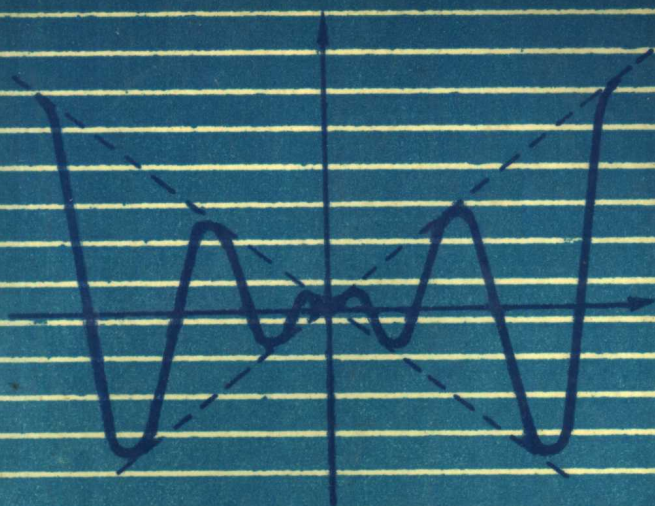




# 高等数学

下 册

工科数学西南协作组重庆片区编

重庆大学出版社

# 高等数学

下 册

工科数学教材编写组重庆分校 编

## 内 容 简 介

本书是根据《高等工业专科学校高等数学课程教学基本要求》，为适应高等学校专科层次发展的需要而编写的。本书不过分追求理论的论证和复杂的运算，着重强调基本概念、基本方法及其应用，以切合大专学生的实际状况。全书分上、下两册。下册内容为：向量代数和空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、无穷级数和近似计算。

本书可作为高等学校专科学生的教材，也可供其他专科层次的学生使用。

## 高等数学

### 下册

工科数学西南协作组重庆片区 编

责任编辑 刘茂林

\*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

· 开本：850×1168 1/32 印张：8.12 字数：235 千

· 94年10月第1版 1994年10月第1次印刷

印数：1—10000

ISBN 7-5624-0220-6 定价：4.96 元

川新登字020号

# 目 录

|                                       |       |
|---------------------------------------|-------|
| 第七章 向量代数和空间解析几何.....                  | (303) |
| 第一节 空间直角坐标系.....                      | (303) |
| 一、基本概念 二、点与坐标的对应关系 习题 7-1             |       |
| 第二节 向量的概念及其坐标.....                    | (305) |
| 一、向量的概念 二、向量的坐标表达式 三、向量的模和方向余弦 习题 7-2 |       |
| 第三节 向量的线性运算.....                      | (311) |
| 一、向量的加减法 二、向量与数的乘法 三、向量的分向量表达式 习题 7-3 |       |
| 第四节 两向量的乘积.....                       | (316) |
| 一、两向量的数量积 二、两向量的向量积 习题 7-4            |       |
| 第五节 平面与直线.....                        | (322) |
| 一、平面 二、直线 三、平面、直线的位置关系 习题 7-5         |       |
| 第六节 曲面.....                           | (334) |
| 一、旋转曲面 二、二次柱面 三、常见的二次曲面 习题 7-6        |       |
| 第七节 曲线.....                           | (341) |
| 一、曲线方程 二、曲线在坐标面上的投影 习题 7-7            |       |
| 第八章 多元函数微分法及其应用.....                  | (347) |
| 第一节 多元函数的概念 二元函数的极限与连续.....           | (347) |
| 一、多元函数的概念 二、二元函数的极限与连续 习题 8-1         |       |
| 第二节 偏导数.....                          | (356) |
| 一、偏导数的定义及求法 二、高阶偏导数 习题 8-2            |       |
| 第三节 全微分.....                          | (366) |
| 习题 8-3                                |       |
| 第四节 多元复合函数的求导法则.....                  | (366) |

习题 8-4

第五节 隐函数的求导公式..... (374)

习题 8-5

第六节 偏导数的几何应用..... (378)

一、空间曲线的切线与法平面 二、曲面的切平面与法线 习题 8-6

\* 第七节 方向导数与梯度..... (383)

一、方向导数 二、梯度 习题 8-7

第八节 多元函数的极值及其求法..... (387)

一、多元函数的极值 二、最大值与最小值 三、条件极值、拉格朗日乘数法 习题 8-8

第九章 重积分及其应用..... (397)

第一节 二重积分的概念..... (397)

一、两个实例 二、二重积分的定义 三、二重积分存在的条件和几何意义

第二节 二重积分的性质及其计算..... (400)

一、二重积分的性质 二、二重积分的计算 习题 9-2

第三节 二重积分的应用..... (414)

一、平面薄片的重心 二、平面薄片的转动惯量 习题 9-3

第四节 三重积分..... (421)

一、三重积分的概念 二、三重积分的计算 习题 9-4

第十章 曲线积分与曲面积分..... (436)

第一节 对坐标的曲线积分..... (436)

一、对坐标的曲线积分的概念 二、对坐标的曲线积分的性质 三、对坐标的曲线积分的计算 习题 10-1

第二节 格林公式及其应用..... (445)

一、格林公式 二、平面上曲线积分与路径无关的条件 三、二元函数的全微分求积 习题 10-2

\* 第三节 对坐标的曲面积分..... (456)

一、对坐标的曲面积分的概念 二、对坐标的曲面积分的计算

习题 10-3

\* 第四节 关于曲线积分和曲面积分的补充…………… (464)

一、对弧长的曲线积分 二、对面积的曲面积分 习题 10-4

第十一章 无穷级数…………… (473)

第一节 常数项级数的概念与性质…………… (473)

一、常数项级数的概念 二、级数收敛的必要条件 三、级数的基本性质 习题 11-1

第二节 常数项级数的审敛法…………… (481)

一、正项级数的审敛法 二、交错级数及其审敛法 三、绝对收敛与条件收敛 习题 11-2

第三节 幂级数及其收敛区间…………… (493)

一、幂级数的概念 二、幂级数的收敛半径和收敛区间 三、幂级数的性质 习题 11-3

第四节 函数展开成幂级数…………… (500)

一、泰勒级数 二、函数展开成幂级数的方法 习题 11-4

\* 第五节 傅立叶级数…………… (510)

一、三角级数 三角函数系的正交性 二、函数展开成傅立叶级数 三、函数展开成正弦级数与余弦级数 四、以  $2l$  为周期的函数的傅立叶级数 习题 11-5

第十二章 近似计算…………… (527)

第一节 函数值和函数增量的近似计算…………… (527)

一、误差的概念 二、利用微分计算函数值及函数的增量 三、利用幂级数计算函数值 习题 12-1

第二节 定积分的近似计算…………… (538)

一、矩形法 二、抛物线法 三、利用幂级数计算定积分 习题 12-2

第三节 方程的近似解…………… (548)

一、二分法 二、切线法 习题 12-3

第四节 一阶微分方程的近似解法…………… (553)

习题 12-4

•  
\* 第五节 最小二乘法..... (557)

习题 12-5

习题答案..... (564)

## 第七章 向量代数和空间解析几何

向量代数和空间解析几何是学习多元函数微积分学的必备基础,也是学习其他数学分支以及力学、电学等自然科学的重要工具。本章介绍向量概念及其代数运算,并以向量为工具,在空间直角坐标系下讨论一些常用的空间几何图形及其性质。

### 第一节 空间直角坐标系

#### 一、基本概念

为了用代数方法讨论平面上的几何图形,在初等数学中建立了平面直角坐标系。同样,为了用代数方法讨论空间的几何图形及向量的运算,必须建立空间直角坐标系。

设有交于同一点  $O$  的三条互相垂直的数轴  $ox$ 、 $oy$ 、 $oz$ , 三条轴的正向构成右手系——即用右手握住  $z$  轴,拇指与其余四指垂直,当拇指指向  $z$  轴正向时,其余四个手指的方向正好是从  $x$  轴正向经过  $\frac{\pi}{2}$  角度转向  $y$  轴正向(图 7-1),并且,在每个轴上以  $O$  为原点规定相同的长度单位。这样的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系。交点  $O$  称为坐标原点(或原点),  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴分别称为横轴、纵轴和竖轴(或立轴)。三条轴中任两条所决定的平面称为坐标面,分别称为  $xoy$  面、 $yoz$  面和  $zox$  面。三个坐标面将整个空间分为八个部分,每个部分称卦限,包含三条坐标轴正向的部分称为第一卦限,在  $xoy$  面上方,按上述右手系,依四个手指的旋转方向,顺次经过的卦限,分别称为第二、三、四卦限,在  $xoy$  面下方,与以上四个卦限相对应



的卦限分别称为第五、六、七、八卦限，八个卦限通常用罗马数字表示，记为 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII (图 7-2)。

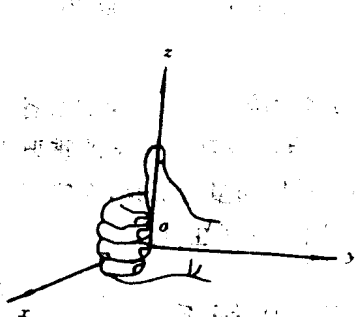


图 7-1

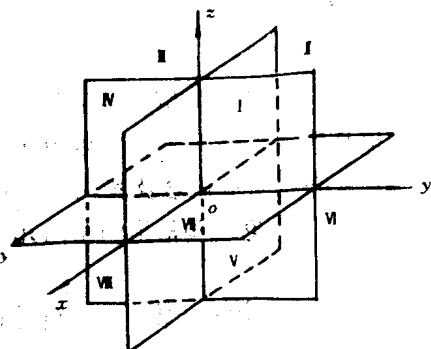


图 7-2

## 二、点与坐标的对应关系

在初等数学中，通过平面直角坐标系建立了平面上的点与有序数组  $(x, y)$  之间的一一对应关系。同样，通过空间直角坐标系，将建立空间的点与有序数组  $(x, y, z)$  之间的一一对应关系。

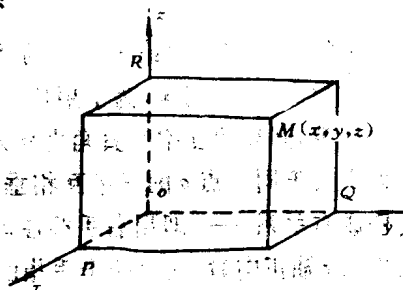


图 7-3

设  $M$  为空间一点，过  $M$  分别作垂直于三条坐标轴的平面，分别与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴交于  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点，这三点在轴上的坐标分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，于是点  $M$  就确定了唯一的有序数组  $(x, y, z)$ 。反之，给定有序数组  $(x, y, z)$ ，在三条轴上分别取坐标为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，过这三点再分别作垂直于该轴的平面，它们必然交于点  $M$ ，所以有序数组  $(x, y, z)$  就确定了唯一的点  $M$  (图 7-3)。这样，空间的点和有序数

组 $(x, y, z)$ 之间建立了一一对应关系。因此可以用这个数组来表示点 $M$ 的位置。称有序数组 $(x, y, z)$ 为点 $M$ 的坐标,并将点 $M$ 表示为 $M(x, y, z)$ 。

## 习 题 7-1

1. 写出空间八个卦限内的点的坐标的符号(例如第一卦限:  $I(+, +, +)$ )。
2. 写出具有以下位置特征的点的坐标
  - (1) 在 $z$ 轴上;
  - (2) 在 $yoz$ 坐标面上;
  - (3) 在过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 而平行于 $xoy$ 面的平面上。
3. 写出点 $(1, 2, 3)$ 关于(1) $zox$ 面、(2) $z$ 轴、(3)原点的对称点的坐标。
4. 过点 $(1, 2, 3)$ 作与三个坐标轴垂直的平面,与坐标面围成一个长方体。写出这个长方体各顶点的坐标。

## 第二节 向量的概念及其坐标

### 一、向量的概念

在中学物理学中曾经遇到过两种物理量,一种是数量(或标量),即只有大小的量,例如时间、温度等。另一种就是向量(或矢量),即既有大小又有方向的量,例如力、速度等。在图形中,通常用一条带有箭头的线段来表示向量,线段的长度表示向量的大小,箭头的指向表示向量的方向。如果箭头的起点为 $A$ ,终点为 $B$ ,则把这个向量记为 $\overrightarrow{AB}$ ,或者用一个粗体小写英文字母表示,例如 $\mathbf{a}$ (图7-4)。特别地,以原点为起点的向量称为向径,通常用 $\mathbf{r}$ 表示。

在许多实际问题中,所讨论的向量常常与起点无关,即向量在空间是可以任意平移的,这种向量称为自由向量。本书后面讨论的向量如果不加说明,则都是自由向量。例如可以将向量的起点移到原点成为向径,使问题的讨论变得简单。

大小相等且方向相同的两个向量被认为是相等的向量。向量  $\mathbf{a}$  和向量  $\mathbf{b}$  相等, 记为  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , 这时其中一个向量通过平移可以与另一个向量完全重合, 因此, 可以把相等的向量看成是同一个向量。

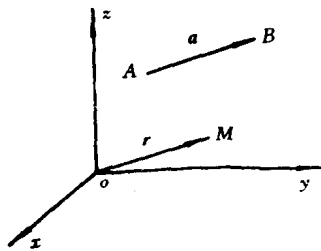


图 7-4

向量的大小称为向量的模, 记为  $|\mathbf{a}|$  或  $|\overrightarrow{AB}|$ . 模等于 1 的向量称为单位向量。向量  $\mathbf{a}$  的单位向量记为  $\mathbf{a}^0$ , 其方向与  $\mathbf{a}$  相同。模

等于零的向量称为零向量, 记为  $\mathbf{0}$ . 零向量的方向可以看成是任意的。

将两个向量的起点平移到同一点后, 它们的正向之间的夹角  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$  称为两向量的夹角。向量  $\mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$  记为  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 称两向量垂直, 记为  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ; 当  $\theta = 0$  或  $\theta = \pi$  时, 称两向量平行, 记为  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

## 二、向量的坐标表达式

为了在空间直角坐标系下用坐标来讨论向量及其运算, 首先要给出向量的坐标表达式。为此, 先介绍向量在轴上的投影。

设有一条  $u$  轴及空间一点  $M$ , 过点  $M$  作  $u$  轴的垂直平面, 与  $u$  轴交于点  $P$ , 称点  $P$  是点  $M$  在  $u$  轴上的投影。

设有向量  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ , 其起点  $A$  和终点  $B$  在  $u$  轴上的投影分别是点  $P_1$  和  $P_2$ , 它们在  $u$  轴上的坐标分别是  $u_1$  和  $u_2$ . 那么, 终点投影与起点投影的坐标之差  $u_2 - u_1$  称为向量  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴上的投影 (图 7-5), 记为  $a_u$  (或  $(\overrightarrow{AB})_u$ ), 即

$$a_u = u_2 - u_1 \quad (1)$$

可见,向量在轴上的投影是一个数。显然,向量的平移不改变它在轴上的投影。

设向量  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  与  $u$  轴正向的夹角为  $\theta$ , 过起点  $A$  作  $u$  轴的平行线, 它与过终点  $B$  而垂直于  $u$  轴的平面交于  $B_1$ , 则当  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  时 (图 7-5a),

$$a_u = u_2 - u_1 = AB_1 = |\mathbf{a}| \cos \theta$$

( $AB_1$  表示该线段的长); 而当  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  时 (图 7-5b),

$$a_u = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) = -AB_1 = -|\mathbf{a}| \cos \theta$$

综上所述可得向量  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴上的投影  $a_u$  的公式为

$$a_u = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad (2)$$

(其中  $\theta$  为  $\mathbf{a}$  与  $u$  轴正向的夹角)。

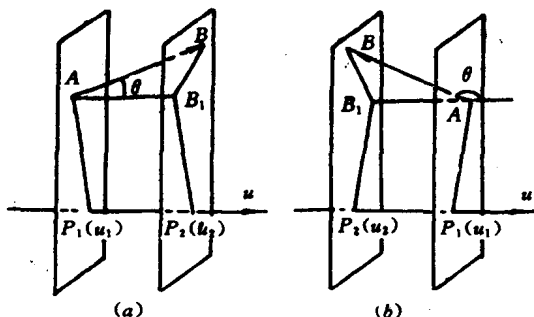


图 7-5

设在空间直角坐标系下有向量  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ , 其起点为  $A(x_1, y_1, z_1)$ , 终点为  $B(x_2, y_2, z_2)$ . 过点  $A$  和点  $B$  分别作垂直于三条坐标轴的平面, 如图 7-6 所示。由公式 (1),  $\mathbf{a}$  在三条坐标轴上的投影分别是

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1$$

称它们是向量  $\mathbf{a}$  的坐标, 并将  $\mathbf{a}$  记为

$$\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \quad \text{或} \quad \mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (3)$$

向量的这种形式称为向量的坐标表达式。

如果把向量与它平移后的向量看成是同一个向量, 那么将向

量  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  平移成向径  $\overrightarrow{OM}$ , 因为向量的平移不改变它在轴上的投影, 所以  $\overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , 其终点  $M$  的坐标必为  $(a_x, a_y, a_z)$ 。反之, 根据点和坐标的一一对应关系, 数组  $(a_x, a_y, a_z)$  唯一确定了点  $M$ , 也就是唯一确定了向径  $\overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , 即决定了向量  $\mathbf{a}$ 。因此可得, 一个向量是由它在三条坐标轴上的投影 (即向量的坐标) 所唯一确定的。

例如, 根据向量的坐标表达式, 起点为  $A(1, 2, 3)$ , 终点为  $B(2, -1, 5)$  的向量  $\overrightarrow{AB}$ , 可表示为  $\overrightarrow{AB} = \{2-1, -1-2, 5-3\} = \{1, -3, 2\}$ 。

不难看出, 两个向量  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$  相等的充分必要条件是, 它们的对应坐标都相等, 即  $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$ 。而一个向量为零向量就是它的三个坐标全为零, 即  $\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$ 。

### 三、向量的模和方向余弦

如图 7-6 所示, 向量  $\mathbf{a}$  的模  $|\mathbf{a}|$  就是线段  $AB$  的长, 它是图中长方体的对角线, 由初等数学知识, 长方体的对角线的平方等于其长、宽、高三度的平方和, 即有

$$|\mathbf{a}|^2 = AP^2 + AQ^2 + AR^2,$$

又由  $AP^2 = P_1P_1^2 = (x_2 - x_1)^2 = a_x^2$ , 同理,  $AQ^2 = (y_2 - y_1)^2 = a_y^2$ ,  $AR^2 = (z_2 - z_1)^2 = a_z^2$ , 因此得到向量的模的坐标表达式

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (4)$$

由此还可得到空间两个点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$  之间的距离  $d$  的公式

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5)$$

非零向量  $\mathbf{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正向的夹角分别记为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 称为向量  $\mathbf{a}$  的方向角, 方向角的余弦  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  称为向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦。由投影公式 (2) 知

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos\beta, \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos\gamma.$$

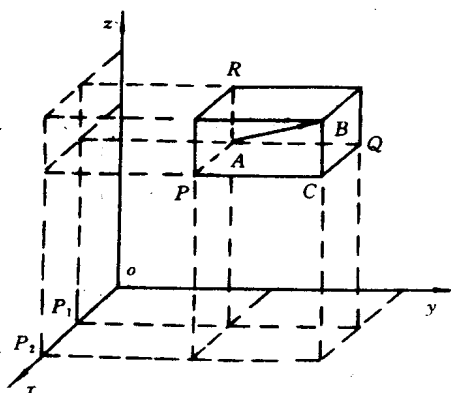


图 7-6

再由模的公式(4)即得向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦的坐标表达式

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

显然,向量的三个方向余弦满足以下关系

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (7)$$

例 1 设有点  $A(1, 0, 3)$ ,  $B(2, \sqrt{2}, 2)$  写出向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标表达式,并求  $\overrightarrow{AB}$  的模、方向余弦和方向角。

解  $\overrightarrow{AB} = \{2 - 1, \sqrt{2} - 0, 2 - 3\} = \{1, \sqrt{2}, -1\}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

**例2** 在 $z$ 轴上求一点 $P$ ,使它到点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等。

**解** 因为点 $P$ 在 $z$ 轴上,故设 $P(0, 0, z)$ ,由 $PA = PB$ 和公式(5)得

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$ ,故所求得的点是 $P(0, 0, \frac{14}{9})$ 。

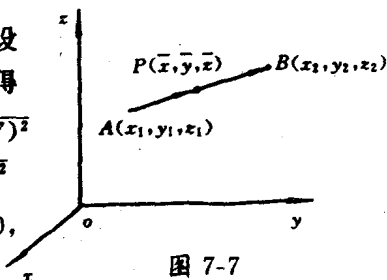


图 7-7

**例3** 求点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的连线 $AB$ 的中点坐标。

**解** 设线段 $AB$ 的中点为 $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,则向量 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 大小相等且方向相同,故 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ (图 7-7)。故

$$\overrightarrow{AP} = \{\bar{x} - x_1, \bar{y} - y_1, \bar{z} - z_1\}, \quad \overrightarrow{PB} = \{x_2 - \bar{x}, y_2 - \bar{y}, z_2 - \bar{z}\}$$

得 $\bar{x} - x_1 = x_2 - \bar{x}, \bar{y} - y_1 = y_2 - \bar{y}, \bar{z} - z_1 = z_2 - \bar{z}$ ,故解得中点坐标为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

## 习 题 7-2

1. 已知点 $A(1, \sqrt{2}, 3)$ 和点 $B(2, 2\sqrt{2}, 4)$ ,写出向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式,并求其模、方向余弦和方向角。

2. 已知 $|\mathbf{a}| = 3$ ,它与 $z$ 轴正向的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ,求 $\mathbf{a}$ 在 $x$ 轴上的投影 $a_x$ 。

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点为 $B(2, -1, 7)$ ,它在三个坐标轴上的投影分别是4、-4、7,求起点 $A$ 的坐标。

4. 已知向径的模为3,方向角 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ ,求另一个方向角 $\gamma$ 及该向径的

坐标表达式。

5. 在  $yoz$  面上求与点  $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  等距离的点。

6. 证明以点  $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$  和  $C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形, 并求斜边上的中点坐标。

### 第三节 向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加减法和向量与数的乘法。

#### 一、向量的加减法

设有向量  $\mathbf{a} = \vec{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{OB}$ , 以  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$  为邻边作平行四边形(图 7-8a), 记另一顶点为  $C$ , 则对角线  $OC$  所表示的向量  $\vec{OC}$  称为向量  $\mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{b}$  的和, 记为  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。向量的这种加法称为平行四边形法则。

由于  $\vec{AC} = \vec{OB} = \mathbf{b}$ , 如果将  $\mathbf{b}$  的起点移到  $\mathbf{a}$  的终点(图 7-8b), 那么从  $\mathbf{a}$  的起点到  $\mathbf{b}$  的终点所表示的向量  $\vec{OC}$  仍然是  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 。向量的这种加法称为三角形法则。

由图 7-8 和图 7-9 不难看出, 向量的加法满足以下运算规律

1° 交换律  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;

2° 结合律  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 。

以下讨论两向量之和的坐标表达式。为此, 先介绍向量的和在轴上的投影。设有两向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  及  $u$  轴, 不妨设  $\mathbf{b}$  的起点与  $\mathbf{a}$  的终点重合, 并设  $\mathbf{a}$  的起点和终点以及  $\mathbf{b}$  的终点在  $u$  轴上的投影分别是点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ , 它们的坐标分别是  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 。根据上一节向量在轴上的投影公式(1)知,  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  在  $u$  轴上的投影为

$$a_u = u_2 - u_1, \quad b_u = u_3 - u_2, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})_u = u_3 - u_1$$

于是  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  在  $u$  轴上的投影

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_u = u_3 - u_1 = (u_3 - u_2) + (u_2 - u_1) = b_u + a_u$$



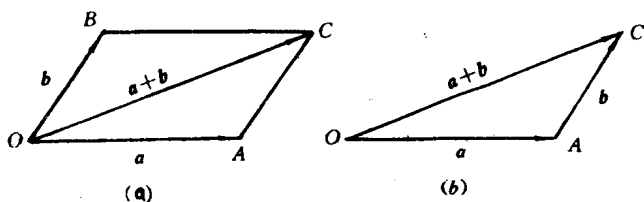


图 7-8

即  $(a+b)_x = a_x + b_x$  (1)

也就是说,两向量之和在轴上的投影等于两向量在轴上投影之和。对于有限个向量的和,结论也是成立的。例如

$$(a+b+c)_x = a_x + b_x + c_x$$

设向量  $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $b = \{b_x, b_y, b_z\}$ 。由于向量的坐标就是它在三条坐标轴上的投影,故  $a+b = \{(a+b)_x, (a+b)_y, (a+b)_z\}$ ,再由上述向量之和的投影公式(1)有

$$(a+b)_x = a_x + b_x, (a+b)_y = a_y + b_y, (a+b)_z = a_z + b_z$$

于是得到两向量之和的坐标表达式

$$a+b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} \quad (2)$$

这就是说,两向量相加,只须将它们对应坐标相加。

与向量  $b$  大小相等但方向相反的向量,称为  $b$  的负向量。记为  $-b$ 。由于  $b$  和  $-b$  的起点和终点恰好调换,因此它们在轴上的投影也恰好反号,于是有  $-b = \{-b_x, -b_y, -b_z\}$ 。

一般规定向量  $a$  与向量  $b$  的差为  $a+(-b)$ ,并记为  $a-b$ 。则由公式(2)有

$$a-b = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\} \quad (3)$$

这就是说,两向量相减,只须将它们对应坐标相减。

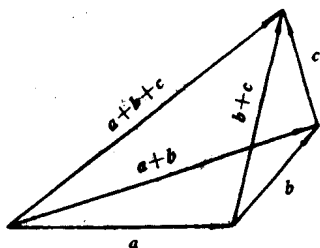


图 7-9