

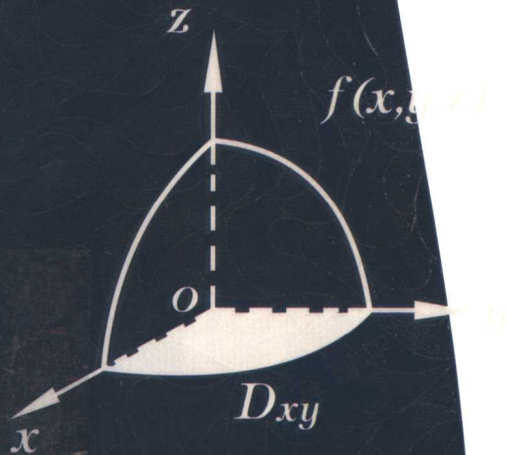
高等数学 (上册)

GAODENG SHUXUE

第二版

何瑞文 胡 成 | 编
杨 宁 周海东

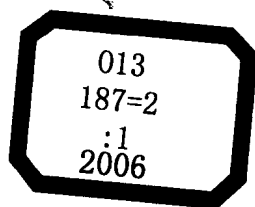
涂汉生 | 主审



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$



西南交通大学出版社
<http://press.swjtu.edu.cn>



高等数学

(第二版)

(上册)

何瑞文 胡 成 编

杨 宁 周海东

涂汉生 主审

西南交通大学出版社

• 成都 •

内 容 提 要

本书是结合近年来的教学实践,并根据《高等数学课程教学基本要求》编写而成的。

全书分上、下两册。本册为上册,内容包括函数的极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,三维空间中的向量、平面与直线。书末附有积分表和习题答案。

本书可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/何瑞文等编. —2版. —成都:西南交通大学出版社, 2006.9
ISBN 7-81104-409-9

I. 高... II. 何... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第089790号

高 等 数 学

(第二版)

(上册)

何瑞文 胡 成 编
杨 宁 周海东

★

责任编辑 刘婷婷
封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段111号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

★

成品尺寸: 170 mm × 230 mm 总印张: 37
总字数: 661千字 总印数: 10 001—13 000册
2006年9月第2版 2006年9月第4次印刷
ISBN 7-81104-409-9
套价: 49.80元

图书如有印装问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

再版前言

根据本书几年的使用情况和教学内容的需要以及与其他相关教材使用的协调,本书作了一些修订。

此次修订在内容上把空间解析几何与向量代数的内容重新纳入教材中,作为第六章(空间曲面与曲线置于第八章第一节中),原来的第五、六章合为第五章。同时对符号等一些不妥之处进行了订正。新增的第六章由周海东老师执笔。

在此对西南交通大学数学系和西南交通大学出版社的支持以及提出大量宝贵意见和建议的老师表示衷心感谢。

编 者

2006.8 于西南交大

前 言

此书是结合近年来的教学实践,并根据《高等数学课程教学基本要求》编写而成的。

全书分为上、下两册。上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用;下册内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。空间解析几何与向量代数的内容则纳入到《线性代数与空间解析几何》教材中。

本书适用学时(课内)为 170 学时左右,分两学期安排,周学时为 5。本书可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有:何瑞文(第一、二、三章)、胡成(第四、五、六、十一章)、杨宁(第七、八章)、周海东(第九、十章),并由涂汉生主审。

在本书编写过程中,得到西南交通大学应用数学系(特别是高等数学教研室)和西南交通大学出版社的大力支持与帮助,叶建军、易建华、秦应兵、宋振明、蒲伟、卿铭等老师提出了大量的宝贵意见和建议,在此我们一并表示衷心的感谢。

由于受我们的水平和经验所限,本书不妥之处在所难免,敬请同行专家及广大读者给予批评指正。

编 者

2002.3 于西南交大

目 录

第一章 函数的极限与连续	1
第一节 变量与函数	1
习题 1-1	8
第二节 数列的极限	9
习题 1-2	18
第三节 函数极限的定义	19
习题 1-3	24
第四节 函数极限的性质及运算法则	25
习题 1-4	29
第五节 极限存在准则与两个重要极限	30
习题 1-5	35
第六节 极限论中的几个基本定理	35
第七节 连续函数	38
习题 1-7	43
第八节 等价无穷小与极限的计算	43
习题 1-8	46
第九节 闭区间上连续函数的性质	47
习题 1-9	49
第二章 一元函数微分学	50
第一节 函数的导数	50
习题 2-1	55
第二节 求导法则	56
习题 2-2	62
第三节 高阶导数	63
习题 2-3	66
第四节 复合函数求导法则的应用	66
习题 2-4	72

第五节 函数的微分	73
习题 2-5	77
第三章 中值定理与导数的应用	78
第一节 微分中值定理	78
习题 3-1	82
第二节 洛比达(L'Hospital)法则	83
习题 3-2	88
第三节 泰勒(Taylor)公式	89
习题 3-3	94
第四节 函数的单调性与极值	94
习题 3-4	98
第五节 函数的最大值、最小值问题	99
习题 3-5	101
第六节 函数的凸性	102
习题 3-6	105
第七节 函数图形的描绘	105
习题 3-7	109
第八节 平面曲线的曲率	109
习题 3-8	112
第四章 不定积分	114
第一节 不定积分的概念与性质	114
习题 4-1	121
第二节 不定积分的换元法	121
习题 4-2	131
第三节 分部积分法	132
习题 4-3	137
第四节 几类函数的不定积分	138
习题 4-4	144
第五节 积分表的使用	145
习题 4-5	146

第五章 定积分及其应用	147
第一节 定积分的概念与性质	147
习题 5-1	154
第二节 微积分基本定理	155
习题 5-2	159
第三节 定积分的换元法与分部积分法	160
习题 5-3	166
第四节 广义积分	167
习题 5-4	176
第五节 元素法	177
第六节 定积分的几何应用	179
习题 5-5、6	185
第七节 定积分的物理应用	187
习题 5-7	191
第六章 三维空间中的向量、平面与直线	193
第一节 向量及其线性运算	193
习题 6-1	200
第二节 数量积 向量积 混合积	201
习题 6-2	206
第三节 平面与直线	207
习题 6-3	218
附录 I 几种常用的曲线	221
附录 II 积分表	224
习题答案与提示	235

第一章 函数的极限与连续

微积分是以极限方法为基础,函数作为研究对象的一门数学学科.初等数学主要涉及的是常量,而微积分则是变量.本章主要介绍函数——变量之间的一种依赖关系,以及极限理论初步和函数的连续性.

第一节 变量与函数

一、变 量

当我们观察各种自然现象或在研究某运动过程的时候,我们常常会遇到许多的量.这些量一般可分为两种:一种是在某过程中不变化的量,这种量称为常量;还有一种是会起变化的量,称为变量.例如,自由落体的下降时间和下降距离是变量,而落体的质量在此过程中可以看做常量.在理论上,我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某过程中这些量在数值上的关系,但对具体问题而言仍需注意其实际意义,例如时间、距离、质量等.

由于时间、压力、温度等,都可以用实数来表示,所以称它们为实变量或实常量(也简称变量和常量).故在本课程中,如无特别声明,数都是指的实数,实数以及绝对值概念可以说是该课程的基石.下面我们对它们进行一些归纳.

(1) 每一个实数和数轴上的一个点存在一一对应关系.我们称这个性质为实数的连续性.

(2) 有理数在实数中是稠密的,也就是说,在任何两个不同的实数之间必存在着有理数.同样无理数也是稠密的,在任何两个不同的实数之间也必存在着无理数.

(3) 有理数的和、差、积、商仍为有理数.有理数与无理数的和、差、积、商为无理数(零不参与积、商的运算).无理数的和、差、积、商可能为无理数,也可能为有理数.

关于绝对值的一些性质:

(1) a, b 是任意两个实数,数 $(a-b)$ 的绝对值 $|a-b|$ 表示点 a 与 b 之间的距离,即 $|a-b| \geq 0$, 只有当 $a=b$ 时等号成立,且 $|a-b| = |b-a|$;

$$(2) |a| \geq \pm a, |a| = |-a|;$$

$$(3) |ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$(4) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

$$(5) |a+b| \leq |a| + |b|, ||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

在观察各种运动过程中,我们发现,有些变量具有一定的变化范围,例如人的体重、寿命等. 变量的变化范围,也就是变量的取值范围,它们是实数集合 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的子集,最常见的是自然数集合 $\mathbf{N}$ 及区间、邻域. 定义如下:

$a, b \in \mathbf{R}, a < b$, 那么:

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 称为以 a, b 为端点的闭区间.

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间.

类似可定义:

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\},$$

$$(-\infty, a) = \{x | x < a\}.$$

称 $(a-\delta, a+\delta) = \{x | |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 为点 a 的 δ 邻域,有时也记为 $U(a, \delta)$.

特别地,在 $U(a, \delta)$ 中去掉点 a 时, $U(a, \delta) \setminus \{a\} = U(a, \delta)$ 称为点 a 的去心邻域. 显然

$$U(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}.$$

二、函 数

定义 1-1-1 设有两个非空实数集 X 与 Y , 如果存在一个对应规则 f , 对于 X 中的每一个数 x , 按照规则 f 在 Y 中存在惟一的数 y 与 x 对应, 那么称 f 是定义在 X 上, 取值在 Y 内的函数.

X 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$; 与 x 对应的实数 y , 记为 $y = f(x)$, 数集 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 叫做函数的值域, 记作 $Z(f)$. 显然有 $Z(f) \subseteq Y$.

习惯上, x 称为自变量, y 称为因变量, 与 x 的特定值 x_0 相对应的数 $y_0 = f(x)|_{x=x_0} = f(x_0)$ 叫做函数 f 在 x_0 处的函数值.

由函数定义可以看出, 函数是由定义域与对应规则所确定的. 因此, 对于两个函数来说, 当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时, 它们才表示同一个函数.

例如 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2}$ 与 $g(x) = 1$ 表示同一个函数 (即 $f(x) = g(x)$). 此外与

自变量及因变量用什么字母表示无关, 例如函数 $y = f(x)$ 也可以用 $u = f(v)$ 表示.

函数的表示法:

(1) 公式法: 对应规则通过公式给出.

例如 $f(x)=x^2+1; g(x)=x^2, x \in [0, +\infty)$.

(2) 图像法: 对应规则通过图像给出. 例如, 气象台为了掌握某地的气温变化, 使用自动记录仪将每天的气温记录下来, 自变量是时间, 因变量是气温, 对应规则是图像(图 1-1).

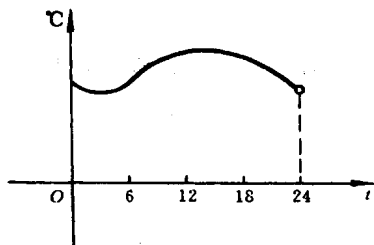


图 1-1

(3) 表格法: 对应规则通过表格给出.

例如某个班级学生的学号(自变量)与该学号所对应学生在某时的体重(因变量). 对应规则是表格.

(4) 描述法: 对应规则用语句来表达.

例如“ y 是不超过 x 的最大整数部分”, 此函数一般记为 $y=[x]$, 如: $y|_{x=1.2}=[1.2]=1, y|_{x=-1.5}=[-1.5]=-2$.

“当 x 为有理数时, y 取 1; 当 x 为无理数时, y 取 0”, 这是 Dirichlet 函数, 记为

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

理论研究中常用公式法, 就是写出函数的数学表达式和定义域. 需要注意的是, 当函数用公式给出, 而没有给出定义域, 这时我们约定该函数的定义域就是使得公式有意义的一切实数. 例如 $f(x)=\sqrt{x}$, 其定义域就是 $[0, +\infty)$.

另外, 函数在定义域上的表达式有时未必是一个, 例如符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

我们称这类函数为分段函数.

我们知道, 一对有序实数 (x, y) 可以表示直角坐标平面 xOy 上的一个点 P , 记作 $P(x, y)$, 依次称 x, y 为点的横坐标与纵坐标.

设 f 是一个函数, 由 f 得到的下列点 $P(x, y)$ 的集合

$$G(f)=\{(x, y) | x \in D(f), y=f(x)\}$$

称为函数 f 的图像. 通常 f 的图像在 xOy 面上是一条曲线.

三、函数的几种特性

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, $I \subseteq D(f)$, 如果存在正数 M , 使对任意的 $x \in I$, 都满足 $|f(x)| \leq M$, 就称 $f(x)$ 在 I 上有界.

如果这样的 M 不存在, 就称 f 在 I 上无界. 换言之, 若对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总有某个 $x_0 \in I$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 那么称 $f(x)$ 在 I 上无界.

为了以后论述的方便, 我们引入符号 $\forall, \exists$. $\forall x \in I$ 表示对任意的 $x \in I$, 即表示在集合 I 中任意取元素 x ; $\forall x > 0$, 表示 $\forall x \in (0, +\infty)$; $\exists x \in I$, 表示集合 I 中存在元素 x . 为此

(1) $f(x)$ 在 I 上有界可表示为:

若 $\exists M > 0, \forall x \in I$, 满足 $|f(x)| \leq M$.

(2) $f(x)$ 在 I 上无界可表示为:

若 $\forall M > 0, \exists x_0 \in I$, 使得 $|f(x_0)| > M$.

有时我们还用到, $f(x)$ 在 I 上有上界, 即: $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in I$, 有 $f(x) \leq b$.
 $f(x)$ 在 I 上有下界, 即: $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in I$, 有 $a \leq f(x)$.

综上所述, 我们可以得出下列结论:

$f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 I 上既有上界, 也有下界. (请读者完成证明)

下面我们给函数 $f(x)$ 在 I 上有界(无界)一个几何上的解释: 函数在 I 上有界就是在直角坐标平面 xOy 上存在函数 $y_1 = a, y_2 = b$, 使 $f(x)$ 在 I 上的函数值在 $[a, b]$ 内 ($a < b$). 反之, $f(x)$ 在 I 上无界是对于任意给定的函数 $y_1 = a, y_2 = b$ ($a < b$), 总有这样的点 x_0 , 使 $f(x_0)$ 在 $[a, b]$ 外.

例 1-1 判定下列函数的有界性.

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad (2) g(x) = x \sin x.$$

解

$$(1) \text{ 因为 } 1+x^2 \geq 2|x| \geq |x|,$$

$$\text{所以 } \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq 1.$$

即 $\exists M = 1 > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 所以, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

$$(2) \text{ 因为当 } x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时 } (n \in \mathbb{N}), |g(x_n)| = n\pi + \frac{\pi}{2} > n.$$

$\forall M > 0$, 要使 $|g(x_n)| > M$, 只需要 $n > M$ 即可, 故取 $n_0 = [M] + 1 > M$, 则

$$|g(x_0)| > M, \left(x_0 = n_0\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $\forall M > 0, \exists x_0 = ([M] + 1)\pi + \frac{\pi}{2} \in (-\infty, +\infty), |g(x_0)| > M$.

即 $g(x) = x \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $D(f)$, 区间 $I \subseteq D(f)$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$, 就称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加(或单调增); 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 就称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(或单调减). 单调增或单调减的函数统称为单调函数.

奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称(即当 $x \in D(f)$, 必有 $-x \in D(f)$), $\forall x \in D(f)$, 有

$$f(-x) = f(x),$$

就称 $f(x)$ 是偶函数. 如果 $\forall x \in D(f)$, 有

$$f(-x) = -f(x),$$

就称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称. 当奇函数在原点有定义时, 它一定过原点.

周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 如果 $\exists T > 0, \forall x \in D(f)$, 有 $x \pm T \in D(f)$, 并且有

$$f(x+T) = f(x),$$

就称 $f(x)$ 是周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期, 但周期函数未必都有最小正周期. 例如 Dirichlet 函数, 容易验证它是周期函数, 但它没有最小正周期.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 值域为 $Z(f)$, $\forall y \in Z(f)$, 必定有 $x \in D(f)$ 使 $f(x) = y$ 成立. 但是这样的 x 可能不止一个, 当这样的 x 仅有一个时我们对此作一些规定.

定义 1-1-2 $\forall y \in Z(f)$, 在 $D(f)$ 中只有惟一的 $x \in D(f)$ 使 $f(x) = y$, 那么这样的对应规则 $\varphi: \varphi(y) = x$, φ 称为 f 的反函数, 记为

$$\varphi = f^{-1}.$$

由函数 $y = f(x)$ 求它的反函数的步骤是: 由方程 $y = f(x)$ 解出 x , 得到

$x=f^{-1}(y)$, 将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 互换得 $y=f^{-1}(x)$. 在几何上 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称. (注: 把反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 是由于人们习惯用 x 表示自变量, y 表示因变量.)

定理 1-1-1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调, 则 $f(x)$ 在 I 上一定存在反函数.

该定理的逆命题不成立, 即单调仅是存在反函数的充分条件, 而不是必要条件.

例如函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0], \\ x+1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

在 $[-1, 1]$ 上不单调, 但它存在反函数 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

2. 复合函数

复合函数这个概念从运算的角度而言, 它是一种“代入运算”. 例如运动物体的动能与速度的关系是: $E = \frac{1}{2}mv^2$, 而对于自由落体有 $v = gt$, 那么,

$$E = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

定义 1-1-3 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, $u=g(x)$ 的定义域为 $D(g)$, 如果有 $D_1 \subseteq D(g)$, $\forall x \in D_1, u=g(x) \in D(f)$, 则称下式

$$y=f(g(x)), \quad x \in D_1$$

所定义的函数为由函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 构成的复合函数. 这个函数的定义域为 D_1 , $u=g(x)$ 称为中间变量, 通常用 $f \circ g$ 来记这个复合函数

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

例 1-2 设 $y=f(x)=\sin x, x \in [-\pi, \pi]; y=g(x)=\sqrt{x}$, 求 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

解 令 $y=f(u)=\sin u, u=g(x)=\sqrt{x}$,

则 $f(g(x))=\sin \sqrt{x}, \quad x \in [0, \pi^2];$

同理 $g(f(x))=\sqrt{\sin x}, \quad x \in [0, \pi].$

五、函数的运算与初等函数

设函数 $y=f(x), y=g(x), x \in D=D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$, 那么在 D 上我们可定义:

函数的和(差) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad x \in D;$

函数的积 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D;$

函数的商 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D, \text{ 且 } g(x) \neq 0.$

在中学里我们已不同程度地了解了基本初等函数:

1. 幂函数

$$y = x^a \quad (a \text{ 是常数});$$

2. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1);$$

3. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

特别当 $a = e = 2.718\cdots$ 时, 记 $\log_e x = \ln x$.

4. 三角函数

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

5. 反三角函数

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, \cdots$$

我们通常把由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合所得的且可用一个式子表示的函数称为初等函数. 一般来说, 分段函数不是初等函数, 例如 $\operatorname{sgn}(x)$ 不是初等函数. 最后介绍工程技术上常用到的一类初等函数——双曲函数及其反函数.

(1) 双曲正弦

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是单调增的奇函数, 其反函数 $y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 叫反双曲正弦函数.

(2) 双曲余弦

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[1, +\infty)$, 它是偶函数, 并在 $(-\infty, 0]$ 上单调减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增. 其反函数 $y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 叫反双曲余弦函数.

(3) 双曲正切

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-1, 1)$, 它是单调增的奇函数. 其反函数

$$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ 叫反双曲正切函数.}$$

双曲函数有与三角函数类似的公式, 这些公式列在下面, 由读者去证明:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

当读者通过后面的学习知道欧拉 (L. Euler) 公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (i 是虚数单位) 后, 我们有

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

这说明双曲函数与三角函数在某些方面有相似之处.

习 题 1-1

1. 用区间表示下列不等式.

$$(1) |x-1| < 3;$$

$$(2) |x+1| > 2;$$

$$(3) |x-1| \leq |x+1|;$$

$$(4) |x+1| + |x-1| \leq 4.$$

2. 从半径为 R 的圆上剪下一圆心角为 x (弧度) 的扇形, 然后卷成一圆锥形漏斗, 试将漏斗体积 V 表示为 x 的函数.

3. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+1}; \quad (2) y = \sqrt{x^2(x^2-2)};$$

$$(3) y = \frac{1}{[x+1]}.$$

4. 下列各对函数 f 和 g 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x;$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, g(x) = x+2.$$

5. 讨论下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

6. 证明 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

7. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-l, l)$ 上的任意函数. 证明: $\phi(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

8. 利用第 7 题的结论证明: 定义在 $(-l, l)$ 上的任意函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

9. 给定 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 令

$$f_1(x) = -f(x); f_2(x) = f(-x); f_3(x) = -f(-x).$$

说明函数 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图形的位置关系.

10. 求 $y = \sinh x$ 的反函数.

11. 讨论下列函数的有界性.

$$(1) f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 4}; \quad (2) y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}};$$

$$(3) f(n) = n^{(-1)^n}, n \text{ 为自然数}.$$

12. 已知 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)$ 满足

$$f(x-y) = f(x) + y(y-2x+1),$$

且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$.

$$13. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1; \end{cases} \quad g(x) = 2^x,$$

求 $f(g(x))$, $g(f(x))$, 并给出这两个函数的示意图.

14. 设函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^3$, 试写出当 $2 \leq x \leq 3$ 及 $-5 \leq x \leq -4$ 时, $f(x)$ 的表达式.

15. 试证贝努利 (Bernoulli) 不等式: 设 $t > 0$, n 是正整数, 则有

$$(1) (1+t)^n > 1+nt; \quad (2) (1+t)^n > \frac{n(n-1)}{2} t^2.$$

第二节 数列的极限

一、数列极限的概念及定义

本节讨论定义域为自然数集 N , 值域含于实数集 R 的函数. 其函数值可按照自变量的顺序排列为

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$$

因此, 有下列定义:

定义 1-2-1 设 f 是定义于 N 上的一个函数, 其函数值按 $n=1, 2, 3, \dots$