中世鸿图

新题型
奥数题库
一日三练

主编/雷家骅 尹秀华

九年级

内蒙古人民出版社

培养解决实际问题的能力

提高学生对数学的兴趣和爱好

责任编辑: 王世喜
封面设计: 杨 澍

ISBN 7-204-08096-3
9 787204 080960 >

ISBN7-204-08096-3/G · 2015
定价:106.80元(全十册)

新题型
奥数题库
一日三练

主编/雷家骅 尹秀华

九年级

内蒙古人民出版社

奥数题库一日三练

雷家骅　尹秀华　主编

*

内蒙古人民出版社出版发行
（呼和浩特市新城区新华大街祥泰大厦　邮编:010010）
淄博恒业印务有限公司印刷
开本:880×1230　1/32　印张:80　字数:1300千
2006年3月第1版　2006年3月第1次印刷
印数:1—10000册
ISBN 7—204—08096—3/G·2015
定价:106.80元(全十册)

前　言

奥数竞赛是当前中小学开展数学学科素质教育的高层次的学科知识技能竞赛。奥数试题命题思想新颖，思路开阔，内容广泛，重视启迪学生思维，开发学生智力，培养学生的探究、创新和实践能力；奥数题反映了当今深入开展素质教育的要求，试题内容与当今世界先进的数学教学接轨，所提供的各种信息极大地丰富了数学的教学内容，对调动学生学习数学的积极性，推动数学课程改革、深化课堂教学改革，提高数学课堂教学效率和质量都具有积极的意义。

奥数不是每个学生都要参加，但要强调兴趣。关键是学生有了兴趣，即能学好课内知识，在课内基础上学习课外知识。有兴趣，他们自然就不会感到有负担。其次，奥数的原则是强调课内课外的结合与一致，课内是基础，课外是补充；第三，奥数不要让参于活动的学生感到高不可攀，而是让每个参与的学生，不同层次其础的学生，均获得收获和提高。第四，奥数竞赛活动的目的是为学生营造一个环境和氛围，提供处理方法上的指导，使学生在积极参与的基础上，通过典型的、探索性很强的问题的认识有一个“升华”，其必然就是素质的提高。

本书具有以上所述的双重作用和效力，它不仅仅是学生参加奥数的辅导用书，也是平时课堂课本数学内容、知识应用的补充与深化。

本书主编，由培养了众多国际奥林匹克金牌、银牌得主的全国一流奥赛教练联袂特级教师、教练编写，必将为同学们参加奥数竞赛或各种考试起到相当大的辅导作用。

本书编写得到曹秀云老师、雷家骅教授、尹秀华副教授、徐志明特级教师等的热情关怀和精神上的鼓舞，谨向他们致以衷心的感谢。

编　者

Contents

奥数题库

一日三练

第 1 讲 一元二次方程

学法指导

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，首先要注意定义中 $a\neq 0$ 这一条件. 其次要善于应用根的定义解题. 另外还要善于活用判别式和根与系数关系(韦达定理)解题.

对于求解一元二次方程，首先是因式分解法，其次是配方法，然后才是求根公式法.

另外，要学会通过构造一元二次方程解题.

例 1 已知 $x=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，求 $\sqrt{x^3+2x^2-x+8}$ 的值.

【分析与解答】 由题意得 $x=\sqrt{2}-1$，即 $x+1=\sqrt{2}$，

于是有 $(x+1)^2=(\sqrt{2})^2$，

即 $x^2+2x-1=0$.

所以 $\sqrt{x^3+2x^2-x+8}=\sqrt{x(x^2+2x-1)+8}=2\sqrt{2}$.

名题训练 1

1. 解方程 $(x+1)^4+(x+3)^4-272=0$.

2. 解方程 $(x+2)^4+(x-4)^4=272$.

3. 解方程 $(4x+1)(3x+1)(2x+1)(x+1)=3x^4$.

例 2 求满足如下条件的所有 k 值：使关于 x 的方程 $kx^2+(k+1)x+(k-1)=0$ 的根都是整数.

【分析与解答】 先对 k 进行讨论，再讨论根的情况.

分 $k=0$ 与 $k\neq 0$ 的情况讨论.

(1)当 $k=0$ 时, $x-1=0$,有整数根 $x=1$;

(2)当 $k\neq 0$ 时,设两根为 x_1 和 x_2,则有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k}=-1-\dfrac{1}{k} & ① \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{k-1}{k}=1-\dfrac{1}{k} & ② \end{cases}$$

①-②,得

$x_1+x_2-x_1x_2=-2$,

即 $x_1x_2-x_1-x_2+1=3$,

∴ $(x_1-1)(x_2-1)=3=1\times 3$,

∴ $\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1-1=3 \\ x_2-1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1-1=-3 \\ x_2-1=-1 \end{cases}$

∴ $x_1+x_2=6$ 或 $x_1+x_2=-2$,

∴ $-1-\dfrac{1}{k}=6$ 或 $-1-\dfrac{1}{k}=-2$,

解得 $k=-\dfrac{1}{7}$ 或 $k=1$.

又∵ $\Delta=(k+1)^2-4k(k-1)=-3k^2+6k+1$,

∴ 当 $k=-\dfrac{1}{7}$ 和 $k=1$ 时都有 $\Delta>0$,

∴ 满足要求的 k 值为 $k=0$, $k=-\dfrac{1}{7}$, $k=1$.

名题训练 2

1. 解方程 $x^3+\sqrt{3}x^2+(2\sqrt{3}-1)x+3-\sqrt{3}=0$.

2. 已知 $a\geqslant -6$,解关于 x 的方程:

$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$.

3. 解关于 x 的方程:

$x^3+(a-2)x^2-(4a+1)x-a^2+a+2=0\left(a\geqslant -\dfrac{1}{4}\right)$.

例3 若关于 x 的方程 $x^2-2(a-1)x-(b+2)^2=0$ 有两个相等实数根.

(1)求 $a^{2001}+b^3$ 的值;

(2)求作以 a、b 的值为根的一元二次方程.

【分析与解答】 根据根的判别式 $\Delta=0$ 可以确定 a、b 的关系.

(1)因为关于 x 的方程有两个相等的实数根.

$\therefore\ \Delta=[-2(a-1)]^2+4(b+2)^2=0$.

$\because\ (a-1)^2\geqslant 0,(b+2)^2\geqslant 0$,

由题意得 $a-1=0,b+2=0$,

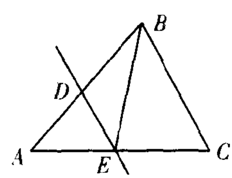
解得 $a=1,b=-2$,

则 $a^{2001}+b^3=1-8=-7$.

(2)因为 a、b 为一元二次方程的两个根,所求方程为 $y^2-(a+b)y+ab=0$,即 $y^2+y-2=0$.

名题训练3

❶ 如图,已知△ABC 和平行于 BC 的直线 DE,且 $S_{\triangle BDE}=k^2$(定值),问当 k^2 与 $S_{\triangle ABC}$ 之间满足什么关系时,存在直线 DE,有几条?



❷ 设 b、c 是整数,当 x 依次取 1、3、6、11 时,小明算得多项式 x^2+bx+c 的值分别为 3、5、21、93. 经验证,只有一个结果是错误的,这个错误的结果是(　　).

A. 当 $x=1$ 时,$x^2+bx+c=3$, B. 当 $x=3$ 时,$x^2+bx+c=5$

C. 当 $x=6$ 时,$x^2+bx+c=21$ D. 当 $x=11$ 时,$x^2+bx+c=93$

❸ 解方程 $x^2-|x|-1=0$.

例4 已知方程 $ax^2+bx+c=x(a>0)$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$. 证明:

(1)$ax^2+(b-1)x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;

(2)当 $0<x<x_1$ 时,$x<ax^2+bx+c<x_1$.

【分析与证明】 (1)由题意知 $x_1\neq x_2$,且有

$$ax_1{}^2+bx_1+c=x_1, \qquad ①$$

$$ax_2{}^2+bx_2+c=x_2, \qquad ②$$

由①减去②得

$(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+(b-1)]=0$,

则有 $b-1=-a(x_1+x_2)$.

由①加上②得

$a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+(b-1)(x_1+x_2)+2c=0$,

即 $a(x_1+x_2)^2-2ax_1x_2+[-a(x_1+x_2)](x_1+x_2)+2c=0$,

得 $c=ax_1x_2$.

所以 $ax^2+(b-1)x+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$

$=a(x-x_1)(x-x_2)$.

即 $ax^2+(b-1)x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

②由①知

$ax^2+(b-1)x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

因为 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$, $0<x<x_1$,

则 $0<x<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$,

所以 $x-x_1<0$, $x-x_2<0$,

于是 $(ax^2+bx+c)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0$,

即 $ax^2+bx+c>x$.

又 $(ax^2+bx+c)-x_1$

$=[ax^2+(b-1)x+c]+x-x_1$

$=a(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)$

$=(x-x_1)[a(x-x_2)+1]$,

且 $x_2<\frac{1}{a},a>0$,

则 $ax_2<1$,

于是 $a(x-x_2)+1>1-ax_2>1-1=0$,

从而 $(ax^2+bx+c)-x_1<0$,

即 $ax^2+bx+c<x_1$.

于是 当 $0<x<x_1$ 时,有 $x<ax^2+bx+c<x_1$.

名题训练 4

1 关于 x 的一元二次方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的一个解是 -1,求 a 的值.

2 解方程 $343x^2-11x-354=0$.

3 方程 $x^2+bx+1=0$ 与方程 $x^2-x-b=0$ 有一个公共实根,求 b 的值.

例 5 解下列方程.

(1) $x^2+5x-2=0$;

(2) $ax^2-(a^2+2a-1)x+a^2-1=0(a\neq 0)$.

【分析与解答】 (1)这是一个很典型的方程,因为方程的左边不便于进行因式分解,故而可以采用公式法或先配方再直接开平方法.

方法一: (公式法) $\Delta=5^2-4\times1\times(-2)=33$,

$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$.

方法二: 由 $x^2+5x-2=0$,

左边配方,得 $x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{33}{4}=0,\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$,

$\therefore \quad x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$,

$\therefore \quad x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$.

(2)表面上看去题目比较复杂，但我们发现方程系数有一些特点：左边可以进行因式分解，因此可以考虑因式分解法.

$[x-(a+1)]\cdot[ax-(a-1)]=0$

由于　$a\neq0$，故　$x_1=a+1, x_2=\frac{a-1}{a}$.

名题训练5

1. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求 $x^4+3x^3-16x^2+3x-17$ 的值.

2. 已知 $x=\frac{3}{\sqrt{5}-2}$，求 $x^4-12x^3-12x^2+36x+38$ 的值.

3. 已知 c 是实数，$x^2-3x+c=0$ 的一个解的相反数是方程 $x^2+3x-c=0$ 的一个解，求方程 $x^2-3x+c=0$ 的解.

例6 已知 m、n 是有理数，方程 $x^2+mx+n=0$ 有一个根是 $\sqrt{5}-2$. 求 $m+n$ 的值.

【分析与解答】 由题意得

$(\sqrt{5}-2)^2+m(\sqrt{5}-2)+n=0$,

即 $(9-2m+n)+(m-4)\sqrt{5}=0$.

因为 m、n 是有理数，而 $\sqrt{5}$ 是无理数，所以必有

$\begin{cases}9-2m+n=0,\\ m-4=0,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}m=4,\\ n=-1\end{cases}$

于是 $m+n=3$.

名题训练 6

❶ 已知 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$，求$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$的值.

❷ 解方程　$x^2+2a|-x|-3a^2=0$.

❸ 已知 $m^2=m+1$，$n^2=n+1$，$m\neq n$，求 m^5+n^5 的值.

例 7 解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

【分析与解答】 这是含绝对值符号的方程，找 $2x-1$ 的零点，加以讨论.

由　$2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.　当 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，$x^2-(2x-1)-4=0$，

即 $x^2-2x-3=0$　$(x-3)(x+1)=0$

∴　$x_1=3$，$x_2=-1$(舍).　当 $x<\frac{1}{2}$时，$x^2+(2x-1)-4=0$，

即 $x^2+2x-5=0$

∴　$x_3=-1-\sqrt{6}$，$x_4=-1+\sqrt{6}$(舍).

∴　原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1-\sqrt{6}$.

名题训练 7

❶ 解关于 x 的方程

$(2a+b)(a-b)x^2-3a^2x-(a+b)(2a-b)=0$.

❷ 已知二次方程

$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$

有根 0 与 1，试求 $a:b:c$.

❸ 设等腰三角形的一腰与底边的长分别是方程 $x^2-6x+a=0$ 的两根，当这样的三角形只有一个时，试求 a 的取值范围.

第2讲 一元二次方程的判别式

学法指导

一元二次方程的根的判别式是一元二次方程的重要内容之一.除了用于讨论方程的根的情况外,它还有其他方面的应用.如不等式、恒等式的证明,求特定参数(或字母)的取值范围,特别是我们常常构造一元二次方程,再从方程的判别式出发,分析评论问题.

例1 设关于 x 的方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的所有根都是比 1 小的正根,求实数 m 的取值范围.

【分析与解答】 此题中关于 x 的方程不一定是二次方程.

当 $m=1$ 时,方程化为 $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$,符合题意.

当 $m=-1$ 时,方程化为 $-2x-1=0$, $x=-\frac{1}{2}$,不符合题意.

当 $m\neq\pm1$ 时,方程的判别式 $\Delta=4m^2+4(1-m^2)=4>0$,

它的两个根为 $x_1=\frac{1}{m+1}$, $x_2=\frac{1}{m-1}$.

依题意,有 $0<\frac{1}{m+1}<1, 0<\frac{1}{m-1}<1$,

解之得 $m>2$.

故,实数 m 的取值范围为 $m=1, m>2$.

名题训练1

❶ 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(a+1)x+1=0$ 恰有一个实根.求 a 的值.

❷ 已知方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 无实数根，求 k 的取值范围.

❸ 已知关于 x 的方程 $x^2-2\sqrt{-ax}+\frac{(a-1)^2}{4}=0$ 有实数根，其中 a 为实数，求 $a^{2003}+x^{2003}$ 的值.

例 2 当 a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根？

【分析与解答】 要使关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根，则必有 $\Delta\geqslant 0$，

即 $4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant 0$，

得 $(a+2b)^2+(a-1)^2\leqslant 0$.

因为 $(a+2b)^2+(a-1)^2\geqslant 0$，

所以 $(a+2b)^2+(a-1)^2=0$，

得 $a=1,b=-\frac{1}{2}$.

名题训练 2

❶ m 为何值时，方程 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ 有两个不相等的实数根.

❷ 已知关于 x、y 方程 $5x^2-3xy+\frac{1}{2}y^2-2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}=0$，求它的实数解.

❸ 已知二次方程 $(b-c)x^2+(a-b)x+c-a=0$ 有相等的两实根，求 a、b、c 之间关系.

例 3 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0 \qquad ①$$

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0 \qquad ②$$

有一个公共根 c，求证：$c^4-4c^3+8c+4>0$.

【分析与证明】 这是研究公共根 c 应满足的关系.注意到两个方程中 a 与 b 是对称的.

将 $x=c$ 代入①与②，可整理成

$$(1-c)a^2+(2+c^2)a-c^2-2c=0 \quad ③$$

$$(1-c)b^2+(2+c^2)b-c^2-2c=0 \quad ④$$

将 $x=1$ 代入方程①，左边$=3(a-1)$.由题设知 $a\neq1$，故 $x=1$ 不是方程①的根，于是 $c\neq1$.又方程①与②的首项系数不相等，可知 $a\neq b$，因而，两个不等实数 a 与 b 是二次方程 $(1-c)y^2+(2+c^2)y-c^2-2c=0$ 的两个不等实根，故，判别式 $\Delta=(2+c^2)^2+4(1-c)(c^2+2c)>0$

展开整理得 $c^4-4c^3+8c+4>0$.

名题训练3

❶ 已知实数 a、b、c、r、p 满足 $pr>2$，$pc-2b+ra=0$，求证：一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实数根.

❷ 证明：对于正数 a、b、c，如果方程 $c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$ 没有实数解，那么，以 a、b、c 为长度的三条线段能够组成一个(面积不为零的)三角形.

❸ 已知 a、b、c、d 为实数，满足 $ac=2(b+d)$，求证：方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+cx+d=0$ 至少有一个实数解.

例4 已知 x、y、z 是实数，且 $x+y+z=m$，$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}m^2$ $(m\geqslant0)$.求证：$0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}m$，$0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}m$，$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}m$.

【分析与解答】 此题只需证明 $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}m$ 就行了，因为 x、y、