三年制高等职业教育规划教材

三年制高等职业教育规划教材

高等数学（第二册）

《高等数学》编写组　编

苏州大学出版社

三年制高等职业教育规划教材

三年制高等职业教育规划教材

高等数学

（第二册）

《高等数学》编写组　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．第二册/卢崇高主编:《高等数学》编写组编．—苏州:苏州大学出版社,2003.12
三年制高等职业教育规划教材
ISBN 7-81090-226-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①卢…②高…　Ⅲ．高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004514 号

三年制高等职业教育规划教材
高等数学(第二册)
《高等数学》编写组　编
责任编辑　管兆宁

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号　邮编:215021)
丹阳教育印刷厂印装
(地址:丹阳市西门外　邮编:212300)

开本 787×1092　1/16　印张 17.25　字数 431 千
2003 年 12 月第 1 版　2003 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7-81090-226-1/O·16(课)　定价:24.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67258835

三年制高等职业教育规划教材编审委员会

前　言

进入20世纪90年代以来，我国职业教育驶上了改革发展的快车道。1991年，国务院作出《关于大力发展职业技术教育的决定》；1993年，中共中央国务院印发的《中国教育改革和发展纲要》强调要“形成全社会兴办多形式、多层次职业技术教育的局面”；1996年，我国第一部《职业教育法》正式颁布实施；1999年，《中共中央　国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》明确指出“要大力发展高等职业教育”；2002年7月，全国职业教育工作会议提出要深化职业院校教育教学改革，促进职业教育与经济社会发展的紧密结合，并要解决好中等职业教育与高等职业教育的衔接问题。

在这一背景下，近年来，我国高等职业教育在结构调整、招生规模和培养人才质量等方面均获得了长足的发展。尤其是随着一大批高等职业技术学院的成立，以普通高中毕业生和中等职业学校毕业生为生源，以培养经济建设和社会发展急需的中高级应用型、工艺型专业技术人才和管理人才为目标的三年制高等职业教育发展势头良好。三年制高职教育的迅猛发展，客观上要求尽快编写出版与之相适应、定位准确、特色鲜明的高职系列教材。为此，在江苏省教育厅高教处的关心和支持下，江苏省职业技术学院协作委员会组织全省二十多所高校的专家和一线骨干教师，编写了这套三年制高等职业教育系列教材。

该系列教材建设的基本思路是：先公共基础课后专业课，先专业基础课后其他专业课。首先开发公共基础课教材，再向专业课程教材拓展；在专业课程中，先开发建设大类专业基础课教材，再向细化的专业课程教材延伸。争取经过几年的努力，形成一套与我国高职教育发展水平相适应、特色鲜明的新世纪高等职业教育教材。

该系列教材编写的基本指导思想是：针对三年制高职教育生源变化的实际，以及介于本科和中职中专之间的层次性，依据高职教育实践性、应用性强的特点，教材力求凸显基础性、实践性和发展性的统

一，强调创新能力的培养，重在阐明实践应用价值，拓宽基础知识面，注意与相关课程的衔接，强化能力训练与能力迁移，使基本文化素养和一般能力的培养与职业能力的培养相结合，从而保证学生具有较好的职业文化素质，并为其拓展学习和终身学习打好基础。

教材建设是一项长期而艰苦的工作，有一个在实践中不断摸索、学习和总结、完善的过程。限于经验和水平，加之教材编写出版的时间仓促，该教材难免存在这样那样的缺憾和不足，由衷希望有关专家学者和使用本教材的师生提出宝贵意见，以便我们在修订重印时进一步完善。

三年制高等职业教育规划教材编审委员会

2003 年 5 月

编写说明

为满足江苏省高职高专教育大力发展的需要，作为工程类、经济类、管理类专业重要的基础理论课——高等数学，应及时地拥有一本具有江苏特点的高职院校通用教材。为此，我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在研究、分析、对比多种同类教材和广泛吸取省内同行意见的基础上，组织了无锡职业技术学院、南通纺织职业技术学院、华东船舶工业学院、徐州建筑职业技术学院、南京工业职业技术学院、江苏商业管理干部学院（江苏经贸职业技术学院）、南京信息职业技术学院、常州轻工职业技术学院、常州机电职业技术学院、常州信息职业技术学院、无锡商业职业技术学院、江苏信息职业技术学院、苏州农业职业技术学院等 13 所高等院校具有一定教学经验的教师，集思广益，编写了本书。本书教学时数建议如下：工程类专业、管理类专业约为 120 学时左右；经济类专业约为 90 学时左右。本书以“联系实际，理清概念，加强计算，注重应用，适度论证，提高素质，重视创新”为特色，充分体现了“以应用为目的，以必需、够用、高效为度”的编写原则，在内容编排上，追求体系整体优化，注重与初等数学的衔接，注重基本概念、基本定理，用几何意义、物理含义与实际背景直观解释，深入浅出，系统完整，论证简明，加强基本计算，便于教，便于学。归纳起来，本教材具有以下几个方面的特色：

1. 基本概念、基本定理直观化、具体化

我们充分注意到高职学生特点和学生之间客观存在的差异，因此在编写教材时，注意高等数学与初等数学的衔接。为缩短刚入学的高职学生学习高等数学的适应过程，我们注重理论与实际相结合，尽量按“实践——理论——实践”的认识过程编写，做到由特殊到一般，再由一般到特殊。引进重要的数学概念和定理时，在保证数学概念的准确性及基本理论的完整性、系统性的原则下，尽可能借助几何直观图形和物理含义来阐述这些概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，一般概念和定理只作直观解释，对一些重要定理进行严格证明。这样既加深学生对定理背景的理解，也可适度提高学生的论证能力。如果这些重要定理的证明过于深奥，则放在章末“总结·拓展”一节中进一步阐述或证明。

2. 数学知识与数学应用紧密结合

为提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力,在编写教材时选择了较多工程或经济类的应用题材,重视建立实际问题的数学模型,并把 MathCAD 软件应用穿插其中,以提高学生应用数学知识解决实际问题的兴趣。书中增加了“数学建模简介”、“MathCAD 软件应用简介”两章内容,集中介绍了化实际问题为数学问题,并以计算机为工具解决数学方面的知识问题,体现出“以应用为目的”的编写原则。

3. 基本要求与拓宽知识相结合,体现“以人为本”的数学观念。

编写教材时,我们是根据教学的基本要求,按照够用为度的原则编写的,但也考虑到有些专业的特殊需要,适当地增加了一些内容,增加的这些内容的标题都加了 * 号,以示区别。为适应部分学生“专转本”、“专升本”继续深造的需要,有些内容略有加深,加深的内容一般放在每章末“总结 · 拓展”一节的“拓展提高”部分,扩大了本书的适应性,但不影响面上的教学。

4. 习题课进教材,便于学生复习

根据高职高专学生的特点,我们在每章末的“总结 · 拓展”中,不但包含了本章知识小结、要点解析以及总复习题等,而且根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》所提出的要求和重点,按综合运用基本概念、基本定理、基本公式等分类编写了若干数量的例题分析及相应习题,以便于学生复习,也便于教师教学。

5. 注重高等数学教学手段现代化

鉴于高性能数学软件日臻完善,在工程技术领域中计算的大量应用,本书以 MathCAD为模板,在各章的“总结 · 拓展”中都介绍了如何应用计算机软件解决本章有关计算机问题,并在第一册第七章“MathCAD 软件应用简介”中,集中介绍了软件功能及其在各方面的应用,既减少了学生计算中的困难,也培养了学生使用软件完成计算的习惯。这些内容具有相对独立性,可在完成基本教学内容的基础上,根据实际情况组织教学。

本书主要适用于工科类、经管类、高职院校各专业,也可作为“专转本”、“专升本”及学历文凭考试的教材或参考书。

本书由张建忠任总主编,本册(第二册)主编卢崇高,参加本册编写的有冯宁、沈跃云、张昉、王伟岭、钱黎民、周利民、顾晓叶。

在本书编写过程中,职业教育专家谈兴华作为编写顾问,对教材的编写提出了许多很好的建议,江苏省数学会工科院校委员会高职高专分会主任委员胡卫群教授担任本书主审,副主审苏州大学数学与计算机专家吴茂庆对书稿进行了认真详尽的审阅,提出了许多宝贵的意见,并绘制了全书所有图形,屈寅春老师为编写“软件应用”部分做了大量工作。

本书的编写和出版,自始至终得到了江苏省教育厅高教处、苏州大学出版社及各有关院校的大力支持和帮助,在此一并表示诚挚的感谢。

由于水平有限,书中不当之处在所难免,恳请同仁和读者批评指正。

《高等数学》编写组

2003 年 11 月

目录

CONTENTS

第八章 常微分方程

§8-1 微分方程的基本概念…………(1)
§8-2 一阶微分方程…………(4)
一、可分离变量的一阶微分方程 …………(5)
二、齐次方程 …………(6)
三、一阶线性微分方程 …………(7)
§8-3 可降阶的高阶微分方程 …………(11)
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …………(12)
二、缺项型二阶微分方程…………(12)
§8-4 二阶常系数线性微分方程 …………(15)
一、二阶常系数齐次线性微分方程的解法…………(15)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法…………(18)
*§8-5 微分方程应用举例 …………(21)
总结·拓展 …………(26)

第九章 向量与空间解析几何

§9-1 空间直角坐标系与空间向量 …………(39)
一、空间直角坐标系的概念…………(39)
二、空间点的直角坐标…………(40)
三、向量的概念…………(41)
§9-2 向量的运算 …………(43)
一、向量的加减运算…………(44)
二、向量的数量积…………(46)
三、向量的向量积…………(47)
四、向量的关系及判断…………(49)
§9-3 空间平面与直线的方程 …………(52)
一、平面方程…………(52)
二、直线方程…………(53)
三、据已知条件求平面或直线方程…………(56)

四、线、面位置关系讨论 …………………………………………………… (58)
*五、空间直线、平面的应用举例 …………………………………………… (61)
§9-4 曲面与空间曲线及其方程 …………………………………………… (65)
一、曲面及其方程 ………………………………………………………… (65)
二、空间曲线及其方程 ……………………………………………………… (70)
总结·拓展 ………………………………………………………………… (75)

第十章 多元函数微分学

§10-1 多元函数的概念 ………………………………………………… (85)
一、多元函数 ……………………………………………………………… (85)
二、二元函数的极限 ………………………………………………………… (87)
三、二元函数的连续性 ……………………………………………………… (88)
§10-2 偏导数 ………………………………………………………………… (91)
一、一阶偏导数 …………………………………………………………… (91)
二、高阶偏导数 …………………………………………………………… (93)
§10-3 全微分及其应用 ……………………………………………………… (94)
一、全微分的定义 ………………………………………………………… (94)
二、全微分在近似计算方面的应用 ………………………………………… (97)
§10-4 多元复合函数与隐函数的微分法 ……………………………………… (99)
一、多元复合函数的求导法则 ……………………………………………… (99)
二、二元隐函数的求导公式 ………………………………………………… (103)
§10-5 偏导数的几何应用 …………………………………………………… (105)
一、曲线的切线和法平面 …………………………………………………… (105)
二、曲面的切平面和法线 …………………………………………………… (106)
§10-6 多元函数的极值和最值 ………………………………………………… (109)
一、二元函数的极值 ………………………………………………………… (109)
二、多元函数的最值 ………………………………………………………… (111)
三、二元函数的条件极值 …………………………………………………… (113)
总结·拓展 ………………………………………………………………… (115)

第十一章 多元函数积分学

§11-1 二重积分的概念与性质 ………………………………………………… (124)
一、两个引例 ……………………………………………………………… (124)
二、二重积分的概念 ………………………………………………………… (125)
三、二重积分的性质 ………………………………………………………… (126)
§11-2 二重积分的计算方法 …………………………………………………… (128)
一、直角坐标系下二重积分的计算 ………………………………………… (128)
二、利用极坐标计算二重积分 ……………………………………………… (131)
§11-3 二重积分的应用 ……………………………………………………… (134)

一、计算曲面面积 …………………………………………………… (134)
二、物理应用 ……………………………………………………………… (136)
§ 11-4　对坐标的曲线积分 ………………………………………… (140)
一、对坐标的曲线积分的概念 ……………………………………… (140)
二、对坐标的曲线积分计算 ………………………………………… (142)
§ 11-5　格林公式及其应用 ………………………………………… (144)
一、格林(Green)公式………………………………………………… (144)
二、曲线积分与路径无关的条件 …………………………………… (147)
总结・拓展 ………………………………………………………………… (152)

第十二章　级　　数

§ 12-1　数项级数 ………………………………………………………… (166)
一、数项级数的基本概念 …………………………………………… (166)
二、数项级数的基本性质 …………………………………………… (168)
三、级数收敛的必要条件 …………………………………………… (170)
§ 12-2　数项级数的审敛法 ……………………………………………… (171)
一、正项级数及审敛法 ……………………………………………… (171)
二、交错级数与绝对收敛 …………………………………………… (175)
§ 12-3　幂级数的概念与性质 …………………………………………… (178)
一、幂级数的概念及其敛散性 ……………………………………… (178)
二、收敛幂级数及其和函数的性质 ………………………………… (181)
§ 12-4　函数的幂级数展开式 …………………………………………… (185)
一、泰勒(Tayler)级数与泰勒公式 ………………………………… (185)
二、将函数展开成幂级数的方法 …………………………………… (187)
§ 12-5　函数幂级数展开式的应用 ……………………………………… (193)
§ 12-6　傅里叶级数 ……………………………………………………… (196)
一、准备知识 ………………………………………………………… (196)
二、周期为 2π 的函数的傅里叶级数………………………………… (197)
三、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 ………………………………… (202)
总结・拓展 ………………………………………………………………… (205)

第十三章　近似计算初步

§ 13-1　方程求根 ………………………………………………………… (221)
一、对分法 …………………………………………………………… (222)
二、牛顿切线法 ……………………………………………………… (222)
§ 13-2　插值多项式 ……………………………………………………… (224)
一、插值多项式问题的提法 ………………………………………… (224)
二、拉格朗日插值多项式 …………………………………………… (225)
三、牛顿插值多项式 ………………………………………………… (226)

§ 13-3 数值积分 …… (229)
一、梯形公式 …… (229)
二、抛物线法 …… (230)

第十四章 数学建模简介

§ 14-1 数学建模的基本概念 …… (233)
一、数学模型与数学建模 …… (233)
二、数学模型的分类 …… (234)
§ 14-2 数学建模举例 …… (235)
一、利用初等数学知识建模 …… (235)
二、利用微积分建模 …… (238)
三、利用微分方程建模 …… (241)

习题答案 …… (248)

第八章　常微分方程

在科学研究和大量的应用实践中，往往需要求得变量之间存在的函数关系．但从问题本身已知条件往往不能直接归结出函数表达式，仅能得到含有未知函数的导数或微分的关系式，这种关系式就是本章所要讨论的微分方程．所要求的函数关系需要求解这个微分方程才能显现出来．因此，微分方程是数学理论与实际问题相联系的途径之一，也是确定函数关系的一种数学方法．本章主要介绍微分方程的基本概念和几类常见的微分方程的解法．

§8-1　微分方程的基本概念

我们先来看一个具体的实例．

例1　牛顿冷却定律指出，物体冷却的速度（℃/s），正比于物体的温度与冷却环境温度之差．现设钢锭出炉温度为1150℃，炉外环境温度为30℃，比例系数为0.014℃/s²．试求：

（1）钢锭出炉后的温度T(℃)与时间t(s)之间的函数关系；

（2）钢锭温度降到750℃以下锻打将会影响产品质量，问应该在钢锭出炉后几秒钟内把它锻打好？

解　（1）这是一个热力学中的冷却问题．取$t=0$为钢锭出炉开始冷却的时刻，设经t秒钟时钢锭温度为T，则$T=T(t)$，钢锭温度下降的速度为$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$．

据牛顿冷却定律得

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=-0.014[T(t)-30],\tag{1}$$

其中等号右端添上负号，是因为当时间t增大时，钢锭温度$T(t)$下降，故$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$．

按题意，$T(t)$还应满足条件

$$T|_{t=0}=1150.\tag{2}$$

将方程(1)变为

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{T(t)-30}=-0.014\mathrm{d}t.\tag{3}$$

两端求不定积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}T}{T(t)-30}=-\int 0.014\mathrm{d}t,$$

求出不定积分后得

$$\ln[T(t)-30]=-0.014t+C_1.$$

令　$C_1=\ln C$（C_1，C为任意常数），化简得

$$T(t)=30+Ce^{-0.014t}. \tag{4}$$

将条件(2) $T|_{t=0}=1150$ 代入(4)式,得 $C=1120$. 于是所求函数关系为

$$T(t)=30+1120e^{-0.014t}. \tag{5}$$

(2) 将 $T=750$ 代入(5)式中 得

$$750=30+1120e^{-0.014t},$$

即 $e^{-0.014t}=\dfrac{9}{14}$,从而解得 $t\approx31.56(\mathrm{s})$.

所以应该在钢锭出炉后大约 31.56 秒内把它锻打好.

本例要求的是钢锭出炉后的温度 T 与时间 t 之间的函数关系 $T=T(t)$,即冷却规律. 从问题归结出的数学模型以及求解过程是过去所没有见到过的. 第一,从模型来看,由问题的已知条件,并不能直接得到函数 $T(t)$,而是得到了含有未知函数及其导数的关系式(1)(即方程)和未知函数应该满足的附加条件(2),这是一种全新类型的方程;第二,从求解过程来看,从(1)、(2)式中求出的是一个函数 $T(t)$,而不是变量值或函数值——这又是一种全新类型的求解问题;第三,对(3)式两端求不定积分这种解法,与过去求不定积分的解法也有区别.

对于第一、二个问题在后面将作总结,我们先对第三个问题作出解释. (3)式两端都是微分式,等式表示左边未知函数和右边已知函数的微分相等,因此他们的不定积分也仅差一个常数. 通过对两端求不定积分,就能求出未知函数.

例 2 一质量为 m 的质点,从高 h 处,只受重力作用从静止状态自由下落,试求其运动方程.

解 在中学阶段就已经知道,从高度为 h 处下落的自由落体,离地面高度 s 的变化规律为 $s=h-\dfrac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度. 这个规律是怎么得到的呢? 下面我们给出推导过程.

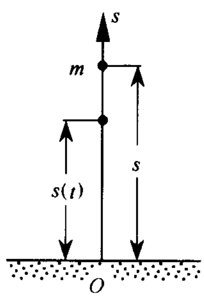

图 8-1

取质点下落的铅垂线为 s 轴,它与地面的交点为原点,并规定正向朝上(图 8-1). 设质点在时刻 t 的位置在 $s(t)$. 因为质点只受方向向下的重力的作用(空气阻力忽略不计),由牛顿第二定律 $F=ma$,得

$$m\frac{d^2s(t)}{dt^2}=-mg,$$

即

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}=-g. \tag{6}$$

根据质点由静止状态自由下降的假设,初始速度为 0,所以 $s=s(t)$ 还应满足下列条件

$$s|_{t=0}=h,\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{7}$$

对(6)式两边积分,得

$$\frac{ds(t)}{dt}=-g\int dt=-gt+C_1, \tag{8}$$

对(8)式两边再积分,得

$$s(t)=\int(-gt+C_1)dt=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{9}$$

其中 C_1,C_2 均为任意常数.

将条件(7)代入(8)、(9)式,得 $C_1=0$,$C_2=h$. 于是所求的运动方程为

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h. \tag{10}$$

本例我们再次看到了与例1相同的情况. 首先,从问题的已知条件并不能直接得到函数 $s(t)$,而是得到了含有未知函数及其导数的关系式(6)(即方程)和未知函数应该满足的附加条件(7);其次,从解算过程来看,从(6)、(7)式要求出的是一个函数 $s(t)$,而不是变量值或函数值.

上面两个实际意义不相同的例子的公共特征是:自变量都只有一个,问题要求出的是一个带有附加条件的未知函数. 解决这类问题的方法很类似:首先建立一个含有未知函数导数的方程,然后通过解方程,求出满足附加条件的未知函数,所谓解方程,则是求不定积分.

总结这类问题,给出下面的定义:

定义 若在一个方程中涉及的函数是未知的,自变量仅有一个,且在方程中含有未知函数的导数(或微分),则称这样的方程为**常微分方程**,简称**微分方程**.

例 1 的方程(1)、例 2 的方程(6)都是常微分方程.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数,称为**微分方程的阶**. 如例 1 的方程(1)是一阶微分方程,例 2 的方程(6)是二阶微分方程.

某个函数代入微分方程后,能成为自变量的恒等式,则称这个函数满足微分方程,满足微分方程的函数称为**微分方程的解**. 因此,求满足微分方程的未知函数,也就是要求出微分方程的解.

求微分方程的解免不了会求不定积分,因此得到的解常含有任意常数. 如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数,且个数与方程的阶数相同,则称为**微分方程的通解**. 如例 1 的(4)、例 2 的(9)分别是微分方程(1)、(6)的通解. 通解表示满足微分方程的未知函数的一般形式,在大部分情况下,也表示了满足微分方程的解的全体. 在几何上,通解的图象是一族曲线,称为**积分曲线族**.

微分方程中对未知函数的附加条件,若以限定未知函数及其各阶导数在某一个特定点的值的形式表示,则称这种条件为微分方程的**定解条件或初始条件**. 如在例 1、例 2 中的(2)、(7),就是微分方程(1)、(6)的初始条件.

微分方程初始条件的作用是用来确定通解中的任意常数. 不含任意常数的解称为**特解**. 如例 1 的(5)、例 2 的(10)依次是微分方程(1)、(6)满足初始条件(2)、(7)的特解. 求微分方程满足初始条件的特解的问题,称为**初值问题**. 特解表示了微分方程通解中一个满足定解通解的特定的解,在几何上表示为积分曲线族中一条特定的积分曲线. 图 8-2 是例 1 积分曲线族及满足初始条件的积分曲线的示意图.

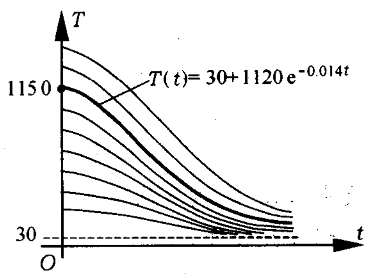

图 8-2

例 3 验证函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$(C_1,C_2 为任意常数)是方程 $y''-4y=0$ 的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 $y'=2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x}, y''=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x}$,
将 y, y'' 代入微分方程,得

$$y''-4y=4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})-4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})\equiv 0.$$

所以函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ 是所给微分方程的解. 又因为 $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}}=e^{4x}\neq$ 常数,所以解中含有两

个独立的任意常数 C_1 和 C_2，而微分方程是二阶的，即任意常数的个数与方程的阶数相同，所以它是该方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 分别代入 y 及 y' 中，得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ 2C_1-2C_2=1, \end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{1}{4}, C_2=-\frac{1}{4}$. 于是所求特解为 $y=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})$.

练习 8-1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程？并说明它们的阶数：

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=2x$；　　(2) $y^2-3y+x=0$；

(3) $x(y')^2+y=1$；　　(4) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

2. 判断下列方程右边所给函数是否为该方程的解？如果是解，是通解还是特解？

(1) $y''+y=0, y=C_1\sin x+C_2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (C_1, C_2 为任意常数)；

(2) $y''=\frac{1}{2}\sqrt{1+(y')^2}, y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$；

(3) $(x+y)dx=-xdy, y=\frac{(C-x^2)}{2x}$ (C 为任意常数).

习题 8-1

1. 验证函数 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ (C_1, C_2 为任意常数)是方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解.

2. 写出下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率等于该点的坐标之和；

(2) 曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线与横轴交点的横坐标等于切点横坐标的一半.

3. 一质量为 m 的物体，由静止开始从水面沉入水中，下沉时质点受到的阻力与下沉的速度成正比(比例系数为 $k, k>0$). 求物体的运动速度 $v(t)$ 和沉入水下深度 $s(t)$ 所满足的微分方程及初始条件.

4. 已知曲线通过点(0,0)，且该曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率为 xe^{-x}，求该曲线的方程.

5. 设钢锭出炉温度为 1150℃，炉外环境温度为 30℃，钢锭出炉 20s 后温度降到 900℃. 试求钢锭出炉后的温度 T(℃)与时间 t(s)之间的函数关系.

§8-2 一阶微分方程

一阶微分方程中出现未知函数的导数或微分是一阶的，则它的一般形式为

$$F(x,y,y')=0. \tag{8-1}$$

一阶微分方程或一阶微分方程的初值问题，首先有一个解的存在性问题；如果解存在，还有一个如何解的问题.本章我们仅介绍几种存在解，且有固定求解方法的一阶微分方程类型.

一、可分离变量的一阶微分方程

若(8-1)式可转化为

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x, \tag{8-2}$$

则称其为**变量分离的方程**；若(8-1)的形式为

$$M(x)N(y)\mathrm{d}y=M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x,$$

则很容易把它变为变量分离的方程，因此称为**可分离变量的微分方程**.

可分离变量的一阶微分方程的解法如下：

对原方程分离变量，成为变量分离的方程.若函数 $f(x)$ 和 $g(y)$ 连续，在两边同时求不定积分，即

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

依次记 $G(y)$，$F(x)$ 为 $g(y)$，$f(x)$ 的一个原函数，则从(1)可得

$$G(y)=F(x)+C. \tag{2}$$

如果能求出 $G(y)$ 的反函数 G^{-1}，则从(2)可以得到方程的通解 $y=G^{-1}[F(x)+C]$，因此称(2)为微分方程的**通积分**.利用初始条件确定了通积分中的任意常数后，就称为**特积分**.在求解微分方程问题中，一般不必刻意去求通解或特解，能求得通积分或特积分就算达到目的.因此在下文中我们也不严格地区分通解、通积分或特解、特积分.

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　显然是可分离变量的方程.分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$，即

$$\ln|y|=x^2+C_1 \text{ 或 } y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}.$$

因为 C_1 为任意常数，所以 $\pm e^{C_1}$ 也是任意常数，把它记作 C.代入后得到方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$.

例 2　求微分方程 $y(1+x^2)\mathrm{d}y+x(1+y^2)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解　显然，方程属于可分离变量类型.分离变量得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

两边积分，得

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

即

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C.$$

故方程的通解为 $(1+x^2)(1+y^2)=C$.