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 u 轴上的投影为

$$a_u=u_2-u_1,\quad b_u=u_3-u_2,\quad (a+b)_u=u_3-u_1$$

于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 u 轴上的投影

$$(a+b)_u=u_3-u_1=(u_3-u_2)+(u_2-u_1)=b_u+a_u$$

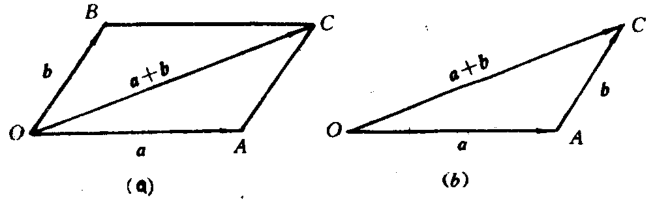

图 7-8

即 $(a+b)_x = a_x + b_x$ (1)

也就是说，两向量之和在轴上的投影等于两向量在轴上投影之和。对于有限个向量的和，结论也是成立的。例如

$$(a+b+c)_x = a_x + b_x + c_x$$

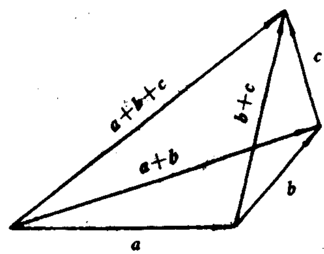

图 7-9

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$。由于向量的坐标就是它在三条坐标轴上的投影，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{(a+b)_x, (a+b)_y, (a+b)_z\}$，再由上述向量之和的投影公式(1) 有

$$(a+b)_x = a_x + b_x, (a+b)_y = a_y + b_y, (a+b)_z = a_z + b_z$$

于是得到两向量之和的坐标表达式

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} \qquad (2)$$

这就是说，两向量相加，只须将它们的对应坐标相加。

与向量 $\boldsymbol{b}$ 大小相等但方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量。记为 $-\boldsymbol{b}$。由于 $\boldsymbol{b}$ 和 $-\boldsymbol{b}$ 的起点和终点恰好调换，因此它们在轴上的投影也恰好反号，于是有 $-\boldsymbol{b} = \{-b_x, -b_y, -b_z\}$。

一般规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，并记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。则由公式(2) 有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\} \qquad (3)$$

这就是说，两向量相减，只须将它们的对应坐标相减。