

# 数学学习

张志淼  
编著



# 与数学思想方法



郑州大学出版社

01

25

2006

# 数学学习

张志淼

编著

# 与数学思想方法



郑州大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学学习与数学思想方法/张志森编著. —郑州:郑州  
大学出版社,2006.6

ISBN 7-81106-327-1

I. 数… II. 张… III. 数学教学-教学研究-高等  
学校 IV. 01-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064169号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路40号

出版人:邓世平

全国新华书店经销

河南龙华印务有限公司印制

开本:850 mm × 1 168 mm

印张:12.375

字数:311千字

版次:2006年6月第1版

邮政编码:450052

发行部电话:0371-66966070

1/32

印数:1~3 100

印次:2006年6月第1次印刷

---

书号:ISBN 7-81106-327-1/O·24 定价:25.00元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

郑州师范高等专科学校优秀学术著作出版基金资助出版

# 献 给

——祖父母、父母、亲属、弟妹

——贤哲、恩师、同学、同仁

——祖国、故乡、母校、讲坛

张志森诚上

2006.2

## 北京师范大学钱佩玲教授题词

数学思想能使人们领悟数学的真谛，懂得数学的价值。数学方法能帮助人们学会数学地思考和解决问题。两者在一起，能把知识的学习和培养能力、发展智力有机地联系起来，这是人们重视数学思想方法的良因所在。

钱佩玲

2006年5月13日

多年来,张志森同志一直从事数学教学工作教育理论的研究,并积累了许多宝贵的教学经验,取得了比较丰富的理论研究成果。作者结合自己的教学实践经验和在数学教育理论研究方面的深刻体会,博采国内外各个研究学派之长,撰写了《数学学习与数学思想方法》一书。该书从下述几个方面对数学学习与数学思想方法这一专题进行了研究:①学习心理学对数学学习有影响;②学习个体差异;③学习个体学习动机对数学学习的推动作用;④学习理论在数学认知学习中的作用;⑤数学思维与数学思想方法。书中的研究方法、主要观点和所得到的研究结论对同类研究课题有比较重要的学术参考价值,对数学教师搞好数学课教学、学生学习数学这门课程有比较重要的指导意义。

本书的写作是认真的、严谨的,内容的组织安排也是合理的,反映了作者有较强的科研组织能力。

蒋里强

防空兵指挥学院

2006年5月18日

张志森同志一直从事数学教学工作,并坚持对数学教育理论方面的研究,不仅教学经验丰富,而且也取得了比较丰富的相关研究成果。他编写的《数学学习与数学思想的方法》一书,在差异论方面的研究有创新之处。该书的主要观点、研究方法和研究结论对同类课题有较为重要的学术参考价值,为从事数学工作、数学教育的同行及数学爱好者提供了一部较好的参考书。该书史料翔实,文字简练生动,数学论证严谨易懂。这反映了作者有很好的数学基础和素养,具备较强的科研能力。

李雪梅

郑州大学数学系

2006年5月18日

## 内 容 提 要

此书是从数学思想方法和数学学习理论两方面论述的,是数学教育基础书籍。全书分为对数学的认识、数学学习理论、数学思想方法三部分。

此书可供师范院校数学系学生选用,也可供中学数学教学第一线的老师参阅。



# 代 序

## ——数学学习方法浅议

张志森先生在数学教育的岗位上耕耘数十年,他将自己一生对数学学习与数学教学的心得进行梳理与思考,写成了《数学学习与数学思想方法》一书,这是一件十分有意义的工作,也是一件值得庆贺的事情。

学校的根本任务是培养人才。数学是人才的基本素质之一,因此学好数学是广大教师和学生非常关注的事情。做任何事都要讲究方法,方法对头事半功倍,那么学好数学的基本方法是什么呢?

### 一、循序渐进,打好基础

数学家苏步青说过:“我觉得在学习上没有捷径可走,也无秘诀可言,要说有那就是刻苦钻研,扎扎实实打好基础,练好基本功。”对学习者来说,打好基础是根本,高楼大厦平地起,根深才能叶茂。打好基础需要循序渐进,这是学习数学的一个特点,正如数学家王梓坤所说:“不论是学习(数学)或研究(数学)都必须循序渐进,每前进一步都必须立脚稳固,这是数学方法中的一个显著特点,其他科学也要循序渐进,不过数学尤为如此。前头没有弄懂,切勿前进,有如登塔,只有一步一上,才能达到光辉顶点。”可见数学家们成功的原因之一,是他们在学习研究过程中是按打好基础、循序渐进的方法进行的。

另一方面,从数学的特点来看,学习数学也必须循序渐进。因为数学的知识结构具有系统性、连贯性、严谨性,数学是理性思维的产物,理性思维必定是事事清楚、步步有据,所以学习数学必须一步一个脚印,循序渐进。那么循序渐进会不会影响学习进度呢?我们认为只要目标明确、方法对头,循序渐进不是慢,而是快。数学家王元说过:“学习最怕吃夹生饭。如果前面一些东西学得糊里糊涂,再继续往前学,则一定越学越糊涂……所以不要怕慢,常常起步慢一些,只要学得踏实,后来就会快起来。”

怎样才能打好基础?

### 1. 在“理解”上下功夫

理解就是用自己的经验与思维去处理新事物,接受新知识,解决新问题,由此来不断完善与构建自己的认知结构。简言之,理解就是人们常常所说的“懂”,就是一种“消化”知识的过程。死记硬背不是理解,那么学习数学怎样才算理解了?能够灵活运用数学知识就是理解的一个标志,做习题是检验是否理解的方法之一。例如,你学过“勾股定理”后,如果能用“勾股定理”去解决有关的习题,说明你对“勾股定理”有所理解。理解有一个过程,逐步深入的过程。你用“勾股定理”去做对一道或几道习题,只能说明你对定理有所理解,真正“吃透”、“掌握”,还需要通过以后的学习来逐步加深。

### 2. 在“熟练”上下功夫

数学家陈景润说过:“读书不能满足于懂,而要弄得烂熟。”只有把知识“弄得烂熟”你才能有新的体会与发现;只有“熟读唐诗三百首”,你才能对唐诗有所体会,甚至达到“不会写诗也会吟”。可见学习过程中,“熟”是多么重要。但“熟”不是死记硬背,是在理解的基础上,把知识牢牢地装在自己的头脑中,做到在需要时能呼之欲出,信手拈来。为了达到“熟”,必须反复思考,多问几个“为什么”。多做习题当然也是达到“熟”的方法之一,但需注意,

做习题要有明确的目的,要有针对性,要有选择。偏题、怪题只不过是玩弄一些特殊的技巧而已,无助于加深对数学基本概念和内容的理解,这种无目的地做“题海”的方法不可取。

## 二、独立思考,勇于探索

学习的过程在某种意义上就是人们认识事物的过程。认识事物有一个从感性到理性的“飞跃”过程,这个“飞跃”是不会自然产生的,也不可能由他人来替代完成。这个过程只能靠自身努力、独立思考来完成。学生的学习不是“海绵吸水”,不是教师讲什么,学生就能吸收什么,只有靠刻苦钻研、独立思考才能“吸收”知识。数学家华罗庚说过:“在我们一生里需要充分发挥独立思考能力……独立思考是取得正确认识的必需方法,也是惟一方法。”爱因斯坦也说过:“人们解决世界上所有的问题是用大脑和智慧,而不是搬书本。”这些科学家的至理名言说明科研需要独立思考,同样,学习也需要独立思考。

怎样进行独立思考?

### 1. 不要轻易问人

陈景润说过:“不要一遇到不会的东西就去问别人,自己不动脑子……要自己先认真地思考一下,这样就可能依靠自己的努力克服其中某些困难,对经过很大努力仍不能解决的问题,再虚心请教别人,这样才能得到更大的帮助和锻炼。”

问别人解决问题或得到问题解答,与自己独立思考后解决问题的效果和影响是不一样的,问别人只能得到表面的、浮浅的认识,独立思考后所得的是深层次的、永恒的认识,因此我们在学习中遇到问题不要轻易问人。首先要靠自己思考,千万不要“吝啬”思考,脑子是越用越灵活的。如果一个问题原本自己可以解决而去问别人,这就失去了一次极好的独立思考的机会了。

问问题也有一个方法问题。请别人在关键的地方点拨一下,然后自己再思考,这样可能会费力一些,但收获也会更大。所以

向人请教不要把问题“问透”。

## 2. 善于提出问题,敢于提出问题

思维是从问题开始的,头脑中没有问题,就不会去进行思考,所以我们应该经常给自己提出一些问题,这是在学习过程中必须经历的一个十分重要的阶段。南宋朱熹说过:“读书无疑者需有疑……小疑则小进,大疑则大进,疑者悟之始也。”从疑到悟(悟就是理解,明白)就是发现问题、提出问题和解决问题的过程,多疑必须会多思;多思就可以达到多悟。正如爱因斯坦所言:“提出一个问题往往比解决一个问题更重要。”

不懂、不明白不是缺点(充其量是一个弱点),问问题,就是要暴露自己的“不懂”,这需要一点勇气,我们要敢于暴露自己不懂的地方,不要怕受到“连这个也不懂”的责备(作为教师千万不要用这种口气来责备学生),责备后不是就懂了吗?不想受责备,不懂装懂就一辈子不懂,就应当受到更大的责备。科学是实事求是的学问,一定要彻底弄懂,不能有半点虚伪,为了彻底地弄懂,我们要不断地问“为什么”。清人郑板桥说过:“读书好问,一问不得,不妨再三问,问一人不得,不妨问数十人,要使疑窦释然,精理迸露。”我们要敢于提出问题,不论提出怎样简单,甚至是幼稚的问题,都不表明你的愚蠢,相反,惟一愚蠢的问题是你不提问题!

## 三、不迷信书本,自觉争取帮助

王梓坤教授说过:“书,无非是作者一次系统的、有充分准备的长篇发言,其中所讲对的居多,错误也有,读书时反复思考,可以起到消化、吸收、运用和发现问题,跟踪追迹的作用。”这就是说,为了追求对问题的彻底理解,可以与“书本”讨论,在与书本的讨论交流中能激发思维,发现新问题,并能彻底明白。这里重要的是“反复思考”,而不是迷信书本。

学习首先要靠自己的努力,所以必须自力更生,必须学会自学,但这不等于不需要帮助,自己努力与争取帮助并不矛盾,不要

轻易问人,不等于不要问别人,我们要争取别人(包括老师、同学)的帮助,有帮助与无帮助对学习来说,学习的效果是不一样的。一位优秀的导师正如航船的领航者,他可以告诉你哪里有礁石,哪里是航道,能让你的思维不会“触礁”、“沉没”;一位优秀的导师有丰富的成功和失败的经验,这些宝贵的经验可以成为你学习的借鉴与指针,使你在学习的道路上少走弯路。所以独立思考与争取帮助不矛盾,独立思考是成功的基础、根本,是内因;争取帮助是成功的条件、外援,是外因。要相信自己能够学好,有帮助可以少走弯路,没有帮助就准备披荆斩棘地前进吧!

王中如  
北京师范大学 数学科学学院

2006年2月15日

# 前 言

自 20 世纪末,教育对于现代化的基础作用日渐凸现,要发展经济首先要发展教育,已是国人的共识。为发展教育,数学教育研究应时发轫,并出现了百花齐放的局面。数学教育与数学思想方法成了数学界内外的话题。

基于需要,我赴北京师范大学师从钱佩玲教授、王申怀教授学习数学教育课程。学习其间经老师的教诲、点化愚钝,使我对数学教育和数学思想方法的感受和认识有所深入;北师大周作宇教授、中科院张梅玲教授的讲座,加深了我对教育心理学的理论认识;北师大博士后王恺顺教授亲自为我选定了专业方向——数学教育;学习期间还阅读了大量的相关资料和大家述著,受到极大教益。于是开始萌生将钱佩玲教授、王申怀教授的教学思想方法与张梅玲教授、周作宇教授的心理学结合起来的念头。关于数学教育心理学,1972 年在埃克斯特召开的第二届数学教育大会上开始讨论,在德国卡尔鲁斯厄召开的第三届数学教育大会上成立了“国际数学教学心理组织”(Psychology of Mathematical Education 简称 PME)。因此在国际数学教育方面,我的这个想法已经晚了几十年,而在我国的数学学习心理学研究方面却还是薄弱环节。

关于数学思想方法与心理学结合的合理性是应该研究的:

①数学教育与心理学可以合成为“数学教育心理”去研究,那么

“数学思想方法”与“学习理论”也可以结合起来作为一个课题去研究。因为,数学思想方法是数学教育的一个内容;学习理论是研究关于学习性质及其形成的机制的心理学理论,所以它们的结合如同国际数学教育大会将数学教育与心理学结合一样是可以尝试的。②“数学思想方法”与“学习理论”结合有着历史渊源。数学思想方法是数学知识的精髓,是数学的指导思想和普遍使用的方法,是基于数学载体之上的。“学习理论”包含于心理学之中,心理学源于哲学,而数学与哲学自古就是孪生兄弟。那么“数学思想方法”与“学习理论”只不过是数学与哲学结合的其中一部分,它们的结合是顺理成章的。③在教育实践中,借用教育心理学研究数学教育中的许多问题已有先例:如联想主义、行为主义、差异论、同化与顺应理论、强化理论、记忆理论、动机、马斯洛的需要层次论等,对数学教育的心理研究有着潜在或明显影响,有些是有效的、可行的。④心理学中差异论符合当今数学学习个体的状况。⑤动机,在教育实践中发现它与数学学习有强相关。⑥教学实践中较好地运用心理学学习理论,对于学生和数学学习的效果具有显著性等等。因此将“数学思想方法”与“学习理论”结合的研究是有益的。

本书将数学思想方法与数学学习结合在一起进行研究,试图达到以下几个目标:①认识数学思想方法,进而认识数学的内涵和数学的价值,认识数学美,使学生养成良好的学习习惯以及实事求是的创造精神、辩证唯物主义的精神和态度。②认识学习心理理论与数学教育的联系,合理使用数学学习理论为学生的数学学习创设良好的环境。③根据动机理论,引发学生的学习动机,唤起学生学习数学的兴趣与激发学生学习数学的动力,尤其注意

培养学生学习数学的能力。④使学生认识、理解、运用数学思想方法,提高数学学习效果,增强学生的思维品质。⑤给数学教师 and 数学学习者以启发,抛砖引玉,使其创造出更好的学习方法,促进数学学习。

目前数学教育中运用学习理论的状况出现了一些可喜现象,如关注学习者个体的差异和主体地位、重视学习动机的引发、改进教学方法、建设课堂文化等,并收到良好效益。但也存在一些问题,有待于在发展中不断完善和改进。在这里提倡:有端正的学习态度和借鉴方法,提倡实事求是、理论联系实际的方法,反对形式主义的做法。

此书成书的过程中,曾得到钱佩玲教授、王申怀教授、张美玲教授等的关心,在此表示衷心感谢!特别感谢钱佩玲教授为本书亲笔题词,王申怀教授还屈尊为拙作赐序!感谢蒋里强教授、李雪梅教授对本书的推荐!对那些通过其著作给我以思想的大家学者表示感谢!成书过程中曾受到学校领导的关心和支持以及数学系的同志们的关心和眷顾,在此表示感谢!在成书过程中吴克成、王桂花、李先知、李国富、刘卫岭、赵建功、张秀玲、闫淑霞、陈丽、陈彩云、陈宏道、范中广、赵远、王永洪等教授和老师曾给予宝贵意见,谨此表示感谢!感谢郑州大学陈香才教授和郑州大学出版社吕双喜教授给予的大力支持!

此书涉及学科知识广泛,个人水平有限,文中难免有不妥之处,敬请各位专家给予批评指正!

编者

2006年2月10日



# 目 录

## 第一部分 对数学的认识

<b>第一章 数学一瞥</b> .....	1
§ 1 数学史一瞥 .....	2
§ 2 数学家论数学 .....	11
§ 3 从数学的发展中我们所看到的 .....	14
<b>第二章 数学的基本特征</b> .....	17
§ 1 集合——数学中的基本对象 .....	17
§ 2 数学的基本关系 .....	27
§ 3 数学的结构 .....	31
§ 4 无穷的认识 .....	35
<b>第三章 数学思维的认识</b> .....	39
§ 1 思维概念概述 .....	39
§ 2 数学思维及其特征 .....	41
§ 3 数理逻辑 .....	48
§ 4 形式逻辑 .....	52
§ 5 辩证逻辑 .....	55
§ 6 数学逻辑 .....	58
§ 7 数学美与数学思维 .....	62