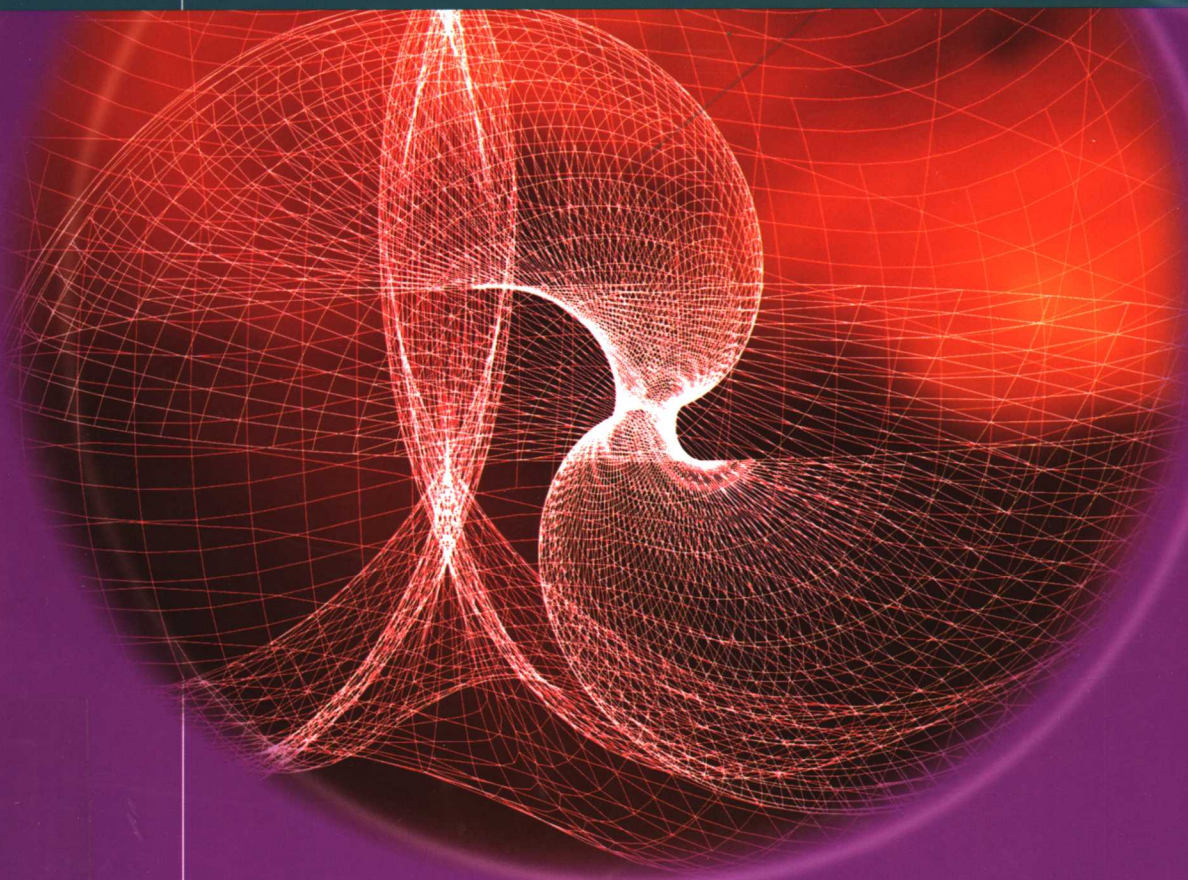


■ 高等学校理工科数学类规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

大连理工大学应用数学系 组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

0151.2

279

2007

■ 高等学校理工科数学类规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

大连理工大学应用数学系 组编

代万基 王 颖 冯 红 赵立中 编著



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/大连理工大学应用数学系组编. —大连:大连理工大学出版社, 2007. 2

高等学校理工科数学类规划教材

ISBN 978-7-5611-3433-7

I. 线… II. 大… III. 线性代数—高等学校—教材
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 022001 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:11.25 字数:250 千字
2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:宜 呈
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3433-7

定 价:16.00 元

前言

线性代数是理工科大学学生的一门重要数学基础课,在培养大学生的计算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力等方面发挥着重要的作用。

线性代数起源于线性方程组的解法,是 19 世纪后期发展起来的一个重要数学分支。线性代数的主要内容有:矩阵、行列式、向量组、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性空间和线性变换。其中,线性方程组的概念产生于 1678 年之前,行列式的概念产生于 1772 年,矩阵的概念产生于 1850 年。到了 20 世纪后半期,随着计算机的快速发展和日益普及,线性代数在理工科各专业及经济、管理、社会、生物、医学等学科中的应用越来越广泛,现已成为广大科技工作者必不可少的数学工具之一。

本教材具有以下特点:

(1)以矩阵的理论和运算为主线,把行列式看做矩阵的一个数值特性,将向量组、线性方程组、二次型及线性变换与矩阵建立联系,重点对矩阵进行研究,然后用矩阵理论来解决相关问题。

(2)将初等变换作为贯穿全书的计算工具。首先给出了矩阵的初等变换,然后研究初等变换的性质,将行列式的计算、矩阵的求逆、矩阵秩的计算、求向量组的极大无关组、解线性方程组以及求矩阵的特征向量等问题通过初等变换来完成,虽然有的问题也可通过别的方法来解决,但是用初等变换的方法更简便、更容易掌握,并便于用计算机来实现。

(3)充分利用分块阵来表达和论证问题。例如,对矩阵、向量组和线性方程组之间关系的研究,对行列式和矩阵秩的性质的证明等,使表达简练、思路清晰,便于读者学习和掌握。

(4)突出了矩阵的三个数值特性(行列式、秩和特征值)在线性代数中的作用;注意介绍主要概念和主要问题产生的历史背景,并尽可能地给出其直观解释;对于主要结论均给出了严格的证明;对于主要计算问题,均有详细的方法介绍,并配置合适的例题和习题。为了加深读者对基本概念和主要知识的理解和掌握,本书配备了大量的思考题,这些思考题是根据作者的多年教学实践构造出来的。

(5)为了培养读者解决实际问题的能力,本书在第 10 章给出了线性代数的应用实例。

本教材是在大连理工大学线性代数课程多年教学实践的基础上,借鉴并吸收了国内外相关优秀教材的优点编写而成的。

作者在编写本书时力求站在读者的角度,将理论知识阐释得通俗易懂,并充分考虑到当前全国硕士研究生入学考试的需要,其内容和难易程度符合理工科线性代数课程和全国研究生入学考试大纲的要求。本书可作为 48 学时线性代数课程用教材;若去掉带“*”号的内容,也可作为 32 学时线性代数课程用教材。

本书正文带“*”号的部分及某些章节后面的附录为拓宽与加深的內容,任课教师可根据学时和教学的实际情況酌情处理。此外,提高题的习题偏难,不宜留为作业,可供有潜

力的学生练习.

本书第1~3章由王颖编写,第4章由冯红编写,第5,6,9,10章由代万基编写,第7,8章由赵立中编写.全书由代万基统稿.

在本书编写过程中,得到了大连理工大学教务处和应用数学系领导的大力支持;得到了施光燕、廉庆荣、南基洙等教授的指教和帮助,在此一并表示衷心的感谢!

由于作者的水平所限,错误和不妥之处在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编者
2007年元月

目 录

第 1 章 矩阵及其基本运算 / 1

1.1 矩阵的概念及其运算 / 1

1.1.1 矩阵的概念 / 1

1.1.2 几种特殊的矩阵 / 2

1.1.3 矩阵的线性运算 / 3

1.1.4 矩阵的乘法 / 4

1.1.5 线性方程组的矩阵形式 / 7

1.1.6 矩阵的转置 / 8

1.1.7 对称阵与反对称阵 / 9

思考题 1-1 / 10

习题 1-1 / 10

提高题 1-1 / 11

1.2 向量与矩阵的分块 / 12

1.2.1 向 量 / 12

1.2.2 矩阵的分块 / 13

思考题 1-2 / 16

习题 1-2 / 16

提高题 1-2 / 17

1.3 初等变换与初等阵 / 17

1.3.1 初等变换 / 17

1.3.2 初等阵 / 19

1.3.3 矩阵的等价标准形 / 20

思考题 1-3 / 22

习题 1-3 / 22

提高题 1-3 / 23

第 2 章 行列式 / 24

2.1 n 阶行列式的定义 / 24

附录 用逆序数给出的行列式的定义 / 26

习题 2-1 / 27

2.2 行列式的性质 / 27

附录 性质 2-1 及性质 2-2 的证明 / 30

思考题 2-2 / 31

习题 2-2 / 31

提高题 2-2 / 32

2.3 行列式的计算 / 33

2.3.1 按行(列)展开法 / 33

2.3.2 化为三角行列式 / 34

2.3.3 先化简再展开 / 34

2.3.4 范德蒙德行列式 / 35

2.3.5 各行(列)元素之和相等的行列式 / 36

* 2.3.6 三线型行列式 / 36

* 2.3.7 递推法及三对角行列式 / 37

思考题 2-3 / 38

习题 2-3 / 38

提高题 2-3 / 40

2.4 分块三角行列式及矩阵乘积的行列式 / 41

附录 拉普拉斯定理简介 / 42

思考题 2-4 / 43

习题 2-4 / 43

提高题 2-4 / 43

第 3 章 可逆阵及 $n \times n$ 型线性方程组 / 45

3.1 可逆阵 / 45

3.1.1 可逆阵的定义 / 45

3.1.2 伴随阵及矩阵可逆的条件 / 46

3.1.3 求逆阵的初等变换法 / 50

3.1.4 矩阵方程 / 52

思考题 3-1 / 54

习题 3-1 / 54

提高题 3-1 / 57

3.2 $n \times n$ 型线性方程组 / 57

3.2.1 $n \times n$ 型齐次线性方程组 / 57

3.2.2 $n \times n$ 型非齐次线性方程组 / 58

习题 3-2 / 59

提高题 3-2 / 60

* 3.3 分块阵的初等变换 / 60

思考题 3-3 / 63

习题 3-3 / 63

第 4 章 向量组的线性相关性与矩阵的秩 / 64

4.1 向量组的线性相关性和秩 / 64

4.1.1 向量组的线性相关性 / 65

4.1.2 向量组的秩和极大无关组 / 69

思考题 4-1 / 70

习题 4-1 / 70

提高题 4-1 / 71

4.2 矩阵的秩 / 71

4.2.1 矩阵的秩的概念 / 71

4.2.2 矩阵的秩的性质 / 72

4.2.3 满秩阵 / 76

附录 性质 4-2 的证明 / 77

思考题 4-2 / 78

习题 4-2 / 79

提高题 4-2 / 80

- 4.3 矩阵的秩在向量组中的应用 / 80
- 4.3.1 判断向量组的线性相关性 / 80
- 4.3.2 求向量组的线性相关性 / 80
- 4.3.3 等价向量组 / 82

思考题 4-3 / 84

习题 4-3 / 85

第 5 章 线性方程组 / 86

- 5.1 线性方程组解的存在性 / 86
- 5.1.1 齐次线性方程组有非零解的充要条件 / 86
- 5.1.2 非齐次线性方程组解的存在性 / 86

思考题 5-1 / 88

习题 5-1 / 88

- 5.2 线性方程组解的性质、结构与解法 / 89

- 5.2.1 线性方程组解的性质 / 89
- 5.2.2 齐次线性方程组解的结构 / 89
- 5.2.3 非齐次线性方程组解的结构 / 91
- 5.2.4 利用矩阵的初等行变换解线性方程组 / 92

思考题 5-2 / 94

习题 5-2 / 94

第 6 章 向量空间及向量的正交性 / 96

- 6.1 向量空间 / 96
- 6.1.1 向量空间的定义 / 96
- 6.1.2 向量空间的基与维数 / 97
- 6.1.3 向量在基下的坐标 / 98
- 6.1.4 过渡矩阵与坐标变换 / 99

习题 6-1 / 101

- 6.2 向量的正交性 / 101

- 6.2.1 向量的内积 / 101
- 6.2.2 正交基与施密特正交化方法 / 103
- 6.2.3 正交阵 / 104

思考题 6-2 / 106

习题 6-2 / 106

提高题 6-2 / 106

第 7 章 方阵的特征值与相似对角化 / 108

- 7.1 方阵的特征值及其特征向量 / 108
- 7.1.1 特征值与特征向量的概念及计算 / 108
- 7.1.2 特征值与特征向量的性质 / 110

思考题 7-1 / 112

习题 7-1 / 113

提高题 7-1 / 113

- 7.2 相似矩阵 / 114

- 7.2.1 相似矩阵的概念与性质 / 114
- 7.2.2 相似对角化 / 115

思考题 7-2 / 118

习题 7-2 / 118

提高题 7-2 / 119

- 7.3 实对称阵的相似对角化 / 119

- 7.3.1 共轭矩阵 / 119
- 7.3.2 实对称阵的性质 / 120
- 7.3.3 正交相似变换矩阵的求法 / 122

思考题 7-3 / 124

习题 7-3 / 124

提高题 7-3 / 125

第 8 章 二次型 / 126

- 8.1 二次型的概念及标准形 / 126
- 8.1.1 二次型的定义及矩阵表示 / 126
- 8.1.2 线性变换与相合变换 / 127
- 8.1.3 用正交变换化二次型为标准形 / 128
- 8.1.4 用配方法化二次型为标准形 / 130
- 8.1.5 惯性定理 / 131

思考题 8-1 / 133

习题 8-1 / 134

- 8.2 正定二次型与正定阵 / 134

思考题 8-2 / 139

习题 8-2 / 139

提高题 8-2 / 140

第 9 章 线性空间及其线性变换 / 141

- 9.1 线性空间与内积空间 / 141

- 9.1.1 线性空间 / 141
- 9.1.2 内积空间 / 143

习题 9-1 / 144

- 9.2 线性空间的基、维数与坐标 / 144

- 9.2.1 基、维数与坐标的概念 / 144
- 9.2.2 基变换与坐标变换 / 146

习题 9-2 / 147

- 9.3 线性变换及其矩阵表示 / 148

- 9.3.1 线性变换的概念 / 148
- 9.3.2 线性变换的矩阵表示 / 149

习题 9-3 / 152

第 10 章 线性代数应用举例 / 153

- 10.1 矩阵乘法的应用 / 153
- 10.2 行列式在解析几何中的应用 / 155
- 10.3 逆矩阵在密码传输中的应用 / 157
- 10.4 极大无关组与线性表示的应用 / 158
- 10.5 线性方程组在实际问题中的应用 / 160
- 10.6 线性经济模型(投入产出模型) / 162
- 10.7 最小二乘法 / 164
- 10.8 相似对角化的应用 / 165
- 10.9 多元函数的极值问题 / 168

附录 关键词汉英对照 / 170

第 1 章

矩阵及其基本运算

矩阵是线性代数的主要研究对象,是研究线性方程组和其他相关问题的有力工具,在自然科学和工程技术的许多领域中有着广泛应用.线性代数研究问题的基本思想是:将所研究的主要问题转化为矩阵形式,重点对矩阵进行研究,最后将所研究的问题作为矩阵理论的应用加以解决.

本章主要讲述矩阵的概念及其运算;向量与分块阵;矩阵的初等变换与初等阵.

1.1 矩阵的概念及其运算

矩阵的直观表现形式为一个矩形的数表.在日常生活中,经常使用这样的数表,如产量统计表、成绩登记表等.为了对用矩阵所描述的事物作进一步的讨论,在线性代数中定义了矩阵(数表)之间的运算.

1.1.1 矩阵的概念

定义 1-1

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 型矩阵.

通常用黑体大写英文字母表示矩阵,上面的矩阵可简记为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $\mathbf{A}_{m \times n}$.

数 a_{ij} 位于矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 列相交处,叫做 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列元素,或 $\mathbf{A}$ 的 (i,j) 元.

若矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的行数相同且列数也相同,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同型矩阵,简称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 同型.

若矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 同型,并且其对应的元素 a_{ij} 和 b_{ij} 都相等,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相等,记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

元素都是实数的矩阵叫做实矩阵,元素是复数的矩阵叫做复矩阵.本书主要在实数范

围内讨论问题,如果不作说明,所讨论的矩阵均指实矩阵.

所有 $m \times n$ 型实矩阵的集合记作 $\mathbf{R}^{m \times n}$.

1.1.2 几种特殊的矩阵

元素都为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{O}_{m \times n}$.

只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵. 习惯上记作

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

只有一列的矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵.

$n \times n$ 型矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 常称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 中自左上角到右下角的直线叫做 $\mathbf{A}$ 的主对角线,自左下角到右上角的直线叫做 $\mathbf{A}$ 的副对角线,位于主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 叫做 $\mathbf{A}$ 的对角元.

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的方阵分别称为上三角阵、下三角阵和对角阵. 这三类矩阵统称为三角阵,其中,对角阵可记为 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

对于三角阵,为了方便,对角线上(下)方全为零的部分也可省去不写. 例如,对角阵也可记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

对角元都相同的对角阵 $\text{diag}(a, a, \cdots, a)$ 称为数量矩阵.

对角元都为 1 的对角阵叫做单位阵,专用 $\mathbf{E}_n$ 表示 n 阶单位阵, n 为阶数,简记为 $\mathbf{E}$. 也可以用 $\mathbf{I}$ 表示单位阵.

1.1.3 矩阵的线性运算

定义 1-2

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 规定矩阵 A 与 B 的和为

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

即两个矩阵的加法就是把它们对应的元素相加.

令 $-B = (-b_{ij})_{m \times n}$, 把 $-B$ 叫做 B 的负矩阵, 矩阵的减法规定为

$$A - B = A + (-B).$$

事实上, A 减 B 就是将 A 与 B 的对应元素相减.

 只有两个同型矩阵才能进行加法和减法运算.

定义 1-3

数 k 与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的乘积规定为

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{m \times n},$$

即数 k 与矩阵 A 相乘就是把数 k 与矩阵 A 的每个元素相乘.

由定义 1-3 可知, A 的负矩阵 $-A$ 也可以看做 (-1) 与 A 的乘积, 数量矩阵 $\text{diag}(a, a, \dots, a)$ 也可写成 aE . 当矩阵 A 的所有元素都有公因子 k 时, 可将 k 提到矩阵的外面. 例如,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法和数与矩阵的乘法这两种运算统称为矩阵的线性运算.

容易证明, 矩阵的线性运算具有以下性质 (矩阵 A, B, C, O 为同型矩阵; k, l 为数):

- (1) $A + B = B + A$;
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $A + O = A$;
- (4) $A + (-A) = O$;
- (5) $1A = A$;
- (6) $(k + l)A = kA + lA$;
- (7) $k(A + B) = kA + kB$;

$$(8) k(lA) = (kl)A.$$

【例 1-1】 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

并且 $2(X-A)+B=3A$, 求 X .

解 首先利用运算性质化简矩阵方程, 再代入已知条件进行计算. 由

$$2(X-A)+B=3A$$

得

$$2X-2A+B=3A.$$

$$2X=5A-B,$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(5A-B) \\ &= \frac{1}{2} \left(5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 15 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1.4 矩阵的乘法

定义 1-4

设 $A=(a_{ij})_{m \times s}$, $B=(b_{ij})_{s \times n}$, 规定矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 型矩阵 $C=(c_{ij})_{m \times n}$, 其中,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj},$$

记作 $AB=C$.

注意 (1) 关于矩阵乘法的定义要弄清三点:

- ① A 与 B 可作乘法运算的前提条件;
- ② 乘积 AB 的行数和列数如何确定;
- ③ 怎样算出 AB 中的每个元素.

(2) 只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时, 才能作乘法运算 AB ; 乘积 AB 的行数等于 A 的行数, 列数等于 B 的列数; 乘积 AB 的第 i 行第 j 列元素等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和.

【例 1-2】 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 0 \times 2 + (-1) \times 3 & 1 \times 6 + 0 \times (-1) + (-1) \times 0 \\ 3 \times 5 + (-2) \times 2 + 4 \times 3 & 3 \times 6 + (-2) \times (-1) + 4 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 23 & 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

按同样方法可求得

$$BA = \begin{pmatrix} 23 & -12 & 19 \\ -1 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

【例 1-3】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA 及 AC .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = O, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \\ AC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = O. \end{aligned}$$

下面我们来研究矩阵乘法的运算法则.

首先注意, 矩阵乘法的运算法则与数的乘法的运算法则有如下区别.

(1) 矩阵乘法不满足交换律, 即一般 $AB \neq BA$.

在进行乘法运算时, 应注意不要任意调换矩阵的前后位置, 否则会出错.

$AB \neq BA$ 的原因有 3 个:

① AB 可乘时, BA 不一定可乘;

② AB 和 BA 都可乘时, 其结果的类型不一定相同 (见例 1-2);

③ 即使 AB 和 BA 的类型都相同, 其中的元素不一定相同 (见例 1-3).

若矩阵 A 和 B 满足 $AB = BA$, 则称矩阵 A 和 B 可交换.

由矩阵乘法的定义可知, 若 A 和 B 可交换, 则 A 和 B 为同阶方阵.

(2) 矩阵乘法不满足消去律, 具体表现为

① $A \neq O$ 时, 由 $AB = AC$ 一般不能得到 $B = C$ (见例 1-3);

② 由 $AB = O$ 一般不能得到 $A = O$ 或 $B = O$, 即 A 和 B 都不等于零矩阵时, AB 可以等

于零矩阵(见例 1-3).

③ $A \neq O$ 且 $B \neq O$, 但 AB 未必一定不为 O .

当然, 也并不是说消去律始终不成立, 3.1 节中大家会看到适当加强条件以后消去律也可以成立.

矩阵的乘法虽然不满足交换律和消去律, 但仍满足下列结合律和分配律(假设运算都可进行):

$$(1) (AB)C = A(BC).$$

$$(2) k(AB) = (kA)B = A(kB), \text{ 其中 } k \text{ 为数};$$

$$(3) A(B+C) = AB+AC;$$

$$(4) (B+C)A = BA+CA.$$

对于单位阵 E , 容易验证

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n},$$

这和数 1 在数的乘法中的作用类似.

有了矩阵的乘法, 我们可以定义矩阵的幂.

设 A 为 n 阶方阵, k 为正整数, 把 k 个 A 的连乘积叫做 A 的 k 次幂, 记作 A^k , 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}}.$$

由矩阵乘法的结合律可以证明: 当 k 和 l 为正整数时, 有

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl}.$$

因为矩阵乘法一般不满足交换律, 所以对于两个 n 阶方阵 A 和 B , 一般地 $(AB)^k \neq A^k B^k$.

很多关于数的涉及到乘法的运算公式, 如果把数换成矩阵, 只有矩阵可交换时才成立. 例如, 只有当 A 与 B 可交换时, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 等公式才成立. 单位阵 E 与同阶方阵相乘时都可交换. 上面的公式中, 如果有一个矩阵为单位阵, 则等式成立.

【例 1-4】 设 $A = (1, 2, 3)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 AB, BA 及 $(BA)^{20}$.

解 $AB = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8,$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (BA)^{20} &= (BA)(BA) \cdots (BA) \\ &= B(AB)(AB) \cdots (AB)A \\ &= 8^{19}(BA) \end{aligned}$$

$$= 8^{19} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

注意 当运算结果是 1×1 型矩阵时, 圆括号可省去不写.

在定义 1-4 中, c_{ij} 也可写成

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix},$$

即 AB 的第 i 行第 j 列元素等于 A 的第 i 行乘以 B 的第 j 列.

【例 1-5】 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 都是上三角阵, $C = AB$, 证明 C 也是上三角阵, 并且 C 的对角元 $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

证明 由 A, B 都是上三角阵可知, 当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$. 于是当 $i \geq j$ 时, 有

$$c_{ij} = (0, 0, \dots, 0, a_{ii}, a_{i,i+1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} a_{ii}b_{ii} & (i=j) \\ 0 & (i>j) \end{cases},$$

因此结论成立.

类似地, 可以证明:

(1) 两个同阶下三角阵的乘积仍为同阶下三角阵;

(2) 两个同阶对角阵的乘积仍为同阶对角阵. 两个同阶对角阵相乘时, 只需将对角元对应相乘.

1.1.5 线性方程组的矩阵形式

含有 m 个方程 n 个未知数的线性方程组称为 $m \times n$ 型线性方程组, 简称 $m \times n$ 型方程组.

$m \times n$ 型方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1-1)$$

若令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组(1-1)可表示成矩阵形式

$$Ax = b.$$

其中, A 和 b 分别称为方程组(1-1)的系数阵和常数向量. 当 $b=0$ 时, 方程组(1-1)称为齐次线性方程组; 当 $b \neq 0$ 时, 方程组(1-1)称为非齐次线性方程组.

由 A 和 b 合起来所构成的矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

叫做方程组(1-1)的增广阵.

增广阵 (A, b) 与方程组(1-1)是一一对应的, 可用增广阵 (A, b) 代替方程组来进行有关方程组的研究和运算.

矩阵最早是从研究线性方程组的问题引出来的, 线性代数中的很多概念都是为了研究线性方程组的需要而引出来的, 认识到这一点对我们理解某些概念很有帮助.

1.1.6 矩阵的转置

定义 1-5

把 $m \times n$ 型矩阵 A 的行与列互换所得到的 $n \times m$ 型矩阵叫做 A 的转置阵, 记作 A^T 或 A' . A^T 的第 i 行第 j 列元素为 A 的第 j 行第 i 列元素 a_{ji} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$).

例如, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的转置阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置具有下列运算性质(其中, k 是数):

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(kA)^T = kA^T$;
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

前 3 个性质易证, 我们仅给出性质(4)的证明.

设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则 AB 是 $m \times n$ 型矩阵, $(AB)^T$ 是 $n \times m$ 型矩阵; B^T 是 $n \times s$ 型矩阵, A^T 是 $s \times m$ 型矩阵, $B^T A^T$ 也是 $n \times m$ 型矩阵, 故 $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 同型.

又由于

$(AB)^T$ 的第 i 行第 j 列元素 $= AB$ 的第 j 行第 i 列元素

$$= (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{js}) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{si} \end{pmatrix} \\ = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{js}b_{si},$$

而 B^T 的第 i 行为 $(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{si})$, A^T 的第 j 列为 $\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{js} \end{pmatrix}$, 故

$$B^T A^T \text{ 的第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列元素} = B^T \text{ 的第 } i \text{ 行乘以 } A^T \text{ 的第 } j \text{ 列} \\ = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{si}a_{js},$$

$(AB)^T$ 和 $B^T A^T$ 的对应元素相等, 所以

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

性质(4)可以推广到有限个矩阵相乘的情况:

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T.$$

1.1.7 对称阵与反对称阵

定义 1-6

设 A 为 n 阶方阵, 若 $A^T = A$ (即 $a_{ij} = a_{ji}; i, j = 1, 2, \dots, n$), 则 A 叫做对称阵; 若 $A^T = -A$ (即 $a_{ij} = -a_{ji}; i, j = 1, 2, \dots, n$), 则 A 叫做反对称阵.

对称阵的特点是关于主对角线对称的元素相等; 反对称阵的特点是对角元全为零, 并且关于主对角线对称的元素互为相反数.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 分别为对称阵和反对称阵.

【例 1-6】 设 A 和 B 是同阶对称阵, 证明: AB 也是对称阵的充要条件是 $AB = BA$.

证明 由题意知 $A^T = A, B^T = B$, 于是 $(AB)^T = B^T A^T = BA$.

充分性 因为 $AB = BA, (AB)^T = BA = AB$, 所以 AB 是对称阵.

必要性 因为 AB 是对称阵, 所以 $(AB)^T = AB$. 又因为 $(AB)^T = BA$, 所以 $AB = BA$.

思考题 1-1

设 A, B, C 和 E 都是 n 阶方阵, 下列等式或结论是否成立? 为什么?

1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
2. $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$;
3. $(A+E)(A-E) = (A-E)(A+E)$;
4. $(AB)^2 = A^2 B^2 \Leftrightarrow AB = BA$;
5. 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$;
6. 若 $A^2 = E$, 则 $A = E$ 或 $A = -E$;
7. 若 $A^2 = A$, 则 $A = E$ 或 $A = O$;
8. 若 A 为对称阵, 则 A^k 也为对称阵 (k 为正整数);
9. 若 A 为反对称阵, 则 A^k 也为反对称阵 (k 为正整数).

习题 1-1

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 且

$$2(X+B) - 3A = 4(X-A) + B,$$

求 X .

2. 设 A 为 4×5 型矩阵, B 为 5×4 型矩阵, C 为 4×1 型矩阵, D 为 5×1 型矩阵. 判断下列哪些表达式是正确的, 若正确, 写出运算结果的类型.

$$BA, A(B+D), ABC, AD+BC, ABABC.$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AB = BA$, 求 x 和 y .

4. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T;$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^2.$$

5. 计算并观察下列乘积运算结果有何特点.

$$(1) \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}.$$