

教育部人才培养模式改革
和开放教育试点教材

微积分的 思想和方法

WEIJIFEN DE
SIXIANG HE FANGFA

主编 张顺燕

中央广播电视大学出版社

ISBN 7-304-02067-9



9 787304 020675 >

定价: 25.00 元

微积分的思想和方法

主编 张顺燕

中央广播电视大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分的思想和方法/张顺燕主编. - 北京: 中央广播电视大学出版社, 2001.7

ISBN 7-304-02067-9

I. 微... II. 张... III. 微积分 - 教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 049591 号

版权所有, 翻印必究。

微积分的思想和方法

主 编 张顺燕

出版·发行: 中央广播电视大学出版社

电话: 发行部: 010-68519502 总编室: 010-68182524

网址: <http://www.crtvup.com.cn>

地址: 北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编: 100039

经销: 新华书店北京发行所

策划编辑: 何勇军

印刷: 北京市振宏福利印刷厂 印数: 109501~120500

版本: 2001 年 7 月第 1 版 2003 年 12 月第 7 次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 18.75 字数: 327 千字

书号: ISBN 7-304-02067-9/O·110

定价: 25.00 元

(如有缺页或倒装, 本社负责退换)

微积分的思想和方法

扬起你心灵的风帆

驶入微积分的智慧世界

本书将

启发你的好奇心

点燃你胸中的求知愿望

赋予你一双数学家的眼睛

丰富你观察世界的方式

开发你睿智的头脑

协助你抓住微积分活的灵魂

满怀信心地在新世纪为祖国工作

主要内容

《微积分的思想和方法》是一本介绍微积分最基本内容的教材。它以微积分的基本思想和方法为主线，讨论了微积分创立的主要起源、数学准备、基本工具和基本方法。

本书的主要内容包括前言、绪论、初等数学知识、函数、极限、导数、微分、不定积分、定积分、微积分简史、微分方程。

一、前 言

●微积分是人类智慧最伟大的成就之一。微积分将教会您在运动与变化中把握世界，它具有将复杂问题归纳为简单规律和算法的能力，是现代文明人的基本素养之一。

正如恩格斯所说：“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和惟一的功绩，那正是在这里”。

●微积分基本上是由牛顿、莱布尼茨发现的。微积分分为微分学与积分学两大部分。微积分基本定理将两大部分结合在一起，成为一个整体。

●微积分的创立主要起源于四类问题：

1. 已知物体运动的路程和时间，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，若已知物体运动的加速度和时间，求物体在任意时刻的速度，或已知物体的运动速度和时间，求物体的运动路程。这些问题来自力学。

2. 求曲线在任一点处的切线。这是一个纯几何的问题，但对于科学应用却具有重大意义。

3. 求函数的最大、最小值问题。

4. 求积问题。求曲线的弧长，曲线所围成的面积，曲面所围成的体积，物体的重心等。

●数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。

●函数概念是描述运动基本的工具。有了函数概念后，运动就数量化了，从而成为数学的研究对象。不同的运动将借助不同的函数来描述。最基本的函数就是初等函数，它们构成微积分最

基本的工具。

● 微积分最基本的概念是导数和定积分，而这两个概念是借助极限来定义的，因而极限论构成了微积分的基石。

● 本书的逻辑结构：绪论→初等数学知识→函数→极限→导数→微分→不定积分→定积分→微积分简史→微分方程。

● 编写方法：本书将遵循认识的基本规律，并参照微积分的发展史，使读者易于接受。我们努力遵循的主要原则是：

1. 阿基米德方法：正式的定义来自对实际问题的考察。

2. 笛卡尔方法论：

(1) 不接受任何不能由理性确定为真实的东西；

(2) 分析困难问题到足够求解的小单位；

(3) 从最简单、最易懂的对象开始，依照先后次序，一步一步到达更为复杂的对象；

(4) 确认可以纳入这个体系的任何事物。

3. 编写三原则：课程的每一主题都采用从具体到抽象、数与形相结合以及参考概念与方法的实际发展史。在具体内容上，我们将保持与中学数学的衔接，并将尽量做到仔细。

致 读 者

● 要想一页一页地、毫不费力气地通过学习本书而精通这一学科，可能遭到失败。必须不断反复地钻研基本概念与基本方法，才能从更高的观点得到更深刻的理解。

● 当你开始学习微积分时检查一下自己在数学上的准备够不够，在思想上应当做好哪些准备。并要注意中学数学与大学数学的区别和联系：

(1) 实现从常量数学到变量数学的转变；

(2) 实现从直观描述到严格推论的转变；

(3) 建立强烈的符号意识。

● 越是基本的越重要，越是基本的越难学；因为它处于基础的地位，无处不出现，无处不起作用。

● 一本数学教科书包括三部分：(1) 定义系统；(2) 定理系统；(3) 理论应用。习题的目的在于使学生会将理论应用于实际

问题。这是帮助学生掌握理论与培养学生独立工作能力必不可少的环节。

● 证明的作用

证明在任何一个数学理论中都占有中心的地位。通过证明,数学才被组织成一个完美的体系,因而正确地理解和使用证明是学好数学的关键因素之一。学习定理的证明可以使人对定理的含义理解得更深入,对定理在理论体系中的地位有更明确的认识。如何学好定理?世界著名数学家、数学教育家 G·波利亚说:“如果你必须证明一个定理,不要仓促行动。首先应该完全了解定理讲的内容,设法看清楚它是什么意思。然后检验定理,看它是否有错误。检验它的结果,为了使你认清它的正确性,用尽可能多的特例加以验证。”但是过分强调证明的作用也会带来一些负面影响,它使我们忘记定理的历史起源,使我们只看到问题应该怎样回答,而不再理会问题是如何提出的与为何而提出的。补救的办法是学点发展史,并辅以直觉。

● 定理的结构

大多数定理取下面两种形式中的一种:若 A 则 B; A 当且仅当 B。后一种形式是由两个定理组成的,即“若 A 则 B”和“若 B 则 A”。要证明“若 A 则 B”,我们通常用下述三种方法之一:

- (1) 直接方法:假定 A 为真,去推导 B 真;
- (2) 间接证明:若非 B,则非 A;
- (3) 反证法。

● 数学直觉

数学直觉是数学证明的源泉之一,因而直觉应该占有适当的地位。没有直觉,初学者在理解数学时便无从入手,他们不可能学会热爱它,他们看到的只是定义与定理;没有直觉,他们永远不会有应用数学的能力。我们需要具有一种一览遥远目标的本领,直觉就是这种本领。逻辑给我们以可靠性,它是证明的工具,而直觉才是发明的工具。

● 怎样解题

做习题是理解概念与掌握方法的必由之路,又是考试的中心手段,不可不予关注。波利亚列了一张“怎样解题”表,现附后,供大家参阅。

● 数学习题主要有两种:计算题与证明题。

计算题的主要部分是：已知条件与数据，求未知数；

证明题的主要部分是：证明或推翻定理的结论。

● 读者对象

本书是为一切数学爱好者编写的。它从最基本、最实际的例子出发，从具体的思维过程来展示微积分的精华。对于已具有数学基础的读者，本书能激发他们更多的思考；对于数学基础薄弱的读者，本书是一本入门教材，浅显易懂。

● 教学媒体

本书配有 VCD 教学光盘。

“怎样解题”表

弄清问题

第一
你必须弄清楚问题

未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？未知数和条件是否充分？或者是多余的？或者是矛盾的？

画张图，引进适当的符号，把条件的各个部分分开。你能否把它们写下来？

拟定计划

第二
找出已知数与未知数之间的联系。如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？

为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。

你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你应该最终得出一个求解的计划。

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

实现你的求解计划，检验每一步骤。

第三

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

实行你的计划。

回顾

你能否检验这个结论？你能否用别的方法导出这个结果？

你能不能一下子看出它来？

你能不能把这结果或方法用于其它的问题？

第四

验算所得到的解。

编者：张顺燕（前言、绪论、微积分简史、各部分引言和小结的作者、本书主编）、朱晓鸽（导数、微分、不定积分、定积分和微分方程的编者）、张旭红（初等数学知识、函数和极限的编者）。

致谢：感谢数学学科专家刘来福教授、李毓佩教授，感谢远程教育专家和数学专家孙天正教授，在他们的关心和支持下，使本书能以全新思维和全新观点来编写，力求达到普及微积分思想，提高国民素质的目的；感谢中央广播电视大学师范部主任张瑞麟、闫平和教务处处长李林曙、教材建设办公室主任赵莉，由于他们的鼎力协助使本书顺利交付；感谢中央广播电视大学出版社的有关人员，由于他们夜以继日的工作，使本书能按时出版。我们由衷地感谢所有参与本书工作的同仁，敬佩他们充满活力的工作与奉献精神。

二、绪 论

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门学科。由于实际的需要，数学在古代就产生了，现在已发展成一个分支众多的庞大系统。数学与其他科学一样，反映了客观世界的规律，并成为理解自然、改造自然的有力武器。

对任何一门科学的理解，单有这门科学的具体知识是不够的，即使你对这门知识掌握得足够丰富，还需要对这门学科的整体有正确的观点，需要了解这门学科的本质。本节的目的就是给出关于数学本质的一般概念。

1. 数学是什么

给数学下定义是一个困难的问题。对任何事物下定义都遇到同样的困难。因为很难在一个定义中把事物的一切重要属性都概括进去。考虑全面性与历史发展，我们给数学下两个定义。

数学是数和形的学问。数学是一棵参天大树。它的根深深地扎在我们的现实世界中。它有两个主干，一曰形—几何，一曰数—代数。

这棵树是如此之古老，它已有上万年的历史；

这棵树是如此之长新，它年年都在发新枝；

这棵树是如此之繁茂，它已深入到自然科学与社会科学的一切领域；

这棵树是如此之奇特，它同根异干，同干异枝，同枝异叶，同叶异花，同花异果。如果我们一辈子只停留在一个枝上，或只见一朵花，我们将永远见不到数学的多彩和多姿；见不到数学整体的宏伟和谐调。

我们先看数学大树的两大主干：几何与代数。

几何：空间形式的科学，视觉思维占主导，培养直觉能力，培养洞察力；

代数：数量关系的科学，有序思维占主导，培养逻辑推理能力。

记住，认不清几何与代数的基本特征，就是基本上没有学懂它们。特别要注意到，这两者相辅相成。没有直觉就没有发明，没有逻辑就没有证明。借助直觉发明的命题，要借助逻辑加以证明。庞加莱说：“逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不遇到任何障碍，但是它不能告诉我们哪一条路能引导我们达到目的地。为此必须从远处瞭望目标，而数学教导我们，瞭望的本领是直觉。”英国数学家阿蒂亚说：“几何直觉乃是增进数学理解力的很有效的途径，而且它可以使人增加勇气，提高修养。”遗憾的是，在通常的数学教学中只讲逻辑而很少讲直觉。

如果只研究数与形，那是静态的，属于常量数学的范围。只研究数与形是不够的，必须研究大小与形状是如何改变的。这就产生了微积分。它的延伸是：无穷级数，微分方程，微分几何等。

那么，什么是数学呢？19世纪恩格斯给数学下了这样的定义：

“数学是关于空间形式和数量关系的科学。”

恩格斯关于数学的定义是经典的，概括了当时数学的发展，即使在目前也概括了数学的绝大部分。但是在19世纪末，数理逻辑诞生了。在数理逻辑中既没有数也没有形，很难归入上面的定义。于是人们又考虑数学的新定义。

数学是关于模式和秩序的科学。我们生活在一个由诸多模式组成的世界中。春有花开，夏有惊雷，秋收冬藏，一年四季往复循环。世界上没有两片完全相同的雪花，但所有的雪花都是六角形的。人类的心智和文化为模式的识别、分类和利用建立了一套规范化的思想体系，我们称它为数学。通过数学建立模式可以使知识条理化，并揭示自然界的奥秘。

模式和秩序的科学都是数学吗？物理学，力学似乎也符合这个定义，所以需要作出某些界定。

物理学的基本元素：基本粒子。

生物学的基本元素：细胞。

数学呢？数，形状，机会，算法与变化。

数学的处理对象分成三组：数据，测量，观察资料；推断，演绎，证明；自然现象，人类行为，社会系统的各种模式。

数学提供了有特色的思考方式：

抽象化：选出为许多不同的现象所共有的性质来进行专门研究。

符号化：把自然语言扩充，深化，而变为紧凑、简明的符号语言。这是自然科学公有的思考方式，以数学为最。

公理化：从前提，从数据，从图形，从不完全和不一致的原始资料进行推理。归纳与演绎并用。

最优化：考察所有的可能性，从中寻求最优解。

建立模型：对现实现象进行分析。从中找出数量关系，并化为数学问题。

应用这些思考方式的经验构成数学能力。这是当今信息时代越来越重要的一种智力。它使人们能批判地阅读，辨别谬误，摆脱偏见，估计风险。数学能使我们更好地了解我们生活于其中的充满信息的世界。

2. 数学的内容

大致说来，数学分为初等数学与高等数学两大部分。

初等数学中主要包含两部分：几何学与代数学。几何学是研究空间形式的学科，而代数学则是研究数量关系的学科。

初等数学基本上是常量的数学。

高等数学含有非常丰富的内容，以大学本科所学为限，它主要包含：

解析几何：用代数方法研究几何，其中平面解析几何部分内容已放到中学。

线性代数：研究如何解线性方程组及有关的问题。

高等代数：研究方程式的求根问题。

微积分：研究变速运动及曲边形的求积问题。作为微积分的延伸，物理类各系还要讲授常微分方程与偏微分方程。

概率论与数理统计：研究随机现象，依据数据进行推理。

所有这些学科构成高等数学的基础部分，在此基础上建立了高等数学的宏伟大厦。

3. 数学的特点

数学区分于其它学科的明显特点有三个：第一是它的抽象性，第二是它的精确性，第三是它的应用的极端广泛性。

从中学数学的学习过程中读者已经体会到数学的抽象性了。数本身就是一个抽象概念，几何中的直线也是一个抽象概念，全

部数学的概念都具有这一特征。整数的概念，几何图形的概念都属于最原始的数学概念。在原始概念的基础上又形成有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、 n 维空间以至无穷维空间这样一些抽象程度更高的概念。但是需要指出，所有这些抽象度更高的概念，都有非常现实的背景。不过，抽象不是数学独有的特性，任何一门科学都具有这一特性。因此，单是数学概念的抽象性还不足以说尽数学抽象的特点。数学抽象的特点在于：第一，在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其它一切；第二，数学的抽象是一级一级逐步提高的，它们所达到的抽象程度大大超过了其它学科中的一般抽象；第三，数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中。如果自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验，那么数学家证明定理只需用推理和计算。这就是说，不仅数学的概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的。

数学的精确性表现在数学定义的准确性、推理的逻辑严格性和数学结论的确定无疑与无可争辩性。这点读者从中学数学就已经懂得了。当然，数学的严格性不是绝对的，一成不变的，而是相对的，发展着的，这正体现了人类认识逐渐深化的过程。

数学应用的极其广泛性也是它的特点之一。正像已故著名数学家华罗庚教授曾指出的，宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在，凡是出现“量”的地方就少不了用数学，研究量的关系，量的变化，量的变化关系，量的关系的变化等现象都少不了数学。数学之为用贯穿到一切科学部门的深处，而成为它们的得力助手与工具，缺少了它就不能准确地刻画出客观事物的变化，更不能由已知数据推出其它数据，因而就减少了科学预见的可能性，或减弱了科学预见的精确度。

4. 数学对人类文明的贡献

数学对人类文明有怎样的贡献？这是一个带有根本性质的问题，是一个从事数学教育与数学研究的人应当回答的问题。人类认识的发展基于经验的积累和理性的思维。单靠经验的积累，有时像在黑暗中摸索，不可能有认识上的重大突破。在经验积累的基础上，经过理性的思维才能产生伟大的飞跃。下面举几个对人

类文明具有重大影响的例子。

万有引力定律 基于开普勒行星运动的三大定律，牛顿发现了万有引力定律。这是人类对宇宙认识的一次伟大革命。牛顿把他最重要的著作命名为“自然哲学的数学原理”，是因为他发现新宇宙的思维方式是数学的思维方式。

相对论 爱因斯坦的相对论是宇宙观的另一次伟大革命，其核心内容是时空观的改变。牛顿力学的时空观认为时间与空间不相干。爱因斯坦的时空观却认为时间和空间是相互联系的。促使爱因斯坦作出这一伟大贡献的仍是数学的思维方式。

海王星的发现 这个太阳系的最远的行星之一，是在1846年在数学计算的基础上发现的。天文学家阿达姆斯和勒未累分析了天王星的运动的不规律性，得出结论：这种不规律性是由其他行星的引力而发生的。勒未累根据力学法则和引力法则计算出这个行星应该位于何处，他把这个结果告诉了观察员，而观察员果然在望远镜中在勒未累指出的位置看到了这颗行星。这个发现是数学计算的胜利。

另一个著名的例子是电磁波的发现。英国物理学家麦克斯韦概括了由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为“方程的形式”，他用纯粹数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播着。根据这个，他提出了光的电磁理论，这个理论后来被全面地发展和论证了。除此之外，麦克斯韦的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波。例如，由振动发电所发射的电磁波。这样的电磁波果然为赫芝所发现。而不久之后，波波夫就找到了电磁振荡的激发、发送和接受的办法，并把这些办法带到许多应用部门，为无线电技术奠定下基础。现在已进入信息时代，无线电技术对于人类生活是何等重要人人都已体会到。但是我们可不要忘记，纯粹数学在这里曾起过巨大作用。

另一个光辉的例子是非欧几何的诞生。它是从欧几里得时代起的几千年来从人们想要证明平行公理的企图，也就是说，从一个只有纯粹数学趣味的问题中产生的。罗巴切夫斯基创立了这门新的几何学，他自己谨慎地称之为“想象的”，因为他还不能指出它的现实意义，虽然他相信会找到这种现实意义的。他的几何的大多数结论对大多数人来说，非但不是“想象的”，而且简直是